Nouvelles annales de mathématiques

Ch. Robert

Généralisation d’un théorème sur l’équilibre des surfaces fermées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 180-189

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__180_0>

GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME SUR L'ÉQUILIBRE DES SURFACES FERMÉES (1);

PAR LE P. CH. ROBERT, S. J.

LEMME I. — *Étant donnée une surface fermée, prouver que des forces normales à cette surface et proportionnelles à ses éléments se font équilibre.*

La force F appliquée au point M est égale à

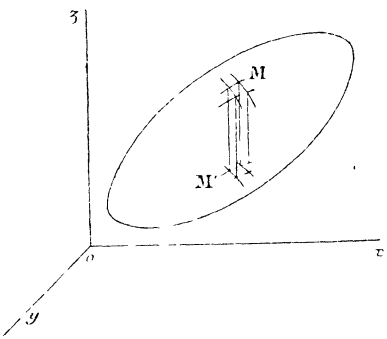
$$\mu\, dx\, dy \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

ou, plus simplement, à

$$\mu\, d\omega.$$

Imaginons un cylindre très petit, parallèle à Oz. Ce

Fig. 1.



cylindre va déterminer un second élément ou, en général, un nombre pair d'éléments, puisque la surface est fermée.

---

(1) Les deux lemmes et les deux premiers théorèmes sont extraits (en substance) du *Journal de Liouville*, 1re série, t. XIII, p. 243.

La force appliquée en M′ est

$$\mu\, d\omega_1.$$

Décomposons chacune des deux forces en trois parallèles aux axes. Les deux composantes suivant Oz sont

$$\mu\, d\omega \cos\gamma$$

et

$$\mu\, d\omega_1 \cos\gamma_1.$$

Or on a

$$\mu\, d\omega \cos\gamma = \mu\, d\omega_1 \cos\gamma_1,$$

car $d\omega \cos\gamma$ et $d\omega_1 \cos\gamma_1$ représentent l'une et l'autre la section droite du cylindre considéré.

Donc les deux composantes suivant Oz sont égales et de sens contraires, donc elles se détruisent.

On démontrerait de même que les composantes suivant Ox et Oy se détruisent, donc la surface est en équilibre. C. F. Q. D.

Lemme II. — *Soient deux surfaces parallèles, A et A′ deux points correspondants, c'est-à-dire situés sur une normale commune, $d\sigma$ et $d\sigma'$ les éléments superficiels en ces points, et ds la distance constante des deux surfaces. Prouver la relation*

$$d\sigma' - d\sigma = d\sigma\, ds \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right),$$

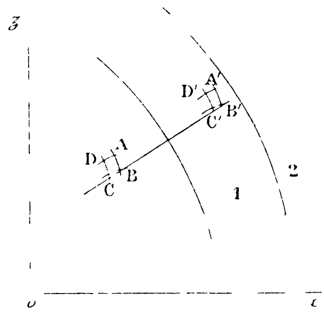
R, R′ *étant les rayons de courbure de la première surface au point* A.

Je décompose $d\sigma$ en éléments infiniment petits formés par quatre lignes de courbure de la première surface.

Les lignes de courbure sont orthogonales.

$A'B'C'D'$ donnent les lignes de courbure de la surface parallèle (car les normales coïncident).

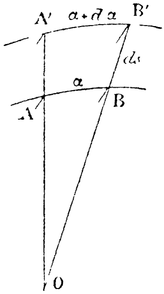
Fig. 2.



On a, dans les triangles $OA'B'$, OAB,

$$\frac{x - dx}{x} = \frac{R - ds}{R}.$$

Fig. 3.



d'où, successivement,

$$\frac{dx}{x} = \frac{ds}{R},$$

$$x = \frac{R\,dx}{ds}.$$

et

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} d\alpha &= \frac{\alpha\, ds}{R}, \\ &\text{de même,} \\ d\beta &= \frac{\beta\, ds}{R'}. \end{aligned}\right.$$

Or

$$d\sigma = \alpha\beta,$$
$$d\sigma' = (\alpha + d\alpha)(\beta + d\beta),$$

d'où

$$d\sigma' - d\sigma = \alpha\, d\beta - \beta\, d\alpha,$$

en négligeant $d\alpha\, d\beta$ infiniment petit d'ordre supérieur.

Donc

$$d\sigma' - d\sigma = \alpha\beta\frac{ds}{R'} + \alpha\beta\frac{ds}{R},$$

ou, d'après les formules (1),

$$d\sigma' - d\sigma = d\sigma\, ds\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème de M. Bertrand. — *Si l'on applique à une surface fermée des forces normales et proportionnelles à* $d\sigma\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)$, *ces forces se font équilibre.*

En effet, soit une surface parallèle à la première. A la surface proposée j'applique des forces $-\mu\, d\sigma$; ces forces se font équilibre (lemme I). A la surface parallèle distante de ds j'applique des forces $+\mu\, d\sigma'$; ces forces se font équilibre (lemme I). Donc sur chaque normale j'ai des forces égales à

$$\mu(d\sigma' - d\sigma),$$

c'est-à-dire, en vertu du lemme II, à

$$\mu\, d\sigma\, ds\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Théorème de M. C. Joubert. — *Si l'on applique à une surface fermée des forces normales et proportionnelles à $\frac{d\sigma}{RR'}$, ces forces se font équilibre.*

En effet, à la première surface j'applique des forces égales à

$$-\mu\, d\sigma\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right);$$

à la deuxième surface j'applique des forces égales à

$$+\mu\, d\sigma'\left(\frac{1}{R+ds}+\frac{1}{R'+ds}\right).$$

Ces forces se font équilibre sur chaque surface, d'après le théorème de M. Bertrand.

Cherchons la résultante sur chaque normale : cette résultante a pour expression

$$\mu\, d\sigma'\left(\frac{1}{R+ds}+\frac{1}{R'+ds}\right)-\mu\, d\sigma\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right),$$

qu'on transforme successivement en

$$\mu\, d\sigma\left[\frac{RR'+ds(R+R')}{RR'}\right]\left[\frac{1}{R+ds}+\frac{1}{R'+ds}\right]-\mu\, d\sigma\left[\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right]$$

$$\mu\, d\sigma\left[\frac{ds(R+R')(R+ds+R'+ds)+RR'(R+ds+R'+ds)-(R+R')(R+ds)(R'+ds)}{RR'(R+ds)(R'+ds)}\right]$$

ou, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

$$2\mu\, d\sigma\, ds\,\frac{1}{RR'}.$$

c. q. f. d.

Cela posé, voici les théorèmes que nous nous proposons de faire connaître :

Théorème. — *Si l'on applique à une surface, for-*

mée des forces normales et proportionnelles à $\frac{d\sigma}{R^2 R'^2}$, *ces forces se font équilibre.*

En effet, à la première surface j'applique des forces égales à

$$-\mu\, d\sigma\, \frac{1}{RR'};$$

à la seconde surface j'applique des forces égales à

$$+\mu\, d\sigma'\, \frac{1}{(R+ds)(R'-ds)}.$$

Sur chaque surface ces forces se font équilibre, d'après le théorème de M. Joubert. Je cherche la résultante sur chaque normale. Cette résultante a pour expression

$$\mu\, d\sigma'\, \frac{1}{(R+ds)(R'+ds)} - \mu\, d\sigma\, \frac{1}{RR'}.$$

Or

$$d\sigma' = d\sigma\left[1 + ds\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\right] = d\sigma\left[\frac{RR' + (R+R')\,ds}{RR'}\right];$$

donc sur chaque normale j'ai la force

$$\mu\, d\sigma\left[\frac{RR' + (R+R')\,ds}{RR'}\,\frac{1}{(R+ds)(R'+ds)} - \frac{1}{RR}\right].$$

La quantité entre crochets, devient

$$\frac{RR' + (R+R')\,ds - (R+ds)(R'+ds)}{RR'(R+ds)(R'+ds)}$$
$$= \frac{RR' + (R+R')\,ds - RR' - (R+R')\,ds - ds^2}{RR'(R+ds)(R'+ds)},$$

On a donc sur chaque normale des forces égales à

$$\frac{-\mu\, d\sigma\, ds^2}{R^2 R'^2},$$

c'est-à-dire des forces proportionnelles à

$$\frac{d\sigma}{R^2 R'^2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème général. — *Plus généralement une surface fermée quelconque reste en équilibre sous l'action de forces normales et proportionnelles à*

$$\frac{N_n d\sigma}{R^n R'^n},$$

N_n *désignant l'expression*

$$N_n = N_{n-1}(R + R')(2 - n) + RR'\left(\frac{\partial N_{n-1}}{\partial R} + \frac{\partial N_{n-1}}{\partial R'}\right).$$

Considérons d'abord le cas de $n = 3$.

Il y a sur chaque normale une résultante égale à

$$\mu\, d\sigma\left[\frac{RR' + (R + R')\,ds}{RR'}\,\frac{1}{(R + ds)^2(R' + ds)^2} - \frac{1}{R^2 R'^2}\right].$$

Je néglige au numérateur les termes en ds^2, ds^3, ..., et je ne m'occupe pour le moment que de la partie entre crochets

$$\frac{[RR' + (R + R')\,ds]\,RR' - (R + ds)^2(R' + ds)^2}{R^2 R'^2 (R + ds)^2 (R' + ds)^2}.$$

Le numérateur devient successivement

$$R^2R'^2 + (R + R')\,ds\,RR' - (R = ds)^2(R' + ds)^2,$$
$$R^2R'^2 + (R + R')\,ds\,RR' - R^2R'^2 - 2(RR'^2 + R'R^2)\,ds - \ldots,$$
$$(R + R')\,ds\,RR' - 2RR'(R + R')\,ds - \ldots,$$
$$-RR'(R + R')\,ds.$$

Nous avons donc sur chaque normale des forces égales à

$$-\mu\, ds\, d\sigma\,\frac{RR'(R + R')}{R^4 R'^4} = -\mu\, ds\, d\sigma\,\frac{R + R'}{R^3 R'^3};$$

ce qui vérifie la loi énoncée, vu que

$$N_3 = -(R + R').$$

Vérifions encore pour $n = 4$.

On a sur chaque normale une résultante égale à

$$\mu\, d\sigma \left[\frac{RR' + (R + R')\,ds}{RR'} \; \frac{(R + ds) + (R' + ds)}{(R + ds)^3 (R' + ds)^3} - \frac{R + R'}{R^3 R'^3} \right],$$

c'est-à-dire

$$\mu\, d\sigma \left\{ \frac{\left\{ \begin{array}{l} [RR' + (R + R')\,ds]\, R^2 R'^2 (R + ds + R'\,ds) \\ \quad -(R + R')(R + ds)^3 (R' + ds)^3 \end{array} \right\}}{R^3 R'^3 (R + ds)^3 (R' + ds)^3} \right\}.$$

Le numérateur devient, en négligeant les termes en ds^2, ds^3, ...,

$$\begin{array}{l} R^3 R'^3 (R + R') - (R + R')\, R^3 R'^3 \\ \quad + ds[(R + R')^2 R^2 R'^2 + 2 R^3 R'^3 - (R + R')(3 R^3 R'^2 + 3 R^2 R'^3)], \\ \qquad ds\, R^2 R'^2 [-2(R + R')^2 + 2RR'], \\ \qquad ds\, R^2 R'^2 (-2R^2 - 2R'^2 - 4RR' + 2RR'): \end{array}$$

donc, après réduction, la fraction devient

$$-\frac{2\,ds(R^2 + R'^2 + RR')}{R^4 R'^4};$$

ce qui est conforme à la loi énoncée, vu que

$$N_4 = -2(R^2 + R'^2 + RR').$$

Il reste à montrer que la loi, étant supposée vraie pour $n - 1$, est vraie pour n.

Je suppose donc qu'une surface fermée reste en équilibre si on la soumet à des forces dirigées suivant la normale en chacun de ses éléments et proportionnelles à $\frac{N_{n-1}}{R^{n-1}R'^{n-1}}$; je dis que la surface est encore en équilibre si les forces sont proportionnelles à $\frac{N_n}{R^n R'^n}$.

En effet, raisonnant comme dans les cas précédents, j'aurai sur chaque normale une résultante égale à

$$\mu\, d\sigma \left[\frac{RR'+(R+R')ds}{RR'}\,\frac{N_{n-1}^{(R+ds,\,R'+ds)}}{(R+ds)^{n-1}(R'+ds)^{n-1}} - \frac{N_{n-1}}{R^{n-1}R'^{n-1}}\right],$$

en désignant par $N_{n-1}^{(R+ds,\,R'+ds)}$ le numérateur N_{n-1} dans lequel on a remplacé R et R' par $R+ds$ et $R'+ds$; c'est-à-dire

$$(\alpha)\quad \mu\, d\sigma \left\{\frac{\left\{\begin{array}{c}[R^{n-1}R'^{n-1} + (R+R')\,ds\,R^{n-2}R'^{n-2}]\,N_{n-1}^{(R+ds,\,R'+ds)}\\ - N_{n-1}(R+ds)^{n-1}(R'+ds)^{n-2}\end{array}\right\}}{R^{n-1}R'^{n-1}(R+ds)^{n-1}(R'+ds)^{n-1}}\right\}.$$

Je ne m'occupe pour le moment que du numérateur. Le développement de $N_{n-1}^{(R+ds,\,R'+ds)}$ par la formule de Taylor à deux variables donne

$$f(R+ds,\,R'+ds) = f(R,R') + \left(\frac{\partial}{\partial R}ds + \frac{\partial}{\partial R'}ds\right)f + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial}{\partial R}ds + \frac{\partial}{\partial R'}ds\right)^2 f + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$N_{n-1}^{(R+ds,\,R'+ds)} = N_{n-1} + \left(\frac{\partial N_{n-1}}{\partial R} + \frac{\partial N_{n-1}}{\partial R'}\right)ds + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial N_{n-1}}{\partial R} + \frac{\partial N_{n-1}}{\partial R'}\right)^2 ds^2 + \ldots.$$

Passant au dénominateur, et développant $(R+ds)^{n-1}$ et $(R'+ds)^{n-1}$ par la formule du binôme, on a

$$(R+ds)^{n-1} = R^{n-1} + (n-1)R^{n-2}ds + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}R^{n-3}ds^2 + \ldots,$$

$$(R'+ds)^{n-1} = R'^{n-1} + (n-1)R'^{n-2}ds + \frac{(n-1)(n-2)}{2.1}R'^{n-2}ds^2 + \ldots

Les premiers termes du produit

$$(R + ds)^{n-1}(R' + ds)^{n-1}$$

sont donc

$$\begin{aligned} & R^{n-1} R'^{n-1} + (n - 1)(R^{n-2} R'^{n-1} + R'^{n-2} R^{n-1}) \, ds \\ & \qquad + (\ldots) \, ds^2 + \ldots. \end{aligned}$$

Cela posé, je reviens à la formule (α). Au numérateur les termes finis

$$R^{n-1} R'^{n-1} N_{n-1} - N_{n-1} R^{n-1} R'^{n-1}$$

se détruisent, et le coefficient du terme en ds a pour expression

$$\begin{aligned} & R^{n-1} R'^{n-1} \left(\frac{\partial N_{n-1}}{\partial R} + \frac{\partial N_{n-1}}{\partial' R} \right) \\ & \quad - (R + R') R^{n-2} R'^{n-2} N_{n-1} - N_{n-1} (n - 1) R^{n-2} R'^{n-2} (R + R'). \end{aligned}$$

La formule (α) peut donc s'écrire (en négligeant les termes en ds^2 au numérateur et ceux en ds au dénominateur),

$$\frac{R^{n-2} R'^{n-2} \left[N_{n-1}(R + R')(2 - n) + RR' \left(\frac{\partial N_{n-1}}{\partial R} + \frac{\partial N_{n-1}}{\partial R'} \right) \right]}{R^{2n-2} R'^{2n-2}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{N_n}{R_n R'^n}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$