Nouvelles annales de mathématiques

Barisien

Concours d'admission à l'École centrale en 1889

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 228-235

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__228_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1889.

SOLUTIONS PAR M. LE CAPITAINE BARISIEN.

PREMIÈRE SESSION.

Soient Ox, Oy *deux axes rectangulaires et une droite* LL' *parallèle à* Oy *dont l'équation est* $x - a = 0$. *On considère le faisceau des paraboles qui passent par le point* O *et qui ont la droite* LL' *pour directrice.*

1° *Trouver le lieu du foyer et le lieu du sommet de chacune de ces paraboles;*

2° *Par un point quelconque du plan* xOy *passent deux des paraboles considérées, réelles ou imaginaires, déterminer la région du plan dans laquelle doit être ce point pour que les deux paraboles soient réelles.*

3° *Étant données les coordonnées d'un point* M *du plan* xOy, *former l'équation qui a pour racines les coefficients angulaires des tangentes au point* O *aux deux paraboles du faisceau considéré qui passent par ce point* M. *En déduire l'équation de la ligne* S *sur laquelle doit se trouver le point* M *pour que les tangentes au point* O *aux deux paraboles du faisceau qui passent au point* M *soient rectangulaires.*

4° *Soit* M *un point situé sur la ligne* S, *et soient* F, F′ *les foyers des deux paraboles du faisceau considéré qui passent par ce point, démontrer que, lorsque le point* M *se déplace sur la ligne* S, *la droite* FF′ *tourne autour d'un point fixe.*

I. Si α, β sont les coordonnées du foyer de la parabole, ayant pour directrice la droite hh', son équation est

$$(1) \qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(x-a)^2,$$

avec la condition

$$(2) \qquad \alpha^2-\beta^2=a^2,$$

qui exprime que la parabole passe par le point O.

Cette condition (2) exprime aussi que le lieu des foyers des paraboles (1) est le cercle de centre O et de rayon a.

L'équation de l'axe étant

$$(3) \qquad y=\beta,$$

pour avoir le lieu du sommet des paraboles, il faut éliminer α et β entre les équations (1), (2) et (3). (1) devient, en tenant compte de (3),

$$(x-\alpha)=-(x-a),$$

d'où

$$\alpha=2x-a;$$

(2) devient alors

$$(2x-a)^2+y^2=a^2$$

ou

$$4x^2+y^2-4ax=0.$$

C'est une ellipse dont le centre est le milieu de OA. OA est le petit axe de longueur a : son grand axe est de grandeur $2a$.

II. Par un point (p, q) du plan passent deux paraboles déterminées par la valeur de α et β provenant des deux équations

$$\left\{\begin{array}{l}(p-\alpha)^2+(q-\beta)^2=(p-a)^2,\\ \alpha^2+\beta^2=a^2.\end{array}\right.$$

En formant l'équation en α, on trouve

$$4\alpha^2(p^2+q^2)-4\alpha p(q^2+2ap)+(q^2+2ap)^2-4a^2q^2=0.$$

La condition pour que les deux valeurs de α soient réelles se réduit à

$$q^2+4ap-4a^2<0,$$

ce qui indique que, si le point (p, q) est à l'intérieur de la parabole,

$$(4) \qquad y^2+4ax-4a^2=0,$$

les deux paraboles passant par ce point sont réelles. Elles se confondent si le point (p, q) est sur la parabole (4), et elles sont imaginaires si ce point est à l'extérieur de la parabole.

III. La tangente à l'origine de la parabole (1) ayant pour équation

$$(\alpha-a)n+\beta y=0;$$

son coefficient angulaire est

$$(5) \qquad p=\frac{a-\alpha}{\beta}.$$

En éliminant α et β entre cette équation (5) et les deux suivantes

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha^2+\beta^2=a^2,\\ q^2=2(\alpha-a)p+2\beta q,\end{array}\right.$$

on forme sans aucune difficulté l'équation en p

$$(6) \qquad p^2(q^2+4ap)-4aqp+q^2=0.$$

qui donne les coefficients angulaires des tangentes au point O des deux paraboles du faisceau qui passent par le point (p, q).

Si ces deux tangentes sont rectangulaires, on doit avoir $p'p'' = -1$, c'est-à-dire

$$q^2 + 2ap = 0.$$

La ligne S de l'énoncé est donc une parabole.

IV. Avec la condition

$$q^2 = -2ap.$$

la relation

$$q^2 = 2(\alpha - a)p + 2\beta q$$

se réduit à

$$\alpha p + \beta q = 0,$$

et comme

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^2,$$

on en déduit

$$\alpha = \frac{aq}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad \beta = -\frac{ap}{\sqrt{p^2+q^2}},$$

pour les coordonnées du foyer F. Celles du foyer F′ sont

$$\alpha' = -\frac{aq}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad \beta' = \frac{ap}{\sqrt{p^2+q^2}}.$$

L'équation de la droite FF′ est par suite

$$y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha)$$

et se réduit à

$$y = -\frac{px}{q}.$$

La droite FF′ tourne donc autour du point fixe O.

SECONDE SESSION.

1. *Démontrer que les coniques représentées par l'équation*

$$(A) \qquad (1-m^2)x^2+y^2+2mrx-r^2=0,$$

où l'on suppose m variable, ont deux points communs, et que, si les axes de coordonnées sont rectangulaires, elles ont en outre un foyer commun.

2. *Trouver l'équation* (B) *de la conique assujettie aux conditions suivantes : passer par l'origine, être tangente à une des coniques représentées par* (A) *en un point* $P(x, y)$, *pris sur cette courbe, et enfin passer par les deux projections du point* P *sur les axes de coordonnées.*

3. *Trouver le lieu des points de contact avec les courbes, représentées par* A, *des tangentes issues d'un point*

$$x=0, \qquad y=h$$

de l'axe des y, lorsqu'on fait varier m.

4. *Trouver le lieu des centres des courbes* (B) *correspondant à une courbe fixe* A *quand on fait varier la position du point* P *sur cette courbe.*

5. *Discuter l'équation* (B) *en supposant que l'on déplace le point* P *sur une des courbes représentées par l'équation* (A); *séparer les parties qui répondent à des ellipses de celles qui répondent à des hyperboles, et trouver le lieu des points de séparation lorsqu'on fait varier m.*

1. L'équation (A) pouvant s'écrire

$$(A) \qquad x^2+y^2=(mx-r)^2$$

n'est autre que l'équation générale des coniques ayant pour foyer l'origine et passant par deux points de l'axe des y équidistants de l'origine de la quantité r (on suppose les axes rectangulaires).

II. L'équation générale des coniques passant par l'origine, le point P et les projections de ce point sur les axes de coordonnées peut s'écrire

$$(1)\qquad Ax^2 + Cy^2 - Axx' - Cyy' = 0.$$

La tangente au point $(x'y')$ de cette courbe a pour équation

$$(2)\qquad Axx'Cyy' - Ax'^2 - Cy'^2 = 0.$$

La tangente au même point $(x'y')$ de la conique (A) a pour équation

$$(3)\qquad x[x'(1-m^2)+mr] + yy' + r(mx'-r) = 0.$$

En identifiant ces deux équations, on trouve

$$\frac{Ax'}{x'(1-m^2)+mr} = \frac{C}{1} = -\frac{(Ax'^2+Cy'^2)}{r(mx'-r)};$$

d'où

$$\frac{A}{C} = \frac{x'(1-m^2)+mr}{x'}.$$

En portant la valeur de ce rapport dans (1), l'équation de la conique (B) a pour expression

$$(B)\qquad (x^2-xx')[x'(1-m^2)\div mr] + x'(y^2-yy') = 0.$$

III. En faisant $x = 0$, $y = h$ dans (3), cette équation devient

$$(4)\qquad y'h + r(mx'-r) = 0.$$

On a de plus

$$(5)\qquad x'^2 + y'^2 = (mx'-r)^2.$$

En éliminant m ou plutôt $(mx'-r)$, entre (4) et (5), on a

$$y' = \pm x' \frac{r}{\sqrt{h^2 - r^2}}.$$

Le lieu des points de contact se compose de deux droites passant par l'origine et également inclinées sur les axes. Les deux droites ne sont réelles que si $h > r$.

IV. Les coordonnées du centre des courbes (B) sont

$$x = \frac{x'}{2}, \qquad y = \frac{y'}{2}.$$

De sorte qu'en éliminant x' et y' entre ces deux équations et la relation (5), on trouve pour le lieu des centres l'équation

$$(6) \qquad 4(x'+y^2) = (2mx - r)^2 :$$

c'est une conique homofocale de la conique (A).

V. Pour que la conique (B) soit une ellipse, il faut que

$$x'[x'(1-m^2) -- mr] > 0.$$

Si donc le point (x', y') se trouve situé sur l'arc de la conique (A) limité par les points d'intersection de la conique avec les droites

$$(7) \qquad \begin{cases} x = 0, \\ x = \dfrac{mr}{m^2 - 1}, \end{cases}$$

les coniques (B) seront des hyperboles. Sur tout le reste de l'arc d'ellipse, les coniques (B) seront des hyperboles. Aux points d'intersection, les coniques (B) seront des paraboles.

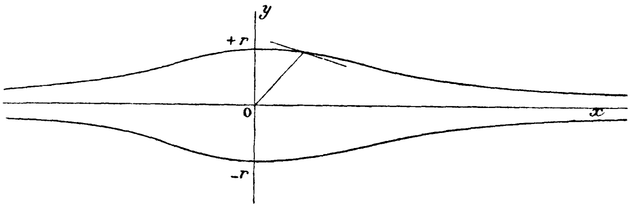
Pour $x = 0$, on trouve comme points d'intersection les deux points par lesquels passent les coniques (A).

Pour $x = \frac{mr}{m^2 - 1}$, on trouve, en substituant dans (A),

$$y^2 = \frac{r^2}{1 - m^2}.$$

En éliminant m entre ces deux valeurs de x et y, on trouve pour le lieu des points de séparation

$$y^4 = r^2(x^2 + y^2).$$



C'est une courbe ayant pour asymptote l'axe des x. Son équation en coordonnées polaires étant

$$\rho = \frac{r}{\sin^2 \omega},$$

on trouve que les points d'inflexion correspondent à

$$\tang \omega = \sqrt{2}$$

et, par suite, à

$$\rho = \frac{3r}{2}.$$