NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

WORONTZOFF

Sur le développement des intégrales en séries

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 158-162

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__158_1>

SUR LE DÉVELOPPEMENT DES INTÉGRALES EN SÉRIES;

PAR M. WORONTZOFF.

En posant

$$\int F(x)\,dx = \Phi(x) + C,$$

on a

$$\int_{a_0+b_0 m}^{a+bm} F(x)\,dx = \Phi(a+bm) - \Phi(a_0+b_0 m) = f(m) = \Phi(a) - \Phi(a_0)$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{(bm)^k}{1.2.3\ldots k}\,\Phi^{(k)}(a)$$

$$- \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{(b_0 m)^k}{1.2.3\ldots k}\,\Phi^{(k)}(a_0) + h,$$

où

$$h = \frac{(1-\theta)^{n-1} m^n}{1.2.3\ldots(n-1)}\, f^{(n)}(\theta m)$$

$$= \frac{(1-\theta)^{n-1} m^n}{1.2.3\ldots(n-1)}\left[b^n \Phi^{(n)}(a+b\theta m) - b_0^n \Phi^{(n)}(a_0+b_0\theta m)\right]$$

$$= \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\left[\int_0^{bm} \Phi^{(n)}(a+bm-z)\,z^{n-1}\,dz - \int_0^{b_0 m} \Phi^{(n)}(a_0+b_0 m-z)\,z^{n-1}\,dz\right]$$

Comme

$$\Phi(a) - \Phi(a_0) = \int_{a_0}^{a} F(x)\,dx, \qquad \Phi^{(k)}(x) = F^{(k-1)}(x).$$

on obtient, en prenant $m = 1$,

$$\tag{a}\left\{\begin{aligned}
\int_{a_0+b_0}^{a+b} \mathrm{F}(x)\,\partial x &= \int_{a_0}^{a} \mathrm{F}(x)\,\partial x + \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{b^k}{1.2.3\ldots k} \mathrm{F}^{(k-1)}(a) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{b_0^k}{1.2.3\ldots k} \mathrm{F}^{(k-1)}(a_0) - h_0 \\
&\quad - \int_{b_0}^{b} \mathrm{F}(x)\,\partial x - \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{a^k}{1.2.3\ldots k} \mathrm{F}^{(k-1)}(b) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{a_0^k}{1.2.3\ldots k} \mathrm{F}^{(k-1)}(b_0) + h'_0, \\
h_0 &= \frac{(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} \left[b^n \mathrm{F}^{(n-1)}(a+\theta b) - b_0^n \mathrm{F}^{(n-1)}(a_0+\theta b_0) \right] \\
&= \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} \left[\int_0^{b} \mathrm{F}^{(n-1)}(a-b-z)\, z^{n-1}\,\partial z \right. \\
&\qquad \left. - \int_0^{b_0} \mathrm{F}^{(n-1)}(a_0-b_0-z)\, z^{n-1}\,\partial z \right], \\
h'_0 &= \frac{(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} \left[a^n \mathrm{F}^{(n-1)}(b-\theta a) - a_0^n \mathrm{F}^{(n-1)}(b_0-\theta a_0) \right] \\
&= \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} \left[\int_0^{a} \mathrm{F}^{(n-1)}(a-b-z)\, z^{n-1}\,\partial z \right. \\
&\qquad \left. - \int_0^{a_0} \mathrm{F}^{(n-1)}(a_0+b_0-z)\, z^{n-1}\,\partial z \right].
\end{aligned}\right.$$

Cette formule, pour $a + b = a_0 + b_0 = c$, donne

$$\tag{b}\left\{\begin{aligned}
\int_{a_0}^{a} \mathrm{F}(x)\,\partial x &= \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{(-1)^{k-1}(a-c)^k}{1.2.3\ldots k} \mathrm{F}^{(k-1)}(a) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{(-1)^{k-1}(a_0-c)^k}{1.2.3\ldots k} \mathrm{F}^{(k-1)}(a_0) - h_1, \\
h_1 &= (-1)^{n-1} \frac{(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} \Big\{ (a-c)^n \mathrm{F}^{(n-1)}[a+\theta(c-a)] \\
&\qquad - (a_0-c)^n \mathrm{F}^{(n-1)}[a_0+\theta(c-a_0)] \Big\} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} \int_{a_0}^{a} \mathrm{F}^{(n-1)}(z)(z-c)^{n-1}\,\partial z \text{ [1]};
\end{aligned}\right.$$

---

[1] Nous supposons ici que les fonctions $\mathrm{F}(x)$, $\mathrm{F}'(x)$, ..., $\mathrm{F}^{(n-1)}(x)$ sont finies

d'ou l'on déduit, pour $c = a + a_0 (b = a_0,\ b_0 = a)$,

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
\int_{a_0}^{a} \mathrm{F}(x)\,\partial x &= \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{a^k}{1.2.3\ldots k}\, \mathrm{F}^{(k-1)}(a_0) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{a_0^k}{1.2.3\ldots k}\, \mathrm{F}^{(k-1)}(a) + h_2, \\
h_2 &= \frac{(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} \\
&\quad \times \left[a^n\, \mathrm{F}^{(n-1)}(a_0 + \theta a) - a_0^n\, \mathrm{F}^{(n-1)}(a + \theta a_0)\right] \\
&= \int_{a_0}^{a} \mathrm{F}^{(n-1)}(z)\, \frac{(a + a_0 - z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\, \partial z,
\end{aligned}
\right.
$$

et pour $c = 0$,

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
\int_{a_0}^{a} \mathrm{F}(x)\,\partial x &= \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{1.2.3\ldots k}\, a^k\, \mathrm{F}^{(k-1)}(a) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{1.2.3\ldots k}\, a_0^k\, \mathrm{F}^{(k-1)}(a_0) + h_3, \\
&\qquad\qquad \text{(Théorème de Bernoulli.)} \\
h_3 &= (-1)^{n-1} \frac{(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} \\
&\quad \times \left[a^n\, \mathrm{F}^{(n-1)}(\theta a) - a_0^n\, \mathrm{F}^{(n-1)}(\theta a_0)\right] \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} \int_{a_0}^{a} \mathrm{F}^{(n-1)}(z)\, z^{n-1}\, \partial z.
\end{aligned}
\right.
$$

Si l'on pose, dans la formule (a), $b = b_0 = c$, on trouve

$$
\int_{a_0+c}^{a+c} \mathrm{F}(x)\,\partial x = \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{(a^k - a_0^k)}{1.2.3\ldots k}\, \mathrm{F}^{(k-1)}(c) + h,
$$

---

et continues entre $x = a_0$ et $x = c$ aussi entre $x = a$ et x c, par suite entre $x = a$ et $x = a$.

$$h = \frac{(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\left[a^n F^{(n-1)}(c+\theta a) - a_0^n F^{(n-1)}(c+\theta a_0)\right]$$
$$= \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\left[\int_0^a F^{(n-1)}(a+c-z)z^{n-1}\,\partial z - \int_0^{a_0} F^{(n-1)}(a_0+c-z)\,z^{n-1}\,\partial z\right],$$

ou, en mettant $a - c$ et $a_0 - c$ au lieu de a et a_0,

$$(4)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{a_0}^a F(x)\,\partial x = \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{[(a-c)^k - (a_0-c)^k]}{1.2.3\ldots k} F^{(k-1)}(c) + h_4 \\ \displaystyle\qquad = \frac{(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\Big\{(a-c)^n F^{(n-1)}[c+\theta(a-c)] \\ \displaystyle\qquad\qquad - (a_0-c)^n F^{(n-1)}[c-\theta(a_0-c)]\Big\}, \\ \displaystyle h_4 = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} \\ \displaystyle\qquad \times\left[\int_0^{a-c} F^{(n-1)}(a-z)z^{n-1}\,\partial z - \int_0^{a_0-c} F^{(n-1)}(a_0-z)z^{n-1}\,\partial z\ (^1)\right]. \end{cases}$$

En faisant successivement dans cette série $c = a_0$ et $c = 0$, on obtient les formules bien connues

$$(5)\quad \int_{a_0}^a F(x)\,\partial x = \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{(a-a_0)^k}{1.2.3\ldots k} F^{(k-1)}(a_0) + h_5,$$
$$h_5 = \frac{(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}(a-a_0)^n F^{(n-1)}[a_0+\theta(a-a_0)]$$
$$= \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\int_0^{a-a_0} F^{(n-1)}(a-z)\,z^{n-1}\,\partial z\,;$$

d'où, pour $n = 1$, si $F(x)$ est une fonction finie et continue entre $x = a_0$ et $x = a$,

$$\int_{a_0}^a F(x)\,\partial x = (a-a_0)\,F[a_0+\theta(a-a_0)]$$

---

(1) Les fonctions $F(x)$, $F'(x)$, ..., $F^{(n-1)}(x)$ sont supposées finies et continues entre $x = c$ et $x = a_0$, aussi entre $x = c$ et $x = a$, par suite entre $x = a_0$ et $x = a$.

et

(6) $$\int_{a_0}^{a} F(x)\,\partial x = \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{(a^k - a_0^k)}{1.2.3\ldots k} F^{(k-1)}(0) + h_6,$$

$$h_6 = \frac{(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\left[a^n F^{(n-1)}(\theta a) - a_0^n F^{(n-1)}(\theta a_0)\right]$$

$$= \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\left[\int_0^a F^{(n-1)}(a-z)\, z^{n-1}\,\partial z - \int_0^{a_0} F^{(n-1)}(a_0-z)\, z^{n-1}\,\partial z\right];$$

d'où, pour $n = 1$,

$$\int_{a_0}^{a} F(x)\,\partial x = a\,F(\theta a) - a_0\,F(\theta a_0) = \int_0^a F(x)\,\partial x - \int_0^{a_0} F(x)\,\partial x$$

Remarque. — Si l'on applique la formule

$$\int_0^a F(x)\,\partial x = a\,F(\theta a)$$

aux intégrales

$$h_n = -\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\int_0^a f^{(n)}(a_0 + a - x)\, x^{n-1}\,\partial x$$

$$= -\frac{1}{1.2.3\ldots n}\int_0^{a^n} f^{(n)}\left(a_0 - a - y^{\frac{1}{n}}\right)\partial y$$

$$= -\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)q}\int_0^{a^q} f^{(n)}\left(a_0 - a - z^{\frac{1}{q}}\right)\sqrt[q]{z^{n-q}}\,\partial z$$

où

$$x = y^{\frac{1}{n}} = z^{\frac{1}{q}}, \qquad F(x) = f^{(n)}(a_0 + a - x)\, x^{n-1},$$

$$[a\,F(\theta a) = a\,f^{(n)}(a_0 + a - \theta a)(\theta a)^{n-1} = a^n(1-\theta_1)^{n-1} f^{(n)}(a_0 + \theta_1 a)]$$

on obtient

$$h_n = \frac{(1-\theta)^{n-1} a^n}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n)}(a_0 - \theta_1 a)$$

$$= \frac{a^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(a_0 + \theta a)$$

$$= \frac{(1-\theta_2)^{n-q} a^n}{1.2.3\ldots(n-1)q} f^{(n)}(a_0 - \theta_2 a)$$