Nouvelles annales de mathématiques

Issaly

Extension aux pseudo-surfaces du théorème de Malus relatif à la marche des rayons lumineux

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 190-193

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__190_0>

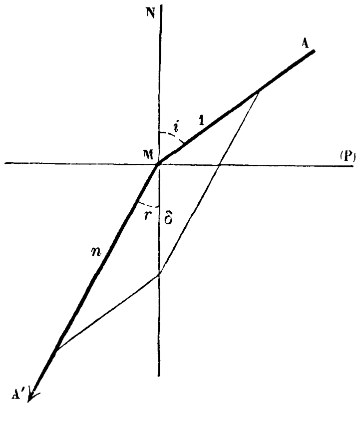
EXTENSION AUX PSEUDO-SURFACES DU THÉORÈME DE MALUS RELATIF A LA MARCHE DES RAYONS LUMINEUX;

PAR M. L'ABBÉ ISSALY.

THÉORÈME. — *Si des rayons lumineux sont normaux à une pseudo-surface, ils jouissent encore de la même propriété après un nombre quelconque de réflexions et de réfractions.*

Il suffit d'établir le théorème pour le cas de la réfraction, celui de la réflexion pouvant être considéré comme correspondant à une réfraction d'indice $n = -1$.

Nous suivrons, en cela, la même méthode que M. Darboux, pour le cas des surfaces (*Leçons sur les surfaces*, n° 450).



Soit (F_v) une pseudo-surface quelconque tangente en M au plan (P) et que nous envisageons, même *phy-*

siquement (nos recherches antérieures sur la surface de l'onde nous y autorisent, croyons-nous), comme la limite de séparation de deux milieux. Soient MN la normale au plan (P), et (S), (S') les deux courbes génératrices de (F_v), respectivement tangentes aux axes Mx, My situés dans ce plan. Associés à la normale MN, ces axes constituent le trièdre mobile $MNxy$, auquel nous supposerons la surface (F_v) médiatement rapportée.

Choisissons comme trièdre de référence un trièdre *trirectangle* quelconque OXYZ ou (T) et désignons par (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha_v, \beta_v, \gamma_v)$ les cosinus directeurs, par rapport à ce trièdre, des rayons, incident et réfléchi, MA, MA' et de la normale MN.

Pour que la loi de Descartes, $\frac{\sin i}{\sin r} = n$, soit vérifiée, il faut et il suffit que la diagonale δ du parallélogramme construit sur les longueurs 1 et n, respectivement portées sur MA et MA', coïncide avec le prolongement de MN.

Cela étant, si l'on projette sur les arêtes du trièdre (T) les trois longueurs précédentes, on aura

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha + n\alpha' = \delta\alpha_v, \\ \beta + n\beta' = \delta\beta_v, \\ \gamma + n\gamma' = \delta\gamma_v. \end{cases}$$

Or, pour tout déplacement sur la pseudo-surface (F_v) du pied de la normale MN, on a la relation évidente

$$(2) \qquad \alpha_v\, dX + \beta_v\, dY + \gamma_v = 0,$$

en même temps que les conditions

$$dX = a\, ds + a'\, ds'.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\partial a'}{\partial s} < \frac{\partial a}{\partial s'},$$

propres à caractériser la pseudo-surface (F_ν) et dans lesquelles (a, b, c), (a', b', c') désignent les cosinus directeurs de Mx et de My.

Substituant les valeurs (1) dans la relation (2), il vient

$$(3)\quad (\alpha\, dX + \beta\, dY + \gamma\, dZ) + n(\alpha'\, dX + \beta'\, dY + \gamma'\, dZ) = 0.$$

Ceci posé, prenons deux points (correspondants) fixes M_1 et M'_1, le premier, sur MA, à la distance ρ, le deuxième, sur MA′, à la distance $-\frac{\rho}{n}$ du point M. Les coordonnées de ces points pourront être représentées par les systèmes

$$(M_1)\quad \begin{cases} X_1 = X - \rho\alpha, \\ Y_1 = Y - \rho\beta, \\ Z_1 = Z - \rho\gamma; \end{cases}$$

$$(M)\quad \begin{cases} X'_1 = X + \frac{\rho}{n}\alpha', \\ Y'_1 = Y + \frac{\rho}{n}\beta', \\ Z'_1 = Z + \frac{\rho}{x}\gamma'. \end{cases}$$

Si maintenant on admet que le rayon incident MA soit normal en M_1 à une pseudo-surface déterminée (F_{ν_1}), on aura, pour tout déplacement infinitésimal de M_1 sur (F_{ν_1}),

$$(4)\quad \alpha\, dX_1 + \beta\, dY_1 + \gamma\, dZ_1 = 0,$$

et comme

$$dX_1 = dX - \alpha\, d\rho - \rho\, d\alpha,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

il s'ensuit que

$$(5)\quad \alpha\, dX + \beta\, dY + \gamma\, dZ = d\rho.$$

Remontant à l'équation (3), on en tire

$$(6) \qquad \alpha' \, dX + \beta' \, dY + \gamma' \, dZ = -d\left(\frac{\rho}{n}\right).$$

D'autre part, des coordonnées du point M'_1 on déduit

$$dX'_1 = dX + \alpha' d\left(\frac{\rho}{n}\right) + \frac{\rho}{n} \, d\alpha',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

système de valeurs qui, eu égard à (6), entraîne comme conséquence

$$(7) \qquad \alpha' \, dX'_1 + \beta' \, dY'_1 + \gamma' \, dZ'_1 = 0.$$

En rapprochant cette dernière relation des relations analogues (2) et (4), on voit qu'elle exprime que le rayon réfracté MA' est normal en M'_1 à une nouvelle pseudo-surface $(F_{V'_1})$, pseudo-surface, d'ailleurs, parfaitement déterminée, elle aussi, puisque, à chaque point M_1 (F_{V_1}), correspond un point unique M'_1 de $(F_{V'_1})$. Le théorème généralisé que nous avions en vue se trouve donc par là-même établi.