S. Mangeot

Surfaces de symétrie du troisième ordre d'une quadrique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 235-242
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__235_1>

SURFACES DE SYMÉTRIE DU TROISIÈME ORDRE D'UNE QUADRIQUE;

Par M. S. MANGEOT,
Docteur ès Sciences, professeur au lycée de Troyes.

Mes recherches sur les surfaces de symétrie d'une quadrique, c'est-à-dire sur les surfaces dont chaque normale, limitée à ses deux points de rencontre avec la quadrique, a son milieu au point d'incidence, m'ont conduit à une méthode générale pour la détermination de celles de ces surfaces qui sont algébriques.

Cette méthode a son point de départ dans les résultats suivants, que je me borne à énoncer.

I. Les surfaces de symétrie de la quadrique à centre unique

$$\text{(S)} \qquad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = \text{K},$$

rapportée à ses axes, sont toutes les surfaces dont l'équation est homogène par rapport aux trois quantités x^a, y^b, c^c (¹). Il suit de là que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation de la forme

$$(1) \qquad \Sigma\, \text{A}\, x^m y^n z^p = 0,$$

(¹) Les cônes sont les surfaces de symétrie des sphères

$$(a = b = c = 1).$$

En cherchant à généraliser ce résultat que les cônes ayant leur sommet à l'origine des coordonnées sont les enveloppes des plans $ux + vy + wz = 0$, on est conduit à ce théorème, qui se démontre facilement :

Toutes les surfaces de symetrie de la quadrique

$$\frac{x}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = \text{K},$$

rapportée à ses axes, sont les enveloppes des surfaces de symétrie particulières définies par l'équation $ux^a + vy^b + wz^c = 0$, *où* u, v, w *désignent des fonctions d'une même variable* t; *de plus les caractéristiques de ces enveloppes sont des lignes de symétrie de la quadrique (c'est-à-dire des courbes dont chaque plan normal coupe la quadrique suivant une conique ayant son centre au point d'incidence).*

où les exposants m, n, p, ... sont des nombres positifs quelconques, représente une surface de symétrie de cette quadrique, est que l'expression

$$D = \frac{m}{a} + \frac{n}{b} + \frac{p}{c}$$

ait une valeur constante pour tous les termes de l'équation.

Lorsque cette constante sera nulle, la surface sera orthopolaire de la quadrique, c'est-à-dire que les deux plans polaires d'un même point par rapport à la quadrique et à la surface seront rectangulaires, non seulement quand ce point se déplace sur la surface (condition qui suffit pour la symétrie), mais encore lorsqu'il occupe une position quelconque dans l'espace ([1]).

II. Si l'on égale à une constante le rapport de deux des trois quantités x^a, y^b, z^c, on obtient les équations de toutes les surfaces de symétrie de la quadrique (S) qui sont cylindriques.

III. Pour que la quadrique (S) admette des cônes de symétrie algébriques autres que les plans de symétrie, il faut et il suffit : 1° que la quadrique ne soit pas de révolution ; 2° que le rapport $\frac{c(a-b)}{a(b-c)}$, qui peut toujours

---

([1]) En interprétant la condition $D = \text{const.}$, on peut énoncer cette proposition :

Pour que l'équation (1) *représente une surface de symétrie de la quadrique* (S), *il faut et il suffit que les points qui ont pour coordonnées les trois exposants m, n, p de chaque terme soient situés dans un même plan parallèle au plan diamétral conjugue, par rapport à la quadrique, de l'axe du trièdre trirectangle* OXYZ. *Lorsque les points précédents sont dans ce plan diamétral lui-même, la surface est orthopolaire de la quadrique.*

être supposé positif, soit commensurable, et alors l'équation de ces cônes est

$$\alpha x^{N} z^{M} + \beta y^{M+N} = 0,$$

si l'on désigne par $\frac{M}{N}$ la fraction irréductible égale au rapport précédent, et par α, β deux constantes arbitraires. Tous ces cônes sont ainsi du même degré $M+N$.

IV. Pour que l'équation entière $\Sigma \varphi_r(x, y, z) = 0$, où $\varphi_r(x, y, z)$ désigne un polynôme entier et homogène en x, y, z, de degré r, représente une surface de symétrie de la quadrique (S), il est nécessaire et il suffit que chacune des surfaces $\varphi_r = 0$ soit elle-même une surface de symétrie de la quadrique, et que, en outre, le degré d'homogénéité D de chaque fonction φ_r, par rapport à x^a, y^b, z^c, soit le même pour tous les groupes φ_r.

Je vais indiquer brièvement la marche qui m'a conduit, en partant de là, aux diverses formes que doit avoir l'équation du troisième degré

$$F(x, y, z) = \varphi_3 + \varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_0 = 0$$

supposée indécomposable, pour qu'elle représente des surfaces de symétrie de la quadrique (S).

Je laisse de côté celles de ces surfaces qui sont des cylindres : leur détermination est immédiate (II). La fonction F renfermera donc les trois variables x, y, z.

Je cherche d'abord les surfaces de symétrie du troisième ordre qui ne sont pas des surfaces orthopolaires de la quadrique. La valeur constante de D étant différente de zéro, φ_0 doit être nul. Je distingue alors trois cas :

1° φ_3 *n'est pas décomposable en facteurs.*

L'équation $\varphi_3 = 0$ doit définir un cône de symétrie proprement dit, ce qui exige que l'un des nombres M, N soit égal à 1, l'autre égal à 2. On peut prendre $M = 1$, $N = 2$; la fonction φ_3 a la forme $\alpha x^2 z + \beta y^3$, et l'on doit avoir

$$\frac{3}{b} = \frac{2}{a} + \frac{1}{c}.$$

La condition d'invariabilité imposée à D ne permet pas de prendre plus d'un terme pour composer la somme $\varphi_2 + \varphi_1$ et fait connaître la forme que peut avoir ce terme, en même temps qu'une nouvelle relation à laquelle satisferont a, b, c.

2° φ_3 *est un produit de deux facteurs.*

L'un des deux facteurs, égalé à zéro, doit donner un plan de symétrie, et l'autre un véritable cône de symétrie. L'équation de ce cône étant $\alpha xz + \beta y^2 = 0$, on doit avoir

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}.$$

Comme précédemment, la fonction $\varphi_2 + \varphi_1$ renferme un seul terme, qui se détermine aisément.

3° φ_3 *est un produit de trois facteurs.*

Si la quadrique n'est pas de révolution, φ_3 ne comprend qu'un seul terme, et, en remarquant que φ_1 n'en peut renfermer plus d'un, on a à examiner les trois hypothèses où le nombre des termes de φ_2 est égal à 2, 1 ou 0. On reconnaît sans difficulté quelles sont les associations de termes qui peuvent réaliser l'invariabilité de D.

Lorsque la quadrique est de révolution ($a = b$), en partant successivement des diverses valeurs que l'on peut prendre pour φ_1, à savoir $\alpha x + \beta y$, αz ou 0, on en déduit, toujours par la considération de D, la forme qui convient à φ_2, puis à φ_3.

En effectuant les calculs dont je viens de donner l'indication, voici les diverses formes que l'on trouve pour la fonction F. J'ai placé, en regard de chacune d'elles, la condition ou les conditions à imposer aux axes de la quadrique (S).

Formes de la fonction $F(x, y, z)$.	Relations entre a, b, c.
$\alpha y^3 + \beta x^2 z + \gamma z^2$	$3a = 4b = 6c$
$\alpha y^3 + \beta x^2 z + \gamma yz$	$a = 2b = 4c$
$\alpha y^3 + \beta x^2 z + \gamma xy$	$2a = b = -c$
$\alpha y^3 + \beta x^2 z + \gamma x$	$3a = b = -3c$
$\alpha x^2 z + \beta xy^2 + \gamma z^2$	$2a = 3b = 4c$
$\alpha x^2 z + \beta xy^2 + \gamma yz$	$a = 2b = 3c$
$\alpha x^2 z + \beta xy^2 + \gamma y$	$a = -b = -3c$
$\alpha y^3 + \beta xyz + \gamma x^2$	$3a = 2b = c$
$\alpha y^3 + \beta xyz + \gamma z$	$a = -b = -3c$
$\alpha x^3 + \beta y^2 + \gamma xz$	$2a = 3b = 4c$
$\alpha x^2 y + \beta y^2 + \gamma xz$	$a = 2b = 3c$
$\alpha z^3 + \beta x^2 + \gamma y$	$3a = 6b = 2c$
$\alpha z^2 x + \beta x^2 + \gamma y$	$2a = 4b = c$
$\alpha y^2 z + \beta x^2 + \gamma y$	$a = 2b = -2c$
$\alpha xyz + \beta x^2 + \gamma y$	$a = 2b = -c$
$\alpha y^3 + \beta yz + \gamma x$	$3a = b = 2c$
$\alpha x^2 y + \beta yz + \gamma x$	$a = -b = 2c$
$\alpha x^2 z + \beta x + \gamma y$	$a = b = -c$
$\alpha xyz + \beta x + \gamma y$	$a = b = -c$
$\alpha z^3 + \beta x^2 + \gamma y^2$	$3a = 3b = 2c$
$\alpha z^2 x + \beta x^2 + \gamma y^2$	$2a = 2b = c$
$\alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma xy^2 + \delta y^3 + \varepsilon z$ ...	$a = b = 3c$
$\alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma xy^2 + \delta y^3 + \varepsilon z^2$ ...	$2a = 2b = 3c$
$\alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma xy^2 + \delta y^3 + \varepsilon xz$ ..	$a = b = 2c$
$\alpha x^3 + \beta yz$	$\frac{3}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$
$\alpha y^2 z + \beta x^2$	$\frac{2}{a} = \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$
$\alpha y^2 z + \beta x$	$\frac{1}{a} = \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$

On peut former, inversement, au moyen du Tableau qui précède, les équations des seules quadriques à centre unique qui admettent des surfaces de symétrie du troisième ordre non orthopolaires de la quadrique et autres que des cylindres. Je crois bon de les inscrire dans un second Tableau, en faisant suivre l'équation de chaque quadrique du nombre de classes de ces surfaces de symétrie correspondant à la quadrique.

Voici ce Tableau :

Quadriques qui ne sont pas de révolution.		Quadriques qui sont de révolution.	
$x^2 - 2y^2 + 3z^2 = d \ldots$	4	$x^2 - y^2 - z^2 = d \ldots$	2
$x^2 - y^2 + 2z^2 = d \ldots$	3	$x^2 + y^2 - 2z^2 = d \ldots$	1
$x^2 - 2y^2 + 4z^2 = d \ldots$	2	$x^2 + y^2 - 3z^2 = d \ldots$	1
$2x^2 - 3y^2 - 4z^2 = d \ldots$	2	$2x^2 + 2y^2 - z^2 = d \ldots$	1
$x^2 - y^2 + 3z^2 = d \ldots$	2	$2x^2 - 2y^2 + 3z^2 = d \ldots$	1
$6x^2 - 3y^2 + 2z^2 = d \ldots$	1	$3x^2 + 3y^2 + z^2 = d \ldots$	1
$6x^2 + 4y^2 + 3z^2 = d \ldots$	1	$3x^2 + 3y^2 + 2z^2 = d \ldots$	1
$2x^2 - 2y^2 + z^2 = d \ldots$	1		
$3x^2 - 3y^2 + z^2 = d \ldots$	1		

A ces quadriques, dans lesquelles les rapports des axes sont déterminés, il faut ajouter encore trois familles de quadriques comprenant chacune des quadriques symétriques par rapport à une seule classe de surfaces du troisième ordre, représentée par une équation binôme.

Il reste maintenant à calculer les formes de la fonction $F(x, y, z)$ qui correspondent aux surfaces de symétrie orthopolaires de la quadrique (S). Ici la valeur constante de D doit être zéro : la quadrique ne peut être que du genre hyperboloïde. La somme $\varphi_3 + \varphi_2$ est divisible par l'une des variables, et le groupe φ_1 n'existe pas. La fonction φ_2 ne peut comprendre plus d'un terme. S'il existe, φ_3 n'est composé également que d'un seul terme. Lorsque φ_2 fait défaut, φ_3 renferme au plus deux termes.

Le Tableau qui suit fait connaître les résultats de ces calculs. Les rapports mutuels des axes de la quadrique sont déterminés, sauf dans un cas. En regard de l'équation de chaque quadrique, se trouve celle des surfaces orthopolaires qui lui correspondent.

$x^2 + y^2 - 2z^2 = d$	$\alpha x^2 z + \beta y^2 z + \gamma = 0$
$2x^2 + 2y^2 - z^2 = d$	$\alpha x z^2 + \beta y z^2 + \gamma = 0$
$x^2 + 2y^2 - 2z^2 = d$	$\alpha x^2 z + \beta y z + \gamma = 0$
$2x^2 + y^2 - z^2 = d$	$\alpha x z^2 + \beta y z + \gamma = 0$
$x^2 + 4y^2 - 2z^2 = d$	$\alpha x^2 z - \beta y z^2 + \gamma = 0$
$\lambda(x^2 - z^2) + \mu(y^2 - z^2) = d$	$xyz + \gamma = 0$

En examinant les résultats inscrits dans les Tableaux précédents ([1]), on est conduit à cette remarque :

Quand un cône du second ordre admet une surface orthopolaire du troisième ordre qui n'est surface orthopolaire d'aucun autre cône du second degré, son cône supplémentaire admet également des surfaces orthopolaires du troisième ordre, et plus généralement, si un cône du deuxième degré est symétrique par rapport à une surface du troisième ordre sans que celle-ci soit surface de symétrie d'un autre cône du deuxième degré, son cône supplémentaire est lui-même symétrique par rapport à une infinité de surfaces du troisième degré.

([1]) Les lettres grecques qui figurent dans ces Tableaux, ainsi que la lettre d, désignent des constantes arbitraires.