NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. GROSSETÊTE

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1890). Solution de la question de mathématiques élémentaires

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 256-264

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__256_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1890). SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES;

PAR M. E. GROSSETÊTE,
Professeur au lycée de Nevers.

On donne deux droites xOx', yOy', *qui se coupent en un point* O, *et sur la première un point* A, *sur la seconde un point* B. *Une droite mobile rencontre* xOx' *en* M *et* yOy' *en* N, *et l'on suppose que* *la longueur* MN *est égale à la somme ou à la valeur absolue de la différence des longueurs* AM *et* BN.

1° *Démontrer qu'il y a deux séries de droites qui satisfont à cette condition. Trouver combien on peut faire passer de ces droites par un point donné* P *du plan. Construire ces droites et distinguer parmi ces droites celles pour lesquelles la longueur* MN *est la somme des longueurs* AM *et* BN *de celles pour lesquelles elle en est la différence.*

2° *Soit* MN *une droite appartenant à l'une des deux séries; démontrer que le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle* OMN *est une conique qui a un foyer au point* O, *et que l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle* OMN *est un cercle.*

1° Prenons pour Ox la direction OA et pour Oy la direction OB, et soit θ l'angle AOB. Désignons OM par ξ, ON par η, ξ étant positif dans la direction Ox, négatif dans la direction contraire, η étant positif dans la direction Oy et négatif dans la direction contraire. Soit encore OA $= a$, OB $= b$. On a, dans tous les cas,

$$\overline{AM} = \xi - a, \qquad \overline{BN} = \eta - b;$$

et, dans le triangle OMN,

$$\overline{MN}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 - 2\,OM.ON\cos\theta,$$

MN étant égal à la somme, ou a la valeur absolue de la différence des longueurs AM et BN, on aura, dans tous les cas,

$$[\xi - a \pm (\eta - b)]^2 = \xi^2 + \eta^2 - 2\xi\eta\cos\theta$$

ou

$$(1) \qquad 2\xi\eta(\cos\theta \pm 1) - 2(\xi \pm \eta)(a \pm b) + (a \pm b)^2 = 0.$$

Les signes supérieurs doivent être pris simultanément; il en est de même des signes inférieurs. La relation précédente permet de conclure que les points M et N tracent sur Ox et Oy deux divisions homographiques. On peut donner à la relation (1) une autre forme. Posons

$$\overline{AM} = x = \xi - a, \qquad \overline{BN} = y = \eta - b.$$

ξ étant positif dans le sens Ox et négatif en sens contraire, η étant positif dans le sens Oy, on obtient

$$(2)\quad 2xy(\cos\theta + 1) = 2x(a - b\cos\theta) + 2y(b - a\cos\theta) + l^2,$$

en posant

$$\overline{AB}^2 = l^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$

Considérons les deux divisions homographiques tracées sur Ox et Oy et définies par la relation

$$(3)\quad 2xy(\cos\theta + 1) = 2x(a - b\cos\theta) + 2y(b - a\cos\theta) + l^2.$$

Soit M un point de $x'Ox$ correspondant à une valeur de x, la valeur correspondante de y déterminera sur $y'Oy$ un point N. Deux cas peuvent se présenter :

1° La valeur de y est de même signe que celle de x, alors la droite MN est telle que sa longueur est égale à $\overline{AM} + \overline{BM}$;

2° La valeur de y est de signe contraire à x; MN est telle que sa longueur est égale à la valeur absolue de la différence $\overline{AM} - \overline{BN}$.

Considérons en second lieu les deux divisions homographiques tracées sur Ox et Oy et définies par la relation

$$(3')\quad 2xy(\cos\theta - 1) = 2x(a - b\cos\theta) + 2y(b - a\cos\theta) + l^2.$$

A un point M de $x'Ox$ correspondant à la valeur x répond un point N sur $y'Oy$ déterminé par (3').

1° La valeur de y est de même signe que celle de x:

alors la droite MN est telle que sa longueur est égale à la valeur absolue de la différence $\overline{AM} - \overline{BN}$;

2° La valeur de y est de signe contraire à x; MN est telle que sa longueur est la valeur absolue de la somme $\overline{AM} + \overline{BN}$.

Voyons combien on peut faire passer de ces droites par un point P du plan. Considérons les deux divisions homographiques définies sur OA et OB par la relation

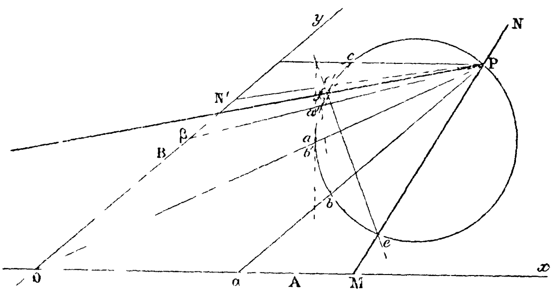
$$(3)\quad 2xy(\cos\theta + 1) = 2x(a - b\cos\theta) + 2y(b - a\cos\theta) + l^2.$$

Si l'on joint le point P aux points de ces deux divisions, on obtient deux faisceaux homographiques de même sommet. Les droites doubles de ces faisceaux sont les droites telles que MN qu'on peut faire passer par le point P. En général, il y a deux droites réelles passant par le point P et correspondant à la formule (3). La formule (3′) en donnerait deux autres. Construisons les droites passant par le point P et correspondant à la formule (3) ou à la formule

$$(1')\quad 2\xi\eta(\cos\theta + 1) - 2(\xi + \eta)(a + b) + (a + b)^2 = 0.$$

Pour cela, déterminons sur Ox et Oy trois couples de points homologues : au point O, considéré comme appartenant à Oy, correspond sur Ox un point α (*fig.* 1) situé à une distance de O égale à $\frac{a+b}{2}$; de même, au point O de Ox correspond, sur Oy, un point β situé à une distance de O égale aussi à $\frac{a+b}{2}$; au point à l'infini sur Ox correspond, sur Oy, un point situé à une distance de O égale à $\frac{a+b}{1+\cos\theta}$. En joignant P à ces trois couples de points homologues, on obtient trois couples de rayons homologues des deux faisceaux homographiques. Si l'on fait passer une circonférence par le point P, elle coupera les rayons homologues en (a, a'), (b, b'), (c, c'). Les droites $a'b$, ab' d'une part, et

Fig. 1.



(ac') et $(a'c)$ se couperont en deux points. La droite qui joindra ces deux points pourra rencontrer la circonférence en deux points e, f; les droites Pe, Pf seront les rayons doubles cherchés. On trouve PM et PN'. L'un d'eux PN est une droite de la première série, puisque AM et BN sont de même signe, l'autre PN' est de la seconde série puisque BN' et AM' sont de signes contraires. On verrait de la même manière la construction et la situation des rayons doubles correspondants à la relation (3').

Soit MN une droite appartenant à l'une des séries, et C un cercle circonscrit au triangle OMN; cherchons le lieu du centre C de ce cercle. Prenons la figure polaire réciproque du cercle C par rapport à un cercle directeur ayant O pour centre et 1 pour rayon. C, passant par le centre O du cercle directeur, aura pour figure polaire réciproque une parabole ayant pour foyer O et pour directrice la polaire $\varphi\varphi'$ du centre C par rapport au cercle directeur; au point M du cercle C correspond une tangente à la parabole, la polaire de M par rapport au cercle directeur; elle passe par un point μ de OM, tel que, si l'on désigne $O\mu$ par x_1, on a

$$\xi x_1 = 1.$$

Le symétrique de O, par rapport à cette tangente, est le point φ, où OA rencontre la directrice de la parabole. Soit $O\varphi = x'$, on aura

$$x' = 2x_1;$$

donc ξ et x' sont liés par la relation

$$\xi x' = 2.$$

De même, en appelant y_1 la distance de l'origine O à la polaire ν de N et par y' la distance $O\varphi'$ de O au point où la directrice rencontre $y'Oy$, on aura

$$\eta y_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad y' = 2y_1;$$

donc

$$\eta y'' = 2.$$

Or ξ et η vérifient la condition

$$2\xi\eta(\cos\theta \pm 1) - 2(\xi \pm \eta)(a \pm b) + (a \pm b)^2 = 0;$$

donc on aura, entre x' et y', la relation

$$(1) \quad \left(\frac{a \pm b}{4}\right)^2 x'y' - (y' \pm x')(a \pm b) + 2(\cos\theta \pm 1) = 0,$$

ce qui prouve que la directrice de la parabole trace sur deux droites fixes, Ox, Oy, deux divisions homographiques; par suite, la directrice enveloppe une conique. Cette conique est un cercle. En effet, considérons la directrice $\varphi\varphi'$ qui trace sur $x'Ox$, $y'Oy$ des divisions homographiques définies par

$$(1') \quad \left(\frac{a + b}{4}\right)^2 x'y' - (x' + y')(a + b) + 2(\cos\theta + 1) = 0.$$

Les valeurs de x', y' correspondantes aux points de contact de la conique avec Ox et Oy sont

$$O\alpha = \alpha = \frac{2(\cos\theta + 1)}{a+b},$$

$$O\beta = \beta = \frac{2(\cos\theta + 1)}{a+b}.$$

Ces points sont à égale distance de O. Si la conique est un cercle, le point de contact γ de $\varphi\varphi'$ avec ce cercle doit être tel que

$$\varphi\gamma = \varphi\alpha, \qquad \varphi'\gamma = \varphi'\beta.$$

Par suite, $\varphi\varphi' = \alpha\varphi + \beta\varphi'$; et réciproquement, si cette condition est remplie, les droites $\varphi\varphi'$ restent à une distance constante du point ω, intersection des perpendiculaires $\alpha\omega$ et $\beta\omega$ à Ox et Oy. Or

$$\overline{\alpha\varphi} = x' - \alpha = \left[x' - \frac{2(\cos\theta + 1)}{a+b}\right],$$

$$\overline{\beta\varphi'} = y' - \beta = \left[y' - \frac{2(\cos\theta + 1)}{a+b}\right].$$

Si la conique est un cercle, on devra avoir

$$\overline{\varphi\varphi'} = \overline{\alpha\varphi} + \overline{\beta\varphi'},$$

$$\left[x' + y' - \frac{4(\cos\theta + 1)}{a+b}\right]^2 = x'^2 + y'^2 - 2x'y'\cos\theta$$

ou

$$\left(\frac{a-b}{a}\right)^2 x'y' - (x' + y'(a+b) + 2(\cos\theta + 1) = 0,$$

qui n'est autre chose que la relation $(4')$ à laquelle satisfont x' et y'; donc $\varphi\varphi'$ enveloppe un cercle.

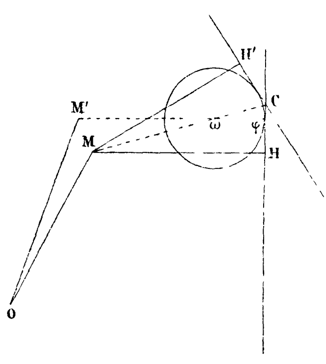
On verrait de la même manière que $\varphi\varphi'$ enveloppe un cercle lorsqu'on considère la deuxième relation qu'on déduit de (4).

Si donc on prend la figure polaire réciproque de ce cercle par rapport au cercle directeur de centre O, à l'enveloppe da la directrice correspondra le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle OMN. Ce lieu est donc une conique ayant pour foyer le point O et pour directrice la polaire de ω, c'est-à-dire nne perpendiculaire sur la bissectrice O ω de l'angle des axes.

Cela posé, pour avoir l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle OMN, il suffit de chercher sur la figure polaire réciproque, l'enveloppe des paraboles ayant même foyer et telles que la directrice soit constamment tangente à un cercle.

Considérons alors deux paraboles voisines ayant pour foyer O (*fig.* 2) et pour directrices deux tangentes au cercle ω. Soit M un point d'intersection ; ce point est tel que $MO = MH = MH'$, MH et MH' étant les distances

Fig. 2.



de M aux deux directrices. Si l'on suppose que la seconde parabole se rapproche de plus en plus de la première, le point de contact φ de la directrice φH avec le cercle ω sera la limite du point d'intersection C des deux directrices, car les directrices enveloppent le cercle ω. Lorsque les deux directrices se rapprochent, l'angle diminue de plus en plus; alors MH' tend vers la même limite que MH; or MH tend à devenir la perpendiculaire menée par le point φ à CH; cette droite passera par ω, ce qu'on pouvait du reste prévoir [1], et le point M tendra vers une position limite M', telle que $M'\varphi = M'O$. Or $M'\varphi$ est la distance du point M' à la circonférence ω. On peut donc dire que le lieu du point M' est le lieu géométrique des points tels que leur distance à un point fixe et à une circonférence fixe est la même. On sait que ce lieu est une conique ayant pour foyer le point fixe O. L'enveloppe des paraboles est donc une conique ayant pour foyer le point O.

Si maintenant on prend la figure polaire réciproque de cette conique, on trouve un cercle; donc les cercles circonscrits au triangle OMN enveloppent un cercle.

C. Q. F. D.