Nouvelles annales de mathématiques

Ernest Duporcq

Nouvelle démonstration géométrique d'un théorème de M. Faure

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 140-141

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__140_1>

NOUVELLE DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE D'UN THÉORÈME DE M. FAURE;

PAR M. ERNEST DUPORCQ,
Élève de l'École Monge.

THÉORÈME. — *Les cercles circonscrits aux triangles conjugués par rapport à une conique fixe coupent orthogonalement un cercle fixe, concentrique à la conique.*

Pour démontrer ce théorème, dû à M. Faure, prenons un point S sur la perpendiculaire élevée au plan P de la conique C par son centre O, et imaginons une sphère passant par le point S et normale à la droite OS.

Si ABC est un triangle conjugué par rapport à la conique, les droites SA, SB et SC sont conjuguées par rapport au cône, ayant pour sommet le point S et pour directrice la conique C; en étendant à l'espace le théorème de Frégier généralisé, on voit donc que les plans, tels que abc, déterminés par les points où ces droites coupent la sphère, passent par un point fixe m, qui est situé sur la polaire prise par rapport au cône du plan Q tangent en S à la sphère : d'ailleurs, cette droite n'est autre que SO, car, les plans P et Q étant parallèles, leur intersection, rejetée à l'infini, a pour pôle, relativement à la conique C, le centre de cette conique.

Transformons la figure par rayons vecteurs réciproques, en prenant le point S pour origine d'inversion et un module tel que la sphère ait pour transformée le plan P : le plan abc a pour transformée la sphère SABC, qui passe donc par le point M, transformée du point fixe m, de la droite SO.

Le point O a donc même puissance par rapport à toutes les sphères telles que SABC, et, par suite, par rapport aux cercles circonscrits aux triangles conjugués ; *ces cercles sont donc orthogonaux à un cercle fixe, concentrique à la conique.* On en détermine aisément le rayon, en considérant un triangle conjugué particulier, ayant, par exemple, pour sommet un sommet du rectangle construit sur les axes, et deux côtés confondus tangents à la conique en un de ses sommets (1).

(1) Il est facile de voir, d'après ce qui précède, qu'on peut, de même, démontrer le théorème de M. Faure au moyen d'une sphère