Nouvelles annales de mathématiques

Barisien

Concours d’admission à l’École centrale en 1890

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 243-251

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__243_0>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1890.

Solution par M. le Capitaine BARISIEN.

PREMIÈRE SESSION.

On donne deux axes rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$, *et deux points* A, B, *symétriques par rapport au point* O.

1° *On prend sur l'axe des* x *un point quelconque* P, *et l'on considère la parabole* (P) *qui est tangente aux droites* PA, PB *au point* A *et au point* B. *Lieu du sommet et lieu du foyer de cette parabole quand le point* P *parcourt l'axe* $x'Ox$.

2° *On prend, sur l'axe des* y, *un point* Q *quelconque, et l'on considère la parabole* (Q) *qui est tangente aux droites* QA, QB, *au point* A *et au point* B. *Les deux paraboles* (P) *et* (Q) *qui correspondent ainsi à un point* P *pris sur* $x'Ox$ *et à un point* Q *pris sur* $y'Oy$ *se coupent aux points* A *et* B *et en deux autres points* C, D. *Former l'équation de la droite* CD *et trouver le lieu décrit par les points* C *et* D *quand les deux points* P *et* Q *se déplacent, l'un sur* $x'Ox$, *l'autre sur* $y'Oy$, *de façon que l'abscisse du premier soit toujours égale à l'ordonnée du second.*

I. Soient a et b les coordonnées du point A, et désignons les longueurs OP et OQ respectivement par α et β.

L'équation générale des coniques tangentes aux droites AP et BP, aux points d'intersection de ces droites avec AB est

$$[bx + (\alpha - a)y - b\alpha][bx - (\alpha + a)y - b\alpha] \\ + \lambda(bx - ay)^2 = 0.$$

Pour que cette conique soit une parabole, il faut que $\lambda = -1$, et la parabole (P) a pour équation

$$(1) \qquad \alpha y^2 + 2b^2x - 2aby - b^2\alpha = 0.$$

Désignons par p et q les coordonnées du foyer de cette parabole et par $x - k = 0$ l'équation de la directrice. En identifiant l'équation (1) avec l'équation focale

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = (x-k)^2,$$

on a les relations

$$k - p = \frac{b^2}{\alpha},$$

$$q = \frac{ab}{\alpha},$$

$$p^2 + q^2 - k^2 = -b^2,$$

d'où l'on déduit

$$p = \frac{a^2 - b^2 + \alpha^2}{2\alpha}, \qquad q = \frac{ab}{\alpha}, \qquad k = \frac{a^2 + b'' + \alpha^2}{2\alpha}.$$

Pour avoir le lieu des foyers de (P), lorsque α varie, il faut éliminer α entre les deux valeurs de p et q, ce qui donne

$$q^2(a^2 - b^3) - 2abpq + a^2b^2 = 0,$$

Cette équation représente une hyperbole ayant son centre à l'origine et l'une de ses asymptotes parallèle à l'axe des x.

L'axe de la parabole (P) ayant pour équation

$$y = \frac{ab}{\alpha},$$

on obtient le lieu du sommet en éliminant α entre cette dernière équation et l'équation (1). On trouve ainsi

$$ay^2 - 2bxy + ab^2 = 0;$$

Le lieu des sommets est donc une hyperbole ayant pour asymptote une parallèle à l'axe des x, son centre à l'origine, et passant par le point A.

II. Par analogie avec la parabole (P), on trouve pour l'équation de la parabole (Q),

$$(2) \qquad \beta x^2 + 2a^2y - 2abx - a^2\beta = 0.$$

L'équation générale des coniques passant par les points d'intersection de (P) et (Q) est

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha y^2 + 2b^2x + 2aby - b^2\alpha \\ \qquad - \mu(\beta x^2 + 2a^2y - 2abx - a^2\beta) = 0. \end{array} \right.$$

L'équation de AB est

$$bx - ay = 0.$$

Désignons celle de CD par

$$ux + vy - 1 = 0,$$

u et v, ainsi que μ, étant des coefficients à déterminer.

L'ensemble des deux droites AB et CD, considérées comme une conique, a donc pour équation

$$(ux + vy - 1)(bx - ay) = 0$$

ou

$$(4) \qquad ubx^2 + (vb - au)xy - avy^2 - bx + ay = 0.$$

Exprimons que cette équation est identique à (3); il vient les relations

$$\frac{ub}{\mu\beta} = \frac{-av}{\alpha} = \frac{-1}{2(b - a\mu)} = \frac{1}{2(a\mu - b)},$$

$$vb = au,$$

$$b'\alpha + \mu a^2\beta = 0.$$

De ces cinq relations, qui se réduisent à trois, on déduit

$$\mu = -\frac{b^2\alpha}{a^2\beta},$$

$$u = \frac{\alpha\beta}{2a(a\beta + b\alpha)}, \qquad v = \frac{\alpha\beta}{2b(a\beta + b\alpha)}.$$

L'équation de CD devient donc

$$(5) \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2\left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}\right).$$

Si $\alpha = \beta$, on a, pour cette dernière équation,

$$(6) \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{2(a+b)}{\alpha}.$$

En éliminant α entre (6) et (1), on a le lieu des points C et D qui a pour équation

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = a + b.$$

C'est une ellipse de centre O et d'axes Ox et Oy.

SECONDE SESSION.

On donne une parabole rapportée à deux axes rectangulaires Ox *et* Oy : *cette parabole a son axe parallèle à l'axe des* y; *elle passe par l'origine et le point de l'axe des* x, *dont l'abscisse est* l; *enfin elle admet une ordonnée maxima égale à* f.

On donne, en outre, une droite passant par l'origine et par un point $A(x = l, y = h)$:

1° *Démontrer que si, pour une abscisse déterminée, on porte en ordonnée la somme algébrique de l'ordonnée de la droite et de celle de la parabole correspon-*

dant à cette abscisse, l'extrémité de cette ordonnée est sur une parabole (P) *égale à la première;*

2° *Démontrer que les axes des coniques qui passent par l'intersectiou d'un centre et d'une conique sont parallèles aux axes de celle-ci;*

3° *Une circonférence de cercle décrite sur* OA *comme diamètre coupant la parabole* (P) *en quatre points* O, A, B, C, *chercher le lieu du point d'intersection des sécantes communes* OA, BC *quand on fait varier* h, *et construire ce lieu qui n'est pas du second degré;*

4° *Chercher la valeur du rapport* $\frac{l}{f}$ *pour laquelle le cercle décrit sur* OA *comme diamètre est tangent à la parabole, quel que soit* h.

La parabole ayant son axe parallèle à l'axe des y, passant par l'origine et par le point de l'axe des x d'abscisse l, et ayant comme ordonnée maxima f, a pour équation

$$x^2 - lx + \frac{l^2}{4f}y = 0. \tag{1}$$

On a aussi pour l'équation de la droite OA

$$hx - ly = 0. \tag{2}$$

I. Les ordonnées de la parabole (1) et de la droite (2), correspondant à la même abscisse S, ont pour valeurs respectives

$$\frac{4fs(l-s)}{l^2} \quad \text{et} \quad \frac{hs}{l}.$$

De sorte que, si l'on pose

$$X = s,$$
$$Y = \frac{4fs(l-s)}{l^2} + \frac{hs}{l}$$

et si l'on élimine S entre ces deux dernières équations, on obtient pour celle de la parabole (P)

$$(3) \qquad X^2 - \frac{l}{4f}(4f + h)X + \frac{l^2}{4f}Y = 0.$$

Les équations des paraboles (1) et (3) ont même coefficient du terme en y. Il est facile de voir d'une manière générale que, pour la parabole dont l'équation est

$$(4) \qquad x^2 + Ax + By = 0,$$

le coefficient B est le double du paramètre de la parabole. En effet, soient (α, β) les coordonnées du foyer et $y - k = 0$ l'équation de la directrice de cette parabole. Son équation pourra s'écrire

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (y - k)^2$$

ou

$$(5) \qquad x^2 - 2\alpha x - 2(\beta - k)y + \alpha^2 + \beta^2 - k^2 = 0.$$

En identifiant (4) et (5), on obtient

$$2\alpha = -A, \qquad 2(k - \beta) = B, \qquad \alpha^2 + \beta^2 = k^2;$$

d'où l'on déduit les valeurs de α, β et k

$$\alpha = -\frac{A}{2}, \qquad \beta = \frac{A^2 - B^2}{4B}, \qquad k = \frac{A^2 + B^2}{4B}.$$

Or le paramètre p qui est la distance du foyer à la directrice a pour valeur

$$p = k - \beta = \frac{B}{2}.$$

Donc $B = 2p$, ce qui démontre bien que les paraboles (1) et (3) sont égales.

II. Soit, en général, une conique rapportée à son centre et à ses axes, dont l'équation est

$$(6) \qquad b^2x^2 \pm a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

et un cercle quelconque

$$x^2 + y^2 + Mx + Ny + P = 0. \tag{7}$$

L'équation générale d'une conique passant par les points d'intersection de ces deux courbes est

$$b^2x^2 \pm a^2y^2 - a^2b^2 + \rho(x^2 + y^2 + Mx + Ny - P) = 0. \tag{8}$$

Cette conique a bien ses axes parallèles à ceux de la conique (6).

En particulier, les droites d'intersection de (6) et (7) sont également inclinées sur les axes de (7), puisque les axes de deux droites sont leurs bissectrices.

III. Les droites BC et AO étant également inclinées sur l'axe de la parabole, l'équation de BC est de la forme

$$hx + ly + p = 0.$$

De sorte que l'équation générale des coniques passant par les points d'intersection de la parabole P avec les droites AO et BC est

$$fx^2 - l(4f + h)x - l^2y + \lambda(hx - ly)(hx - ly + \mu) = 0$$

ou

$$\left\{\begin{aligned} &x^2(4f - \lambda h^2) - \lambda l^2y^2 \\ &\quad - x[l(4f + h) - \mu h\lambda] - ly(l - \mu\lambda) = 0. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Le cercle décrit sur OA comme diamètre a pour équation

$$x^2 + y^2 - lx - hy = 0. \tag{10}$$

En identifiant (9) et (10), on obtient les relations

$$\frac{4f - \lambda h^2}{1} = \frac{-\lambda l^2}{1} = \frac{l(4f + h) + \mu h\lambda}{l} = \frac{l(\mu\lambda - l)}{h}.$$

Ces trois relations se réduisent à deux, l'une des trois rentrant dans les deux autres. On en déduit les valeurs de λ et μ

$$\lambda = -\frac{4f}{l^2 + h^2}, \qquad \mu = -\frac{l(l^2 + h^2 - 4fh)}{4f}.$$

L'équation de la droite BC est donc

$$(11) \qquad hx + ly = \frac{l(l^2 - h^2 + 4fh)}{4f}.$$

Pour avoir le lieu des points d'intersection de OA et BC, il faut éliminer h entre (2) et (11), ce qui donne pour l'équation de ce lieu

$$(12) \qquad 8fx^2y = l[l(x^2 + y^2) + 4fxy].$$

Cette courbe du troisième degré a une asymptote double parallèle à l'axe des y, rejetée à l'infini, et une asymptote parallèle à l'axe des x dont l'équation est

$$y = \frac{l^2}{8f}.$$

Lorsque $l < 2f$, la courbe passe par l'origine, qui est un point double réel; quand $l = 2f$, la courbe passe encore par l'origine qui est un point de rebroussement de seconde espèce. Enfin, si $l > 2f$, l'origine est un point isolé.

IV. Les tangentes à la parabole (3) en un point (ξ, η) a pour équation

$$x[8f\xi - l(4f + h)] + l^2y - l(4f + h)\xi + l^2\eta = 0.$$

Pour exprimer que la droite BC est tangente, il faut identifier cette dernière équation avec l'équation (11), ce qui donne

$$\frac{8f\xi - l(4f + h)}{4fh} = \frac{l}{4f} = \frac{(4f - h)\xi - l\eta}{l^2 + h^2 + 4fh};$$

d'où l'on déduit

$$(13)\qquad \xi = \frac{l(h-2f)}{4f}, \qquad \eta = \frac{1}{4f}(2fh + 8f^2 - l^2).$$

En éliminant h entre ces deux équations, on trouve pour le lieu des points (ξ, η) la droite

$$\eta = \frac{2f}{l}\xi + \frac{4f^2 - l^2}{4f}.$$

Voyons dans quel cas les coordonnées ξ et η satisfont à l'équation de la tangente, quel que soit h. En substituant les valeurs (13) dans l'équation

$$h\xi + l\eta = \frac{l(l^2 + h^2 + 4fh)}{4f},$$

on trouve

$$l = 2f.$$

Donc, si $\dfrac{l}{f} = 2$, le cercle décrit sur OA comme diamètre est tangent à la parabole, quel que soit h.