GENTY

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1889). Solution de la question de mathématiques spéciales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 204-208

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__204_0>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1889).
SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHEMATIQUES SPECIALES;

PAR M. GENTY.

On donne un cône du second degré C *et deux quadriques* A, A′, *inscrites dans ce cône; on considère une quadrique variable* S *inscrite dans le même cône et touchant les quadriques données* A *et* A′ *en des points variables* α *et* α' :

1° *Démontrer que la droite* $\alpha\alpha'$ *passe par un point fixe;*

2° *Trouver le lieu de la droite d'intersection des plans tangents à la surface* S *aux points* α *et* α';

3° *Démontrer que le lieu du pôle d'un plan fixe* P *par rapport à la surface* S *se compose de deux quadriques bitangentes;*

4° *Trouver le lieu de la droite qui passe par les points de contact de ces deux quadriques, lorsque le plan* P *se déplace, en restant parallèle à un plan tangent au cône* C.

I. Deux quadriques (A) et (A′) inscrites dans un cône du second degré (C) sont inscrites dans un second cône (C′) et elles se coupent suivant deux coniques; les plans (Q) et (Q′) de ces courbes et les plans des courbes de contact avec l'un ou l'autre des cônes circonscrits se coupent suivant une même droite et forment un faisceau harmonique.

II. Les surfaces (A) et (A′) sont homologiques de quatre manières différentes : on peut prendre pour centre d'homologie l'un ou l'autre des sommets O et O′ des cônes (C) et (C′) et pour plan d'homologie l'un ou l'autre des plans (Q) et (Q′).

Cela résulte immédiatement des propriétés bien connues des ombilics et des cordes communes des coniques.

III. Si nous considérons trois quadriques (A), (A′) et (A″) inscrites dans le cône (C), les centres d'homologie de ces quadriques prises deux à deux (autres que le point O) sont situés sur une ligne droite que nous appellerons *axe d'homologie des trois quadriques.*

Les équations tangentielles de ces trois surfaces pouvant se mettre sous la forme

$$\sigma - \lambda\mu = 0, \qquad \sigma - \lambda\nu = 0, \qquad \sigma - \lambda\rho = 0,$$

l'axe d'homologie est représenté par les équations

$$\mu = \nu = \rho.$$

Le théorème reste vrai si l'une des quadriques est remplacée par un plan (P). La conique, suivant laquelle ce plan coupe le cône (C), peut, en effet, être considérée comme une quadrique infiniment aplatie inscrite dans ce cône. Le centre d'homologie de la quadrique (A) et du plan (P) est alors le sommet d'un cône circonscrit à (A) et contenant la conique en question.

IV. Les plans des courbes d'intersection deux à deux des quadriques (A), (A′) et (A″) passent trois à trois par une même droite.

Les équations ponctuelles de ces trois quadriques étant

$$S + l^2 = 0, \qquad S + m^2 = 0, \qquad S + n^2 = 0,$$

les plans des courbes d'intersection de ces surfaces deux à deux passent trois par trois par l'une ou l'autre des quatre droites représentées par les équations

$$l \pm m \pm n = 0.$$

V. Le théorème II, le théorème IV et sa réciproque, qui est évidente, conduisent immédiatement au corollaire suivant :

Si une quadrique (S) inscrite dans le cône (C) touche (A) et (A′) aux points α et α' respectivement, les plans tangents en α et α' se coupent sur l'un ou l'autre des plans (Q) et (Q′) et la droite $\alpha\alpha'$ passe par le centre d'homologie O′.

VI. Les quadriques (S) inscrites dans le cône (C) et tangentes à (A) et (A′) forment ainsi deux séries, l'une qui correspond au plan (Q) et l'autre au plan (Q′). Je dis que le lieu des pôles d'un plan (P) par rapport aux quadriques (S) d'une même série (Q) est une quadrique.

L'intersection du lieu en question avec le plan (P) est la courbe (p), lieu des points de contact avec ce plan des quadriques (S) de la série considérée qui lui sont tangentes.

Soit (a) la courbe de contact de ces mêmes quadriques avec (A); les courbes (a) et (p) sont situées sur un même cône ayant pour sommet le centre d'homologie O″ de la quadrique (A) et du plan (P).

Or les théorèmes qui précèdent conduisent très simplement à la construction suivante de la conique (a) (Rouché et de Comberousse, *Traité de Géométrie*, § 932 et 933). Le plan (Q) coupe le plan (P) suivant une droite (q); cette droite et la polaire réciproque par rapport à (A) de l'axe d'homologie O′O″ déterminent un plan qui coupe cette quadrique suivant la courbe cherchée (a), qui est ainsi une conique. La courbe (p) est donc aussi une conique.

En remplaçant le plan (Q) par le plan (Q′), on obtiendrait de même les coniques (a') et (p'), lieux des points de contact des quadriques (S) de la série (Q′) avec la quadrique (A) et le plan (P).

Donc, en résumé, le lieu des pôles du plan (P), par rapport aux quadriques (S), se compose de deux quadriques (Σ) et (Σ') : je dis que ces deux surfaces sont doublement tangentes.

En effet, les coniques (a) et (a') ont deux points communs L et M et les plans tangents en ces points à la quadrique (A) contiennent le point O''. Donc les coniques (p) et (p') se touchent aux deux points L_1 et M_1, où les droites $O''L$ et $O''M$ percent le plan (P). La droite L_1M_1 passe d'ailleurs au point d'intersection K des droites (q) et (q').

D'autre part, les quadriques (Σ) et (Σ') ont une courbe commune qu'il est facile de déterminer : c'est le lieu des pôles du plan (P) par rapport aux coniques (γ) suivant lesquelles les plans tangents au cône (C′) coupent le cône (C). Ces coniques peuvent, en effet, être considérées comme des quadriques infiniment aplaties inscrites dans le cône (C) et tangentes à (A) et (A′), et il est évident qu'elles appartiennent à la fois aux deux séries des quadriques (S). La courbe commune passe, d'ailleurs, par les points L_1 et M_1 qui sont les points de contact avec le plan (P) de deux coniques (γ). Donc, enfin, les quadriques (Σ) et (Σ') se touchent en ces deux points.

Supposons, enfin, que le plan (P) tourne autour d'une droite (T) tangente au cône (C) en un point B. La droite L_1M_1 décrit une surface réglée qui a pour directrices rectilignes la tangente (T) et la droite d'intersection (I) des plans (Q) et (Q'); je dis que ces deux directrices sont divisées homographiquement par les points R et K où une génératrice les rencontre.

Soit, en effet, D le point de contact du plan tangent mené par la droite (T) à la quadrique (A). Le centre d'homologie O'' reste évidemment sur la droite BD; donc l'axe d'homologie O'O'' reste dans un plan fixe et sa polaire par rapport à (A) passe par un point fixe M, qui est visiblement situé sur une tangente à la quadrique (A) au point D; la droite O''M rencontre (T) au point R.

Au point R ne correspond évidemment qu'un seul point K, et réciproquement; donc, enfin, la droite RK décrit une quadrique (A).

Dans le cas particulier du problème, la directrice (T) est située à l'infini, et, par suite, la quadrique (A) est un paraboloïde hyperbolique.