NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

V. JAMET

Sur le nombre *e*

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 215-218

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__215_1>

SUR LE NOMBRE e;

PAR M. V. JAMET.

Je me propose d'apporter une simplification notable à la méthode créée par M. Hermite pour démontrer que le nombre e n'est racine d'aucune équation algébrique, à coefficients entiers (*Sur la fonction exponentielle*, Paris, Gauthier-Villars, 1874).

Résumons d'abord les considérations fondamentales. Si $F(z)$ désigne un polynôme entier, de degré m, l'intégration par parties donne l'identité

$$e^a \int_0^a e^{-z} F(z)\,dz = [F(0) + F'(0) + \ldots + F^{(m)}(0)]\,e^a \\ - [F(a) + F'(a) + \ldots + F^{(m)}(a)],$$

ou bien, en faisant, pour abréger,

$$F(z) + F'(z) + F''(z) + \ldots + F^{(m)}(z) = \Phi(z),$$

$$(1) \qquad e^a \int_0^a e^{-z} F(z)\,dz = \Phi(0)\,e^a - \Phi(a).$$

D'ailleurs, en supposant vraie l'égalité

$$(2) \qquad N_0 + N_1 e + N_2 e^2 + \ldots + N_p e^p = 0,$$

si, dans l'égalité (1), on remplace a successivement par 1, 2, 3, ..., p, et si l'on combine les égalités obtenues avec l'égalité (2), on trouvera

$$(3) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{a=1}^{a=p} N_a e^a \int_0^a e^{-z} F(z)\,dz \\ \quad = -[N_0 \Phi(0) + N_1 \Phi(1) + N_2 \Phi(2) + \ldots + N_p \Phi_{(p)}]. \end{cases}$$

Si les coefficients du polynôme $F(z)$ sont entiers, ainsi que les coefficients N, le second membre de cette égalité sera un nombre entier : ce nombre sera divisible par 1, 2, 3, 4, ..., n, si l'on fait

$$F(z) = z^n (z-1)^n (z-2)^n \ldots (z-p)^n (\alpha - z)(\beta - z)\ldots(\lambda - z),$$

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ désignant quelques-uns des nombres 1, 2, 3, ..., $p-1$, écrits par ordre de grandeur croissante; c'est dans le choix de ces nombres que réside la simplification annoncée. Divisons, en effet, les deux nombres de l'égalité (3) par $1, 2, 3, \ldots, n$. Nous trouvons un nombre entier, égal à

$$(4)\qquad \frac{1}{1.2.3.4\ldots n}\sum_{a=1}^{a=p} N_a e^a \int_0^a e^{-z} F(z)\,dz.$$

Je dis qu'on peut choisir les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$, de telle sorte que cette expression soit différente de zéro, mais inférieure (numériquement) à un nombre donné ε, si petit qu'il soit. En effet, décomposons chacune des intégrales qui figurent dans l'expression ci-dessus en une somme de termes, tels que

$$\int_0^1 e^{-z} F(z)\,dz + \int_0^2 e^{-z} F(z)\,dz + \int_0^3 e^{-z} F(z)\,dz + \ldots + \int_{a-1}^a e^{-z} F(z)\,dz$$

Nous voyons alors que la somme qui entre dans cette même expression est une fonction linéaire, homogène, des intégrales, calculées de zéro à 1, de 1 à 2, de 2 à 3, ..., et finalement de $p-1$ à p; en outre, l'un, au moins, des coefficients de cette fonction n'est pas nul : c'est celui de l'intégrale prise de $p-1$ à p; en effet, il se réduit à $N_p e^p$. Je dis qu'on peut choisir des nombres α, $\beta, \gamma, \ldots, \lambda$, de telle sorte que tous les termes de cette fonction linéaire aient le même signe. En effet, considérons l'expression

$$A\int_0^1 e^{-z} F(z)\,dz + B\int_1^2 e^{-z} F(z)\,dz + C\int_0^3 e^{-z} F(z)\,dz + \ldots$$

égale à la somme que nous voulons étudier, ou bien égale et de signe contraire à cette somme, de manière que le premier de ses coefficients soit positif; soient q la limite supérieure de l'intégrale qui termine le premier groupe de termes à coefficients positifs, r la limite supérieure de l'intégrale qui termine le premier groupe de termes à coefficients négatifs, s la limite supérieure de l'intégrale qui entre dans le terme final du deuxième groupe de termes à coefficients positifs, et ainsi de suite. Chacune des intégrales de la somme précédente aura le même signe que son coefficient, si nous faisons n pair, et

$$\alpha = q, \qquad \beta = r, \qquad \gamma = s, \qquad \ldots, \qquad \lambda = v,$$

v désignant la limite supérieure de l'intégrale qui termine l'avant-dernier groupe. De cette manière, on est assuré que l'expression (4) n'est nulle pour aucune des valeurs paires de n, et cela suffit pour mener la démonstration à bonne fin.

En effet, quand z varie de zéro à p, les produits

$$(\alpha - z)(\beta - z)\ldots(\lambda - z)$$

et

$$z(z-1)(z-2)\ldots(z-p)$$

restent numériquement inférieurs, le premier à un nombre μ, le deuxième à un nombre ν, indépendants, l'un et l'autre, de n, et si l'on appelle H la plus grande valeur numérique des coefficients A, B, C, ..., on voit que l'expression (4) est numériquement inférieure à

$$p\mathrm{H}\mu\frac{\nu^n}{1.2.3\ldots n};$$

or, cette dernière expression tend vers zéro, quand n est de plus en plus grand. C. Q. F. D. (1).

(1) On pourra consulter aussi sur une simplification de la méthode de M. Hermite une Note de M. Stieltjes (*Comptes rendus*, 1890).