Nouvelles annales de mathématiques

A. Adam

Note sur les surfaces de révolution applicables sur une surface de révolution donnée, et plus généralement sur les surfaces dont les lignes de courbure d'une famille sont situées dans des plans parallèles et qui sont applicables sur une surface de même nature

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 18-23

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__18_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

NOTE SUR LES SURFACES DE RÉVOLUTION APPLICABLES SUR UNE SURFACE DE RÉVOLUTION DONNÉE, ET PLUS GÉNÉRALEMENT SUR LES SURFACES DONT LES LIGNES DE COURBURE D'UNE FAMILLE SONT SITUÉES DANS DES PLANS PARALLÈLES ET QUI SONT APPLICABLES SUR UNE SURFACE DE MÊME NATURE;

PAR M. A. ADAM,
Ingénieur, ancien élève de l'École des Ponts et Chaussées,
Docteur ès Sciences.

On sait trouver les surfaces de révolution applicables sur une surface de révolution donnée, mais nous ne croyons pas qu'on ait fait sur ces surfaces la remarque suivante :

Quand on déforme une surface de révolution en lui conservant son caractère, la forme que prend le méridien est indépendante de sa distance à l'axe de révolution.

Cette remarque ressort très simplement des équations des surfaces de révolution applicables sur une surface de révolution donnée.

En effet, les équations de toute surface de révolution peuvent s'écrire, en employant les coordonnées curvilignes u et v de Gauss,

$$x = \mathrm{U}\cos v,$$
$$y = \mathrm{U}\sin v,$$
$$z = \int \sqrt{1 - \mathrm{U}'^2}\, du,$$

U étant une certaine fonction de u.

L'axe des z est alors l'axe de révolution de la surface et les lignes $u =$ const. et $v =$ const. représentent respectivement les parallèles et les méridiens.

Les équations des surfaces de révolution applicables sur la proposée sont, d'autre part,

$$x = a\mathrm{U}\cos\frac{v}{a},$$

$$y = a\mathrm{U}\sin\frac{v}{a},$$

$$z = \int\sqrt{1 - a^2\mathrm{U}'^2}\,du,$$

a étant une constante arbitraire.

Les équations

$$r = \mathrm{U},$$

$$z = \int\sqrt{1 - \mathrm{U}'^2}\,du$$

de la méridienne primitive deviennent donc

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} r &= a\mathrm{U},\\ z &= \int\sqrt{1 - a^2\mathrm{U}'^2}\,du,\end{aligned}\right.$$

pour la méridienne déformée.

Changeons d'une quantité b la distance de la méridienne primitive à l'axe de révolution, c'est-à-dire remplaçons dans les équations ci-dessus U par $\mathrm{U} + b$; les équations (1) de la méridienne déformée deviendront

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} r &= a\mathrm{U} + ab,\\ z &= \int\sqrt{1 - a^2\mathrm{U}'^2}\,du,\end{aligned}\right.$$

et l'on voit que cette méridienne (2) n'est autre chose que la méridienne (1) dont la distance à l'axe de révolution aurait varié de la quantité ab.

Comme exemple, considérons une sphère de rayon r

et un tore dont le méridien soit un cercle de rayon égal aussi à r :

Si l'on déforme le tore et la sphère de manière que ces surfaces demeurent de révolution, les méridiens successifs de la première surface sont les méridiens successifs de la seconde.

La remarque que nous venons de faire est susceptible de généralisation en considérant les surfaces dont toutes les lignes de courbure d'une famille sont dans des plans parallèles.

Monge, qui a découvert ces surfaces, les définit de la manière suivante dans son *Application de l'Analyse à la Géométrie :*

Si, sur un cylindre à base quelonque, on pousse une moulure d'un profil quelconque, mais constant, perpendiculairement à la génératrice, la surface de cette moulure sera la surface demandée.

On peut aussi les regarder comme engendrées par une courbe plane quelconque dont le plan roule sur un cylindre quelconque.

Avec les variables u et v de Gauss, les équations de ces surfaces peuvent s'écrire

$$(3)\qquad \begin{cases} x = \mathrm{U}\cos v + \mathrm{V}, \\ y = \mathrm{U}\sin v + \mathrm{V}_1, \\ z = \displaystyle\int \sqrt{1-\mathrm{U}'^2}\,du, \end{cases}$$

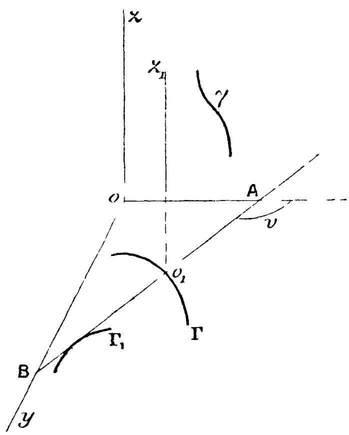
U désignant une fonction de u, et V, V_1 deux fonctions de v assujetties à la condition

$$(4)\qquad \mathrm{V}' + \mathrm{V}'_1 \operatorname{tang} v = 0.$$

En effet, toute courbe $v =$ const. de la surface (3) est située dans un plan

$$\frac{x - \mathrm{V}}{\cos \nu} = \frac{y - \mathrm{V}_1}{\sin \nu},$$

parallèle à oz, dont la trace AB sur le plan xoy fait avec ox l'angle ν et passe par le point o_1 ayant pour coordonnées $x = \mathrm{V}$, $y = \mathrm{V}_1$. Ce point o_1 décrit dans le plan xoy



une courbe Γ quelconque, à laquelle, en vertu de la relation (4), la droite AB demeure normale; par suite, AB roule sur une courbe Γ_1, quand o_1 décrit la courbe Γ.

On reconnaît d'ailleurs sans peine que la courbe $\nu =$ const. a pour équations, dans son plan $x_1 o_1 z_1$,

$$(5) \qquad \begin{cases} x_1 = \mathrm{U}, \\ z_1 = z = \int \sqrt{1 - \mathrm{U}'^2}\, du; \end{cases}$$

cette courbe γ est donc invariable et fixe par rapport aux axes $o_1 x_1$, $o_1 z_1$.

Il résulte bien de tout cela :

1° Que le plan de γ roule sur un cylindre C_1 parallèle à oz et de base quelconque Γ_1 pendant la génération de la surface;

2° Que la surface est aussi une moulure de profil constant γ poussée sur un cylindre C parallèle à oz et de base quelconque Γ.

Cela posé, admettons qu'on puisse déformer la surface considérée de façon qu'en lui conservant son caractère, les courbes $v =$ const. continuent d'être les génératrices.

Pour avoir les équations de la nouvelle surface, il faudra, dans (3) et (4), remplacer $U(u)$, $V(v)$, $V_1(v)$ par certaines fonctions $U_1(u_1)$, $T(v_1)$, $T_1(v_1)$; u_1 et v_1, qui doivent rester constants respectivement avec u et v, étant certaines fonctions $u_1 = f(u)$, $v_1 = \varphi(v)$.

Le ds^2 de la surface (3), qui avait pour expression, en vertu de la condition (4),

$$ds^2 = du^2 + \left(U - \frac{V'}{\sin v}\right)^2 dv^2,$$

deviendra donc

$$ds^2 = f'^2(u)\,du^2 + \left(U_1 - \frac{T'}{\sin v_1}\right)\varphi'^2(v)\,dv^2.$$

Identifiant ces deux ds^2, il vient

$$f'(u) = 1 \qquad \text{d'où} \qquad u_1 = u,$$

et

$$U - \frac{V'}{\sin v} = \left(U_1 - \frac{T'}{\sin v_1}\right)\varphi'(v). \tag{6}$$

Cette dernière équation, différentiée par rapport à u, donne

$$U' = U'_1\,\varphi'(v),$$

d'où

$$\frac{U'_1}{U'} = \frac{1}{\varphi'(v)} = \text{une const. } a,$$

$$\varphi(v) = v_1 = \frac{v}{a} \qquad \text{et} \qquad U_1 = aU + b.$$

Les équations (4) et (6) donnent enfin pour T et T_1

les expressions

$$T = \int \frac{V' \sin \frac{v}{a}}{\sin v}\, dv - b \cos \frac{v}{a},$$

$$T_1 = \int \frac{V'_1 \cos \frac{v}{a}}{\cos v}\, dv - b \sin \frac{v}{a}.$$

Les équations de la surface déformée sont donc

$$x = a\mathrm{U} \cos \frac{v}{a} + \int \frac{V' \sin \frac{v}{a}}{\sin v}\, dv,$$

$$y = a\mathrm{U} \sin \frac{v}{a} + \int \frac{V'_1 \cos \frac{v}{a}}{\cos v}\, dv,$$

$$z = \int \sqrt{1 - a^2 \mathrm{U}'^2}\, du.$$

Par suite, les équations (5) de la génératrice primitive γ deviennent, après la déformation,

$$x_1 = a\mathrm{U},$$

$$z_1 = \int \sqrt{1 - a^2 \mathrm{U}'^2}\, du;$$

ce qui signifie que :

La génératrice primitive s'est déformée de la même façon que si elle eût été le méridien d'une surface de révolution d'axe parallèle à oz, et cela quelle que soit la directrice Γ.

Par exemple :

Si l'on prend une surface canal de rayon r, dont l'axe soit une courbe plane quelconque, et si on la déforme comme il est dit plus haut, ses génératrices successives seront des courbes égales aux méridiens des surfaces de révolution applicables sur une sphère de rayon r.