E. GROSSETÊTE

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1889). Solution de la question de mathématiques élémentaires

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 201-203

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__201_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1889).
SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES;

Par M. E. GROSSETÊTE,
Professeur au lycée de Nevers.

On donne deux droites concourantes OA, OB *et un point* P *pris dans leur plan :* 1° *construire sur* OA *un point* M, *tel que les deux cercles* S *et* S′ *passant par les points* P *et* M *et tangents à la droite* OB *se coupent sous un angle* ω; 2° *étudier la variation de l'angle sous lequel se coupent les deux cercles* S, S′ *quand le point* M *se déplace sur la droite* OA; 3° *soient* Q *et* Q′ *les deux autres points d'intersection des deux cercles* S, S′ *avec la droite* OA; *démontrer que le cercle circonscrit au* *triangle* PQQ′ *est tangent à une droite qui reste fixe quand le point* M *décrit la droite* OA.

1° Supposons le problème résolu et prenons la figure inverse de la figure cherchée en choisissant le point P comme pôle d'inversion et pour puissance $\overline{PO}^2$. Les droites OA, OB ont pour inverses deux cercles a, b passant par P et O; les inverses des deux cercles cherchés S et S′ sont deux droites se coupant sous un angle ω, tangentes à la circonférence b et ayant leur point d'intersection m sur la circonférence a. L'inverse du point m est évidemment le point M cherché sur OA. Or m est situé à la fois sur la circonférence a et sur la circonférence concentrique à b, lieu des points d'où l'on voit b sous l'angle ω. Ces deux cercles se coupent généralement en deux points m, m', auxquels correspondent deux points M, M′ à l'intersection de OA et des rayons Pm, Pm'. Il y aura donc, en général, deux solutions.

2° Étudions la variation de l'angle ω lorsque le point M se déplace sur OA, c'est-à-dire lorsque le point m se déplace sur la circonférence a, d'abord à l'extérieur de la circonférence b, en partant du point O. On voit sans peine que l'angle ω décroît constamment depuis deux droits jusqu'à un angle ω_1 défini par la relation

$$\sin\frac{\omega_1}{2} = \frac{\alpha}{l+\beta},$$

dans laquelle α et β désignent les distances du point P aux deux droites OA et OB et l la longueur de la droite qui joint les pieds de ces perpendiculaires. Pour cette valeur, le point m est situé en μ sur la ligne des centres des circonférences a et b. Le point M correspondant est situé à l'intersection de OA et de Pμ en N, de sorte que, pendant que M décrit la droite ON, l'angle ω varie depuis deux droits jusqu'à l'angle ω_1.

Le point m se déplaçant ensuite sur l'axe μP, auquel cas son correspondant M se déplace sur NA, l'angle ω croît depuis la valeur minimum ω_1 jusqu'à deux droits. Le problème n'est pas possible lorsque m décrit l'arc PO intérieur à la circonférence a.

3° Soient Q et Q' les deux autres points d'intersection des deux cercles S, S' avec la droite OA. Leurs correspondants dans la figure inverse sont les seconds points d'intersection des tangentes menées de m à la circonférence b avec la circonférence a; désignons-les par q, q'. Le cercle circonscrit au triangle PQQ' a pour inverse la droite qq'. Or : *Étant donnés trois cercles ayant deux à deux le même axe radical, si l'on inscrit à l'un d'eux c une suite de triangles abc, dont les côtés ab, ac touchent respectivement les deux autres c' et c'', le troisième côté bc de ce triangle enveloppera un quatrième cercle ayant le même axe radical que les deux autres* (*voir* Chasles, *Géométrie supérieure*, n° 757). Ici le triangle à considérer mqq' est inscrit dans la circonférence : a l'un de ses côtés qm est tangent au cercle b; l'autre mq' est tangent au cercle b; ces trois cercles ont même axe radical ; donc qq' enveloppe un cercle ayant le même axe radical avec les autres. Ce cercle a pour inverse une droite passant par O. Donc la circonférence circonscrite au triangle PQQ' reste tangente à cette droite quand le point M décrit la droite OA.

N. B. — M. Farjon nous a adressé une solution analogue.