Nouvelles annales de mathématiques

E. Carvallo

Formule des différences et formule de Taylor

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 24-29
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__24_0>

FORMULE DES DIFFÉRENCES ET FORMULE DE TAYLOR;

PAR M. E. CARVALLO,

Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

I. *Formule des différences.* — Je considère la fonction $u = f(x)$, et je donne à la variable x les valeurs équidistantes x, $x + \Delta x$, $x + 2\Delta x$, ..., $x + n\Delta x$. On a, pour les valeurs de la fonction et ses différences successives, le tableau

$$\begin{array}{cccccc}
u_0 & \Delta u_0 & \Delta^2 u_0 & \ldots & \Delta^p u_0 & \ldots \\
u_1 & \Delta u_1 & \Delta^2 u_1 & \ldots & \Delta_p u_1 & \\
u_2 & \Delta u_2 & \Delta^2 u_2 & \ldots & \ldots\ldots & \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots & & & \\
u_{n-1} & \Delta u_{n-1} & & & & \\
u_n & & & & &
\end{array}$$

La formule que je veux signaler donne u_n en fonction des nombres de la première ligne, jusqu'à la colonne des Δ^p et des nombres de cette colonne des Δ^p. C'est

$$u_n = u_0 + C_n^1 \Delta u_0 + C_n^2 \Delta^2 u_0 + \ldots + C_n^{p-1} \Delta^{p-1} u_0 + Q_p,$$

avec

$$Q_p = C_{n-1}^{p-1} \Delta^p u_0 + C_{n-2}^{p-2} \Delta^p u_1 + \ldots + C_{p-1}^{p-1} \Delta^p u_{n-p}.$$

Pour $p = 1$, on doit la remplacer par la formule évidente

$$(1) \quad u_n = u_0 + \Delta u_0 + \Delta u_1 + \Delta u_2 + \ldots + \Delta u_{n-1} = u_0 + Q_1.$$

Pour passer de $p = 1$ à $p = 2$, je multiplie les deux membres de l'égalité (1) par Δ, ce qui revient à avancer d'une colonne vers la droite dans le tableau des différences; dans la formule obtenue, je remplace n successivement par les nombres $0, 1, 2, \ldots, n-1$ et j'ajoute;

j'obtiens

$$Q_1 = C_n^1 \Delta u_0 + C_{n-1}^1 \Delta^2 u_0 + C_{n-2}^1 \Delta^2 u_1 + \ldots + C_1^1 \Delta^2 u_{n-2},$$

et, en portant cette valeur de Q_1 dans l'égalité (1),

$$(2)\quad \begin{cases} u_n = u_0 + C_n^1 \Delta u_0 + Q_2, \\ \text{avec} \\ Q_2 = C_{n-1}^1 \Delta^2 u_0 + C_{n-2}^1 \Delta^2 u_1 + \ldots + C_1^1 \Delta^2 u_{n-2}. \end{cases}$$

De même pour évaluer Q_2 au moyen de $\Delta^2 u_0$ et des différences troisièmes, je multiplie les deux membres de la formule (1) par Δ^2 et je remplace successivement n par $0, 1, 2, \ldots, n-2$. Pour avoir Q_2, il suffit de multiplier les deux membres des égalités obtenues respectivement par C_{n-1}^1, C_{n-2}^1, $\ldots$, C_1^1 et d'ajouter. On trouve ainsi

$$Q_2 = C_n^2 \Delta^2 u_0 + C_{n-1}^2 \Delta^3 u_0 + C_{n-2}^2 \Delta^3 u_1 + \ldots + C_2^2 \Delta^3 u_{n-3},$$

et, en portant cette valeur de Q_2 dans l'égalité (2),

$$(3)\quad \begin{cases} u_n = u_0 + C_n^1 \Delta u_0 + C_n^2 \Delta^2 u_0 + Q_3, \\ \text{avec} \\ Q_3 = C_{n-1}^2 \Delta^3 u_0 + C_{n-2}^2 \Delta^3 u_1 + \ldots + C_2^2 \Delta^3 u_{n-3}. \end{cases}$$

Par la même méthode, on passe d'une valeur de p à la suivante. On a donc bien la formule annoncée.

II. *Formule de Taylor.* — Je pose

$$n\,\Delta x = h, \qquad u_n = f(x+h), \qquad u_0 = f(x),$$

et, pour simplifier l'écriture, je considère la formule (3) qui correspond à $p = 3$. Elle peut s'écrire

$$(3')\quad \begin{cases} f(x+h) = f(x) + \dfrac{n}{1}\,\Delta x\,\dfrac{\Delta u_0}{\Delta x} + \dfrac{n(n-1)}{1.2}\,\Delta x^2\,\dfrac{\Delta^2 u_0}{\Delta x^2} + Q_3, \\ \text{avec} \\ Q_3 = \Delta x^3 \left(C_{n-1}^2 \dfrac{\Delta^3 u_0}{\Delta x^3} + C_{n-2}^2 \dfrac{\Delta^3 u_1}{\Delta x^3} + \ldots + C_2^2 \dfrac{\Delta^3 u_{n-3}}{\Delta x^3} \right). \end{cases}$$

Je fais maintenant tendre Δx vers o, en laissant fixe le produit $n\,\Delta x = h$, et je suppose que les rapports $\frac{\Delta u_0}{\Delta x}$, $\frac{\Delta^2 u_0}{\Delta x^2}$ ont des limites que je désigne par $\frac{du_0}{dx} = f'(x)$, $\frac{d^2 u_0}{dx^2} = f''(x)$ (¹). De la formule (3′) elle-même, résulte que Q_3 a aussi une limite et que l'on a, en désignant cette limite par R_3,

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + R_3 :$$

c'est la formule de Taylor.

L'expression de Q_3 dans la formule (3′) fournit intuitivement les diverses formes qu'on peut donner au reste.

a. On peut regarder les diverses valeurs de $\frac{\Delta^3 u}{\Delta x^3}$ comme affectées des poids $C_{n-1}^2, C_{n-2}^2, \ldots, C_2^2$ dont la somme est C_n^3. On peut alors écrire

$$Q_3 = C_n^3 \Delta x^3 \frac{C_{n-1}^2 \frac{\Delta^3 u_0}{\Delta x^3} + C_{n-2}^2 \frac{\Delta^3 u_1}{\Delta x^3} + \ldots + C_2^2 \frac{\Delta^3 u_{n-3}}{\Delta x^3}}{C_n^3}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \Delta x^3 . \operatorname{moy} \frac{\Delta^3 u}{\Delta x^3}.$$

Si l'on fait tendre Δx vers o, on sait que Q_3 a une limite R_3, cette formule montre alors que moy $\frac{\Delta^3 u}{\Delta x^3}$ a une limite, et cela sans faire aucune hypothèse sur l'existence même de la dérivée troisième. En désignant cette limite par $\left(\frac{d^3 u}{dx^3}\right)_m$, on a

$$(a) \qquad R_3 = \frac{h^3}{1.2.3} \left(\frac{d^3 u}{dx^3}\right)_m.$$

(¹) Ces limites pourraient servir de définition aux dérivées des divers ordres; la notation différentielle n'en serait que plus intuitive. Il en résulterait avec évidence la formule $\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} u$.

Cette formule peut remplacer la formule de Lagrange

$$R_3 = \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x + \theta h),$$

qui est équivalente à la précédente dans les conditions bien connues où on a l'habitude d'établir la formule de Taylor par la méthode de M. Rouché; dans ces conditions, il serait sans doute malaisé de transformer directement la première formule dans la deuxième. La transformation devient facile si l'on suppose qu'à chaque nombre ε on peut faire correspondre un nombre η tel que l'on ait

$$\left| \frac{\Delta^3 u}{\Delta x^3} - \frac{d^3 u}{dx^3} \right| < \varepsilon, \quad \text{toutes les fois que} \quad |\Delta x| < \eta,$$

et pour toutes les valeurs de x et de $x + \Delta x$ comprises entre x et $x + h$. Je ne m'arrêterai pas sur ces difficultés dont l'étude est très loin du but que je me propose ici.

b. Je considère un terme quelconque de Q_3 dans la formule (3′), savoir

$$K = C^2_{n-k-1} . \Delta x^3 \frac{\Delta^3 u_k}{\Delta x^3} = \frac{(n-k-1)(n-k-2)}{1.2} \Delta x^3 \frac{\Delta^3 u_k}{\Delta x^3}.$$

Je remplace n par sa valeur $\frac{h}{\Delta x}$; K prend la forme

$$K = \frac{1}{1.2} [h - (k+1)\Delta x][h - (k+2)\Delta x] . \Delta x \frac{\Delta^3 u_k}{\Delta x^3}.$$

Enfin je pose

$$x + k\,\Delta x = z, \qquad u_k = f(z), \qquad \Delta x = \Delta z;$$

j'obtiens

$$K = \frac{1}{1.2} (x + h - z - \Delta x)(x + h - z - 2\Delta x) \frac{\Delta^3 f(z)}{\Delta z^3} \Delta z,$$

et par suite, en faisant tendre $\Delta z = \Delta x$ vers o,

$$(b) \qquad R_3 = \frac{1}{1.2} \int_x^{x+h} (x + h - z)^2 f'''(z)\, dz.$$

c. Si l'on imagine le tableau des différences prolongé vers la gauche, en mettant des zéros sur toute la première ligne, on aura, en multipliant par Δ^{-3} les deux membres de la formule (3),

$$\Delta^{-3} u_n = C_{n-1}^2 u_0 + C_{n-2}^2 u_1 + \ldots + C_2^2 u_{n-3}.$$

On a de même

$$\Delta^{-1} u_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\Delta^{-1} u_n}{\Delta x^{-1}} = u_0 \Delta x + u_1 \Delta x + \ldots + u_{n-1} \Delta x.$$

Je fais tendre Δx vers o et je suppose que le second membre ait une limite que je désigne par

$$\frac{d^{-1} u_n}{dx^{-1}} = \int_x^{x+h} f(z)\,dz,$$

on aura

$$\lim \frac{\Delta^{-1} u_n}{\Delta x^{-1}} = \frac{d^{-1} u_n}{dx^{-1}} = \int_x^{x+h} f(z)\,dz.$$

Comme on a, d'autre part,

$$\Delta^{-3} = \Delta^{-1}.\Delta^{-1}.\Delta^{-1}, \qquad \frac{\Delta^{-3}}{\Delta x^3} = \frac{\Delta^{-1}}{\Delta x}\,\frac{\Delta^{-1}}{\Delta x}\,\frac{\Delta^{-1}}{\Delta x},$$

on en conclut, en supposant que chaque opération $\frac{\Delta^{-1}}{\Delta x}$ conduise à une limite,

$$\frac{d^{-3}}{dx^3} = \frac{d^{-1}}{dx}\,\frac{d^{-1}}{dx}\,\frac{d^{-1}}{dx}.$$

D'après cela, l'expression de Q_3 prend la forme

$$Q_3 = \frac{\Delta^{-3}}{\Delta x^{-3}}\left(\frac{\Delta^3 u_{n-3}}{\Delta x^3}\right) = \frac{\Delta^{-1}}{\Delta x}\,\frac{\Delta^{-1}}{\Delta x}\,\frac{\Delta^{-1}}{\Delta x}\,\frac{\Delta^3 u_{n-3}}{\Delta x^3},$$

et conduit à la valeur limite

$$(c) \qquad R_3 = \int_x^{x+h} dz \int_x^z dz \int_x^z f'''(z)\,dz.$$

III. *Remarques.* — En combinant les deux dernières méthodes de toutes les façons possibles, on obtiendra p expressions du reste R_p, le nombre des intégrations étant respectivement $1, 2, \ldots, p$. La première fournit facilement l'expression de Lagrange et la dernière celle de Cauchy. Enfin on retrouve la formule de Taylor en partant des expressions mêmes du reste, pour la première (b) en intégrant par parties, pour la dernière (c) en effectuant les intégrations successives.

Je pense avoir suffisamment montré quels avantages l'enseignement pourrait tirer d'une méthode d'exposition où les principes du Calcul différentiel et intégral seraient basés sur le calcul des différences. Celui-ci, s'occupant des quantités finies, est pratique et appartient à l'Algèbre élémentaire; celui-là, s'occupant des limites, rentre dans l'Analyse. Mais le lien est bien évident, le Calcul différentiel et intégral est en quelque sorte la limite du calcul des différences. Il serait peut-être bon de mettre ce fait en évidence, au moins dans une première exposition. On a vu combien les définitions arrivent intuitivement. La démonstration que j'ai exposée de la formule de Taylor met bien en évidence son caractère de simple *identité*.