BARISIEN

Concours d'admission à l'École polytechnique en 1890

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 251-256

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__251_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1890;

PAR M. LE CAPITAINE BARISIEN.

On donne, dans un plan, une hyperbole équilatère H *dont l'équation par rapport à ses axes, pris pour axes de coordonnées, est*

$$x^2 - y^2 = a^2. \tag{1}$$

D'un point M *du plan, ayant pour coordonnées* $x = p$, $y = q$, *on mène des normales à cette courbe.*

On demande :

1° *De faire passer par les pieds de ces normales* *une nouvelle hyperbole équilatère, dont les normales en ces points soient concourantes, et de déterminer leur point de concours.*

2° *En désignant par* K *une hyperbole satisfaisant à cette condition, dans quelle région du plan doit être placé le point* M *pour qu'il y ait une hyperbole* K *correspondant à ce point?*

3° *Quelle ligne doit décrire le point* M *pour que l'hyperbole* K *soit égale à l'hyperbole* H.

N. B. — On conservera les notations indiquées.

I. L'équation de l'hyperbole équilatère passant par les pieds des normales issues du point M est

$$(2)\qquad 2xy - py - qx = 0.$$

L'équation générale des coniques passant par les points d'intersection des hyperboles (1) et (2) est donc

$$(3)\qquad x^2 - y^2 + 2\lambda xy - p\lambda y - q\lambda x - a^2 = 0.$$

Ces coniques sont toujours des hyperboles équilatères. Il s'agit de déterminer λ de façon que les normales aux quatre points d'intersection de (1) et (2) concourent en un point (α, β) également à déterminer.

L'équation de la normale à l'hyperbole (3) en x, y, est

$$\frac{X - x}{2x + 2\lambda y - q\lambda} = \frac{Y - y}{-2y + 2\lambda x - p\lambda}.$$

Exprimons que cette droite passe par le point (α, β), il vient

$$(\alpha - x)(2y - 2\lambda x + p\lambda) + (\beta - y)(2x + 2\lambda y - q\lambda) = 0$$

et en développant

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &2\lambda(x^2 - y^2) - 4xy + x[2\beta - \lambda(p + 2\alpha)] \\ &\quad + y[2\alpha + \lambda(q + 2\beta)] + \lambda(p\alpha - q\beta) = 0. \end{aligned}\right.$$

Les normales à l'hyperbole (3) issues du point (α, β) ont leurs pieds à l'intersection des courbes (3) et (4). Une quelconque des hyperboles (3) étant

$$(5)\qquad x^2 - y^2 + 2\mu xy - q\mu x - p\mu q - a^2 = 0,$$

en identifiant (4) et (5), on exprimera les conditions de l'énoncé.

Les équations d'identification sont

$$\frac{2\lambda}{1} = \frac{-2}{\mu} = \frac{2\beta - \lambda(p + 2\alpha)}{-q\mu}$$
$$= \frac{2\alpha + \lambda(q + 2\beta)}{-p\mu} = \frac{\lambda(p\alpha - q\beta)}{-a^2}.$$

Elles peuvent s'écrire

$$(6)\qquad \lambda\mu = -1,$$
$$(7)\qquad 2q = 2\beta - \lambda(p + 2\alpha),$$
$$(8)\qquad 2p = 2\alpha + \lambda(q + 2\beta),$$
$$(9)\qquad p\alpha - q\beta = -2a^2.$$

En éliminant λ entre (7) et (8), on a l'équation

$$(10)\qquad \left(\alpha - \frac{p}{4}\right)^2 + \left(\beta - \frac{q}{4}\right)^2 = \frac{9(p^2 + q^2)}{16},$$

A un système de valeurs de p et q correspondent donc deux systèmes de valeurs de α et β, relatifs aux points d'intersection de la droite (9) avec le cercle (10).

II. Pour que ces points d'intersection soient réels, il suffit d'exprimer que la distance du centre du cercle (10) à la droite (9) est plus petite que le rayon. On a ainsi

$$\frac{p^2 - q^2 + 8a^2}{4\sqrt{p^2 + q^2}} < \frac{3\sqrt{p^2 + q^2}}{4},$$

ou

$$(p^2 - q^2 + 8a^2) < 3(p^2 + q^2)$$

ou

$$p^2 + 2q^2 - 4a^2 > 0;$$

α et β ne seront réels, et par suite λ, que si le point M est à l'intérieur de l'ellipse

$$p^2 + 2q^2 = 4a^2. \tag{11}$$

Si le point M est sur l'ellipse (11), on n'aura qu'une hyperbole K, et la valeur de λ correspondante est

$$\lambda = \frac{p}{q}.$$

Si, enfin, le point M est à l'intérieur de l'ellipse (11) les hyperboles (K) seront imaginaires.

III. Cherchons maintenant la grandeur de l'axe de l'hyperbole (3).

En général, pour une conique dont l'équation est

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

l'équation en R^2 qui donne les carrés des demi-axes est

$$(AC - B^2)R^4 + (A + C)F_1 R^2 + F_1^2 = 0$$

avec

$$F_1 = \frac{AE^2 + CD^2 - 2BDE}{B^2 - AC} + F.$$

Dans le cas de l'hyperbole équilatère, $A + C = 0$, et l'on a

$$R^2 = \frac{F_1}{\sqrt{B^2 - AC}}.$$

Or, pour l'hyperbole (3), comme

$$A = 1, \qquad C = -1, \qquad B = \lambda,$$

$$D = -\frac{q\lambda}{2}, \qquad E = -\frac{p\lambda}{2}, \qquad F = -a^2,$$

on trouve

$$R^2 = \frac{2pq\lambda^3 + \lambda^2(q^2 - p^2 + 4a^2) + 4a^2}{4(\lambda^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

En exprimant que $R = a$, on a l'équation

$$(12) \quad [2pq\lambda^3 + \lambda^2(q^2 - p^2 + 4a^2) + 4a^2]^2 = 16a^4(\lambda^2 + 1)^3.$$

On aura le lieu des points (p, q), tels que l'hyperbole K soit égale à l'hyperbole H en éliminant α, β et λ entre les quatre équations (7), (8), (9) et (12).

L'élimination de α et β entre (7), (8) et (9) se fait au moyen du déterminant

$$\begin{vmatrix} 2 & -2\lambda & 2q + \lambda p \\ 2\lambda & 2 & 2p - \lambda q \\ q & -p & 2a^2 \end{vmatrix} = 0,$$

qui, développé, devient

$$(13) \quad \lambda^2(q^2 - p^2 + 4a^2) - 6pq\lambda + 4a^2 + 2(p^2 - q^2) = 0.$$

Il reste à éliminer λ entre (12) et (13). Cette élimination, qui paraît, au premier abord, assez laborieuse, est rendue facile par l'artifice suivant.

L'équation (12) peut s'écrire

$$\lambda^2(p^2 - q^2 - 2pq\lambda) = 4a^2(\lambda^2 + 1)\left(1 - \sqrt{\lambda^2 + 1}\right).$$

Multiplions les deux membres par $1 + \sqrt{\lambda_2 + 1}$, il vient

$$(12)' \quad \left(\sqrt{\lambda^2 + 1} + 1\right)(p^2 - q^2 - 2pq\lambda) = -4a^2(\lambda^2 + 1).$$

L'équation (13) peut aussi se transformer de la façon suivante

$$(13)' \quad 3(p^2 - q^2 - 2pq\lambda) = (p^2 - q^2 - 4a^2)(\lambda^2 + 1).$$

Entre (12)' et (13)', l'élimination de λ va se faire maintenant très facilement. Divisons ces deux équations membre à membre ; nous aurons

$$\frac{\sqrt{\lambda^2 + 1} + 1}{3} = -\frac{4a^2}{p^2 \quad q^2 - 4a^2};$$

d'où

$$\lambda^2 = \frac{24a^2(p^2 - q^2 + 2a^2)}{(p^2 - q^2 - 4a^2)^2}.$$

En portant cette valeur dans (13), on obtient

$$\begin{aligned}[(p^2 - q^2)^2 - 14a^2(p^2 - q^2) - 32a^4]^2 \\ - 216a^2p^2q^2(p^2 - q^2 + 2a^2) = 0\end{aligned}$$

et définitivement

$$\begin{aligned}&(p^2 - q^2 + 2a^2) \\ &\quad \times [(p^2 - q^2 + 2a^2)(p^2 - q^2 - 16a^2 - 216a^2p^2q^2 = 0].\end{aligned}$$

Le lieu se compose donc de l'hyperbole équilatère

$$p^2 - q^2 + 2a^2 = 0$$

et de la courbe du sixième degré

$$(p^2 - q^2 + 2a^2)(p^2 - q^2 - 16a^2)^2 - 216a^2p^2q^2 = 0,$$

qu'il est facile de construire.

N. B. — M. Reynès, ancien élève de l'École Centrale, nous a envoyé aussi une solution de la troisième Partie.