

BARISIEN

Concours d'admission à l'École normale supérieure en 1889. Solution de la question d'algèbre

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 10 (1891), p. 212-215

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__212_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

**CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
EN 1889.**

SOLUTION DE LA QUESTION D'ALGÈBRE;

PAR M. LE CAPITAINE BARISIEN.

Déterminer un polynôme entier en x du septième degré $f(x)$, sachant que $f(x) + 1$ est divisible par $(x - 1)^4$ et $f(x) - 1$ par $f(x + 1)^4$. Quel est le nombre des racines réelles de l'équation $f(x) = 0$?

D'après l'énoncé, il faut que l'on ait

$$\frac{f(x) + 1}{(x - 1)^4} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

$$\frac{f(x) - 1}{(x + 1)^4} = A'x^3 + B'x^2 + C'x + D',$$

avec

$$f(x) = ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + ex^3 + fx^2 + gx + h.$$

En remarquant, de suite, que $A = A' = a$, il faut identifier les termes des deux équations

$$\begin{aligned} ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + ex^3 + fx^2 + gx + h - 1 \\ = (x - 1)^4(ax^3 + Bx^2 + Cx + D), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + ex^3 + fx^2 + gx + h - 1 \\ = (x + 1)^4(ax^3 + B'x^2 + C'x + D'). \end{aligned}$$

On obtient de la sorte le système d'équations

$$\begin{array}{rcl}
 B - 4a = b, & & B' + 4a = b, \\
 C - 4B + 6a = c, & & C' + 4B' + 6a = c, \\
 D - 4C + 6B - 4a = d, & & D' + 4C' + 6B' + 4a = d, \\
 -4D + 6C - 4B + a = e, & & 4D' + C' + 4B' + a = e, \\
 6D - 4C + B = f, & & 6D' + 4C' + B' = f, \\
 C - 4D = g, & & C' + 4D' = g, \\
 D = h + 1; & & D' = h - 1.
 \end{array}$$

On a ainsi quatorze équations du premier degré entre quatorze inconnues $a, b, c, d, e, f, g, h, B, C, D, B', C', D'$. En éliminant les majuscules dans chacun des deux groupes, on obtient les huit équations

$$\begin{array}{ll}
 (1) & -35a - 20b - 10c - 4d = e, \\
 (2) & 84a + 45b + 20c + 6d = f, \\
 (3) & 20a + 10b + 4c + d = h + 1, \\
 (4) & -70a - 36b - 15c - 4d = g; \\
 (5) & -35a + 20b - 10c + 4d = e, \\
 (6) & -84a + 45b - 20c + 6d = f, \\
 (7) & -20a + 10b - 4c + d = h - 1, \\
 (8) & -70a + 36b - 15c + 4d = g.
 \end{array}$$

Ajoutons et retranchons les équations telles que (1) et (5), nous aurons le système suivant

$$\begin{array}{rcl}
 35a + 10c + e = 0, & 5b + d & = 0; \\
 45b + 6d - f = 0, & 21a + 5c & = 0; \\
 10b + d - h = 0, & 20a + 4c - 1 & = 0; \\
 70a + 15c + g = 0, & 9b + d & = 0;
 \end{array}$$

d'où l'on déduit sans difficulté

$$\begin{array}{rcl}
 b = 0, & d = 0, & f = 0, & h = 0, \\
 a = +\frac{5}{16}, & c = -\frac{21}{16}, & e = \frac{35}{16}, & g = -\frac{35}{16}.
 \end{array}$$

On a donc pour le polynôme demandé

$$f(x) = \frac{5x^7 - 21x^5 + 35x^3 - 35x}{16} \\ = \frac{x}{16} (5x^6 - 21x^4 + 35x^2 - 35).$$

En posant $x^2 = z$, la quantité entre parenthèses devient

$$(5z^3 - 21z^2 - 35z - 35)$$

et ne s'annule que pour la valeur positive $z = 2,526, \dots$: les deux autres racines en z sont imaginaires.

Donc, en définitive, l'équation du septième degré en x , $f(x)$ a une racine nulle, deux racines égales et de signe contraire, $\pm 0,0159$ et quatre racines imaginaires.

N. B. -- Voici, sans sortir du domaine de l'Algebre élémentaire, une solution plus simple.

Les expressions

$$(1) \quad \frac{f(x)-1}{(x-1)^4}, \quad \frac{f(x)-1}{(x+1)^4}$$

étant, par hypothèse, des polynômes entiers du troisième degré par rapport à x , il en est de même des expressions

$$\frac{f(x)-f(-x)}{(x-1)^4}, \quad \frac{f(x)+f(-x)}{(x+1)^4},$$

que l'on obtient en ajoutant à chacune des quantités (1) l'autre dans laquelle on a préalablement changé x en $-x$. Le polynôme $f(x) + f(-x)$, qui est du sixième degré au plus, devant d'après cela être divisible par $(x-1)^4(x+1)^4 = (x^2-1)^4$, est identiquement nul; en d'autres termes, $f(x)$ ne saurait renfermer aucun terme de degré pair, et l'on a

$$\lambda f(x) = x^7 + px^5 + qx^3 + rx.$$

En divisant alors $\lambda[f(x)-1]$ par $(x-1)^4$ et observant que le dernier terme de ce quotient doit être égal à $-\lambda$, on

trouve

$$f(x) = 1 + \frac{(x+1)^4}{\lambda} \left[x^3 - 4x^2 + \left(5 + \frac{\lambda}{4} \right) x - \lambda \right],$$

où il faut faire λ égal à $\frac{16}{5}$ pour que la condition $f(1) + 1 = 0$ soit satisfaite.

Mais la solution la plus élégante est sans contredit la suivante, qui repose sur l'emploi des dérivées et qui m'a été communiquée par M. Brisse :

$f(x) + 1$ étant divisible par $(x-1)^4$ et $f(x) - 1$ par $(x+1)^4$, leur dérivée commune $f'(x)$ est divisible par $(x-1)^3(x+1)^3$, puisque $x-1$ et $x+1$ sont premiers entre eux, et l'on a

$$f'(x) = \lambda(x^2 - 1)^3,$$

λ étant une constante, puisque $f'(x)$ est du sixième degré; d'où

$$f(x) = \lambda \left(\frac{x^7}{7} - \frac{3x^5}{5} - x^3 - x \right) + \mu.$$

On détermine λ et μ par les équations $f(1) = -1$, $f(-1) = 1$. D'après l'expression de $f'(x)$ et les signes de $f(1)$ et $f(-1)$, les racines sont séparées.

E. R.