Daniel-E. Mayer

Sur les équations algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 111-124

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__111_0>

SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

PAR M. DANIEL-E. MAYER,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

La présente Note a pour objet :

1° La démonstration d'un théorème sur les racines des équations dans un cas particulier;

2° L'indication d'une méthode pour le calcul approché des racines d'une équation.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORÈME. — *Si, dans une équation algébrique, à coefficients réels ou imaginaires, il existe un terme d'exposant k, dont le coefficient ait une valeur absolue (ou un module) plus grand que la somme des valeurs absolues (ou des modules) des autres coefficients, l'équation donnée admet $m-k$ racines dont les valeurs (ou les modules) sont supérieurs à* 1, *et k racines dont les valeurs (ou les modules) sont inférieurs à* 1.

Pour le démontrer, écrivons l'équation sous la forme

$$1 = \frac{p_1}{x} + \frac{p_2}{x^2} + \ldots + \frac{p_k}{x^k} + \pi_1 x + \pi_2 x^2 + \ldots + \pi_{m-k} x^{m-k},$$

et considérons d'abord le cas où $p_1, p_2, \ldots, \pi_1, \pi_2, \ldots$ sont des quantités toutes réelles, positives, et dont la somme est égale à 1.

Imaginons un jeu, auquel prennent part m joueurs, avec des chances de gagner chaque partie, différentes pour chacun d'eux et respectivement égales à

$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_k, \quad \pi_1, \quad \pi_2, \quad \ldots, \quad \pi_{m-k}.$$

Ils conviennent que, à chaque partie gagnée par un des k premiers joueurs, la cagnotte lui devra une somme égale à 1, si c'est le premier joueur, 2 si c'est le second, ..., k si c'est le k^{ieme}, et que, au contraire, à chaque partie gagnée par un des derniers joueurs, celui-ci devra à la cagnotte une somme égale à 1 si c'est le $(k+1)^{\text{ième}}$, 2 si c'est le $(k+2)^{\text{ième}}$, ..., $m-k$ si c'est le dernier.

Le jeu s'arrêtera quand la fortune de la cagnotte aura atteint ou dépassé $+P$ ou $-Q$.

Il est clair que, dans ces conditions, le jeu peut finir de m façons différentes.

En effet, si la cagnotte arrive aux valeurs négatives fixées pour la fin du jeu, cette éventualité peut se réaliser de k façons différentes, soit que la fortune de la cagnotte devienne exactement égale à $-Q$, soit que, après avoir atteint la valeur $-(Q-1)$, elle soit portée par un succès du $k^{\text{ième}}$ joueur à $-(Q+k-1)$, soit qu'elle atteigne une des valeurs intermédiaires entre ces deux extrêmes.

Et, de même, si c'est par les valeurs positives de la cagnotte que le jeu finit, cela peut se réaliser de $m-k$ façons différentes, soit que la valeur finale atteigne P, ou $P+1$, ou $(P+2)$, ..., ou $(P+m-k-1)$.

Cherchons l'espérance mathématique d'un parieur qui doit recevoir 1^{fr}, si l'une de ces m solutions, qu'il a choisie, se réalise.

Si nous désignons par x la fortune de la cagnotte, au moment considéré, et par $f(x)$ l'espérance cherchée, on voit d'abord que $f(x)$ est défini par la relation

$$\begin{aligned} f(x) = p_1 f(x-1) + p_2 f(x-2) + \ldots + p_k f(x-k) \\ + \pi_1 f(x+1) + \pi_2 f(x+2) + \ldots + \pi_{m-k} f(x+m-k). \end{aligned}$$

Appelons $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ les m racines de l'équation algébrique

$$1 = \frac{p_1}{x} + \frac{p_2}{x^2} + \ldots + \frac{p_k}{x^k} + \pi_1 x + \pi_2 x^2 + \ldots + \pi_{m-k} x^{m-k};$$

il est aisé de vérifier que l'expression $A_1 \alpha_1^x$, où A_1 est une constante arbitraire, satisfait à l'équation aux différences finies qui donne la valeur de $f(x)$. On a, de même, une seconde solution $A_2 \alpha_2^x$, ... et, en écrivant

$$f(x) = A_1 \alpha_1^x + A_2 \alpha_2^x + \ldots + A_m \alpha_m^x,$$

on a la solution complète, puisqu'elle contient autant de constantes arbitraires A_1, A_2, ..., A_m que nous avons de données pour déterminer $f(x)$.

Supposons que la combinaison choisie par le parieur et dans laquelle il doit recevoir 1^{fr} soit celle où, à la fin du jeu, la cagnotte atteindra exactement $+$ P. Les constantes A_1, A_2, ..., A_m seront déterminées par les relations

$$\begin{aligned}
1 &= A_1 \alpha_1^{P} + A_2 \alpha_2^{P} + \ldots + A_m \alpha_m^{P},\\
0 &= A_1 \alpha_1^{(P+1)} + A_2 A_2^{(P+1)} + \ldots + A_m (\alpha_m)^{P+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
0 &= A_1 \alpha_1^{(P+m-k-1)} + A_2 \alpha_2^{(P+m-k-1)} + \ldots + A_m (\alpha_m)^{P+m-k-1},\\
0 &= A_1 \alpha_1^{-Q} + A_2 \alpha_2^{-Q} + \ldots + A_m \alpha_m^{-Q},\\
0 &= A_1 A_1^{-(Q+1)} + A_2 \alpha_2^{-(Q+1)} + \ldots + A_m \alpha_m^{-(Q+1)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
0 &= A_1 \alpha_1^{-(Q+k-1)} + A_2 \alpha_2^{-(Q+k-1)} + \ldots + A_m \alpha_m^{-(Q+k-1)},
\end{aligned}$$

qui, en supposant connues les racines $\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$, sont des équations du premier degré par rapport aux constantes à déterminer.

On peut résoudre ces équations, remplacer $A_1, A_2, \ldots, A_m$ par leurs valeurs en fonction de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ et l'on aura l'expression de $f(x)$ en fonction de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$.

Or, il est évident, d'après les données du problème, que, quelle que soit la valeur de x, comprise entre $+$ P et $-$ Q, $f(x)$, qui représente l'espérance mathématique du parieur, a une valeur réelle, positive et plus petite que 1. Cela est vrai, quels que soient P et Q.

Si l'on fait Q infini en valeur absolue, le problème de probabilité conserve une signification précise. Cela veut dire que le jeu durera jusqu'à ce que la fortune de la cagnotte atteigne ou dépasse P, sans limitation des valeurs négatives par lesquelles elle peut passer. Il y a encore $m-k$ éventualités possibles pour la fin du jeu, de P à $(P+m-k-1)$ et $f(x)$ représente encore l'espérance mathématique du parieur qui recevra 1[fr] si la cagnotte atteint exactement P; $f(x)$ est encore une quantité réelle, positive et plus petite que 1.

Je dis qu'il faut pour cela que, dans l'expression de $f(x)$ en fonction des racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, le coefficient de toute racine, dont la valeur (ou le module) est inférieur à l'unité, devienne nul lorsque Q devient infini.

En effet, soit qu'on considère un terme $A\alpha^x$ correspondant à une racine réelle ou le groupe de deux termes $H^x(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$ correspondant à deux racines imaginaires conjuguées, on voit que si α ou H sont inférieurs à l'unité, on pourrait toujours, si ces termes ne disparaissaient pas, donner à x des valeurs négatives assez grandes pour que la valeur absolue de ces termes devînt supérieure à toute quantité donnée. Et ces termes ne pourraient se détruire l'un l'autre puisque, pour des valeurs différentes de α ou de H, ils seraient d'ordre de grandeur différent. La fonction $f(x)$ ne pourrait donc conserver une valeur plus petite que l'unité, ni même une valeur limitée.

L'expression de $f(x)$, dans le cas où Q est infini, ne contiendra donc que des termes correspondant à des racines supérieures ou au moins égales à l'unité.

De même, si l'on cherche l'espérance mathématique du parieur qui devrait recevoir 1fr dans le cas où la cagnotte atteindrait $-Q$ avant d'avoir atteint ou dépassé P, et si l'on fait P infini, l'espérance mathématique de ce pari aura une expression qui ne contiendra que les termes correspondants à des racines dont les valeurs (ou les modules) sont inférieurs ou au plus égaux à l'unité.

Or, dans un cas comme dans l'autre, nous apercevons *a priori* combien de termes doivent subsister dans l'expression de $f(x)$.

En effet, s'il s'agit d'un jeu qui doit finir quand la cagnotte aura atteint ou dépassé P, sans limitation des valeurs négatives, il faut qu'on ait, dans l'expression de $f(x)$, $m-k$ constantes à déterminer, dont la valeur changera suivant que le parieur aura choisi l'une ou l'autre des $m-k$ éventualités possibles.

Et, s'il s'agit du jeu qui doit finir par la cagnotte négative, il faut que $f(x)$ contienne k constantes à déterminer.

On arrive donc à cette conclusion que l'équation algébrique donnée contient :

$m-k$ racines supérieures ou au moins égales à l'unité,
k racines inférieures ou au plus égales à l'unité.

L'unité est elle-même une des racines de l'équation.

Donc si l'on considère les deux paris distincts, l'un que la cagnotte arrivera à $+P$, sans limitation des valeurs négatives, l'autre que la cagnotte arrivera à $-Q$, sans limitation des valeurs positives, les expressions de l'espérance mathématique seront telles que dans un cas l'espérance tend vers une quantité différente de zéro, et que dans l'autre cas elle tend vers zéro, lorsque P et Q augmentent indéfiniment.

Or, pour savoir laquelle des deux espérances tend vers une limite différente de zéro, et laquelle tend vers zéro, il suffit de rechercher si, d'après les conditions du jeu, la probabilité est favorable à l'accroissement positif ou négatif de la cagnotte, c'est-à-dire si l'expression

$$-(p_1 + 2p_2 + \ldots + kp_k) + [\pi_1 + 2p_2 + \ldots + (m-k)p_{m-k}],$$

qui n'est autre que la dérivée du second membre de l'équation algébrique par rapport à x, et où l'on fait $x = 1$, est positive ou négative.

Si cette expression est positive, l'équation donnée admet, outre l'unité,

$m - k - 1$ racines supérieures à l'unité,
k racines inférieures à l'unité.

Si elle est négative, l'équation admet

$m - k$ racines supérieures à l'unité,
$k - 1$ racines inférieures à l'unité.

Nous n'avons pas tenu compte, dans ce qui précède, de la possibilité que l'équation donnée ait des racines multiples; mais il est aisé de voir que, si n racines de l'équation algébrique deviennent égales, les n termes de l'expression de $f(x)$

$$A_1 \alpha_1^x + A_2 \alpha_2^x + \ldots + A_n \alpha_n^x$$

deviennent

$$A_1 \alpha^x + A_2 x \times \alpha^x + \ldots + A_n x^n \alpha^x.$$

qui contient le même nombre de constantes arbitraires, et les raisonnements que nous avons faits dans le cas général subsistent sans changement dans ce cas particulier.

Il nous reste à étendre ces considérations au cas le plus général auquel s'applique le théorème, c'est-à-dire au cas où un ou plusieurs des coefficients de l'équation précédente se trouvent, dans une équation nouvelle, multipliés par une quantité réelle, positive ou négative, plus petite que l'unité, ou par une quantité imaginaire, de module plus petit que l'unité.

En continuant de considérer les coefficients $p_1, p_2, \ldots, \pi_1, \pi_2, \ldots$ de l'équation précédente, l'équation nouvelle peut s'écrire

$$\begin{aligned} 1 = {} & \frac{p_1 S_1}{x} + \frac{p_2 S_2}{x^2} + \ldots + \frac{p_k S_k}{x^k} \\ & + \pi_1 \sigma_1 x + \pi_2 \sigma_2 x^2 + \ldots + \pi_{m-k} \sigma_{m-k} x^{m-k}, \end{aligned}$$

$S_1, S_2, \ldots, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$ étant des quantités quelconques de modules inférieurs à l'unité.

Continuons à considérer le jeu précédemment défini, avec les mêmes chances $p_1, p_2, \ldots, \pi_1, \pi_2, \ldots$ des joueurs, les mêmes enjeux, et les mêmes conventions pour la fin du jeu. Mais modifions les conditions du pari. Au lieu de recevoir un franc, si l'éventualité qu'il a choisie, parmi les m possibles, se réalise, le parieur recevra une somme déterminée d'après le nombre des parties qu'aura gagnées chaque joueur. Si l'on désigne par $n_1, n_2, \ldots, n_k, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{m-k}$ le nombre de parties gagnées par les joueurs d'indice correspondant, le compte, positif ou négatif, réel ou imaginaire du parieur, sera

$$S_1^{n_1} \times S_2^{n_2} \times S_k^{n_k} \times \sigma_1^{\nu_1} \times \sigma_2^{\nu_2} \times \ldots \times (\sigma_{m-k})^{\nu-m-k}.$$

Si l'on désigne par $\varphi(x)$ l'espérance mathématique du parieur en fonction de la fortune x de la cagnotte, l'expression qui permet de calculer la valeur de cette espérance est

$$\begin{aligned}\varphi(x) = p_1 S_1 \varphi(x-1) + p_2 S_2 \varphi(x-2) + \ldots \\ + p_k S_k \varphi(x+k) + \pi_1 \sigma_1 \varphi(x+1) + \pi_2 \sigma_2 \varphi(x+2) + \ldots \\ + \pi_{m-k} \sigma_{m-k} \varphi(x+m-k),\end{aligned}$$

et si l'on appelle $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ les racines de l'équation nouvelle, on aura

$$\varphi(x) = A_1 \beta_1^x + A_2 \beta_2^x + \ldots + A_m \beta_m^x.$$

Or il est évident que l'espérance mathématique de ce nouveau pari, en valeur absolue, ou son module, si elle est imaginaire, sera toujours inférieur à l'unité.

En effet, la quantité à donner ou recevoir par le parieur sera nulle, si l'éventualité choisie par le parieur ne se réalise pas, et dans tous les autres cas elle sera le produit de quantités inférieures à l'unité.

En conséquence, la démonstration que nous avons faite précédemment et qui, en somme, ne reposait que sur cette idée que $f(x)$ était une quantité limitée, s'applique *a fortiori* à $\varphi(x)$, avec cette seule différence qu'il n'y a plus de racine égale à l'unité, et que, dans ce cas plus général, il y a

$m-k$ racines de valeurs ou modules supérieurs à l'unité,
k racines de valeurs ou modules inférieurs à l'unité.

C. Q. F. D.

DEUXIÈME PARTIE.

Si l'on a à résoudre une équation algébrique

$$(1) \qquad 1 = p_1 x + p^2 x^2 + \ldots + p_m x^m$$

et qu'on forme l'équation aux différences finies

$$(2) \qquad f(x) = p_1 f(x+1) + p_2 f(x+2) + \ldots + p_m f(x+m):$$

on peut écrire, en appelant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ les racines de (1),

$$(3) \qquad f(x) = A_1\alpha_1^x + A_2\alpha_2^x + \ldots + A_m\alpha_m^x,$$

$A_1, A_2, \ldots, A_m$ étant des constantes arbitraires qu'on déterminera par les valeurs initiales qu'on choisira pour $f(x)$.

Prenons, par exemple,

$$\begin{aligned} f(m-1) &= 0,\\ f(m-2) &= 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ f(-1) &= 0,\\ f(0) &= 1; \end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned} &f(-1) = p_1,\\ &f(-2) = p_1^{-2} + p_2,\\ &f(-3) = p_1(p_1^{-2} + p_2) + p_2 p_1 + p_3,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et il sera facile, et même rapide (si les valeurs numériques des coefficients ne sont pas trop compliquées), de calculer un grand nombre de ces valeurs de $f(x)$ pour des valeurs négatives croissantes de la variable.

Or, si l'on suppose qu'on ait écrit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ dans l'ordre des valeurs croissantes des racines ou de leurs modules, il apparaît, d'après la relation (3) que, si α_1 est une racine réelle simple, le rapport $\dfrac{f(-m)}{f-(m+1)}$ tendra vers α_1.

Si, au contraire, α_1 et α_2 sont des racines imaginaires conjuguées, ce sont les deux termes correspondants à ces racines qui prévaudront dans le calcul de $f(x)$, dont les valeurs successives ne suivront plus la loi simple du cas précédent.

Supposons connues quatre valeurs successives a_1, a_2,

a_3, a_4, de la fonction $A_1\alpha_1^x + A_2\alpha_2^x$, c'est-à-dire

$$(4)\qquad a_1 = A_1\alpha_1^{-m} + A_2\alpha_2^{-m},$$
$$(5)\qquad a_2 = A_1\alpha_1^{-(m+1)} + A_2\alpha_2^{-(m+1)},$$
$$(6)\qquad a_3 = A_1\alpha_1^{-(m+2)} + A_2\alpha_2^{-(m+2)},$$
$$(7)\qquad \alpha_4 = A_1\alpha_1^{-(m+3)} + A_2\alpha_2^{-(m+3)},$$

il sera aisé de calculer α_1 et α_2.

En effet, soit

$$1 = q_1 x + q_2 x^2$$

l'équation du second degré dont α_1 et α_2 sont racines; on peut former l'équation aux différences finies

$$\varphi(x) = q_1\varphi(x+1) + q_2\varphi(x+2),$$

et si l'on pose

$$\varphi_{-m} = a_1,$$
$$\varphi_{-(m+1)} = a_2,$$

et qu'on détermine p_1 et p_2 par les conditions

$$a_3 = q_1 a_2 + q_2 a_1,$$
$$a_4 = q_1 a_3 + q_2 a_2,$$

les racines α_1 et α_2 de l'équation $1 = p_1 x + p_2 x^2$ satisferont aux équations (4), (5), (6) et (7).

De ce mode de détermination de p_1 et p_2 résultent les formules

$$q_1 = \frac{a_4 \times a_1 - a_2 \times a_3}{a_1 a_3 - (a_2)^2},$$
$$q_2 = \frac{(a_3)^2 - a_2 \times a_4}{a_1 \times a_3 - (a_2)^2},$$

qui ne dépendent que des rapports de a_1, a_2, a_3 et a_4.

Or si, après avoir calculé, au moyen de la relation (2), un certain nombre de valeurs de $f(x)$, on calcule q_1

et q_2 comme si l'on avait

$$f_{-(m+1)} = a_1,$$
$$f_{-(m+2)} = a_2,$$
$$f_{-(m+3)} = a_3,$$
$$f_{-(m+4)} = a_4,$$

on commettra une erreur d'autant moindre que m sera plus grand, et en résolvant l'équation $1 = q_1 x + q_2 x^2$, on aura des valeurs approchées de α_1 et α_2.

La règle pratique sera donc la suivante :

Calculer des valeurs successives $f(-1), f(-2), \ldots, f(-m)$, et surveiller le mode de variation de l'expression

$$[f_{-(m+2)}]^2 - [f_{-(m+1)}][f_{-(m+3)}].$$

Si cette expression tend vers zéro, avec des valeurs, soit toujours positives, soit toujours négatives de $\frac{f_{-(m+1)}}{f_{-(m+1)}}$, c'est la valeur de ce rapport, lorsqu'il sera devenu sensiblement constant, qui donnera la racine réelle α, la plus petite de toutes les racines.

Si, au contraire,

$$[f_{-(m+2)}]^2 - [f_{-(m+1)}][f_{-(m+3)}]$$

ne tend pas vers zéro, et si le rapport $\frac{f_{-(m+1)}}{f_{-(m+2)}}$ est tantôt positif, tantôt négatif, on verra toujours, sauf le cas d'exception des racines ou modules d'ordre multiple, l'expression

$$\frac{[f_{-(m+3)}]^2 - [f_{-(m+2)}][f_{-(m+4)}]}{[f_{-(m+2)}]^2 - [f_{-(m+1)}][f_{-(m+3)}]}$$

tendre vers une limite constante positive. C'est cette limite, prise avec le signe —, qui donnerait rigoureusement q_2, et c'est la valeur approchée de cette limite, prise avec le signe —, qui donnera la valeur approchée de q_2.

Quand on se sera arrêté dans le calcul des valeurs de $f(x)$ d'après les considérations précédentes, on évaluera, au moyen des quatre dernières valeurs calculées par la formule

$$q_1 = \frac{[f_{-(m+4)}] \times [f_{-(m+1)}] - [f_{-(m+2}][f_{-(m+3)}]}{[f_{-(m+1)}][f_{(m+3)}] - [f_{-(m+2}]^2},$$

et l'on trouvera, en résolvant l'équation $1 = q_1 x + q_2 x^2$, les valeurs approchées des deux racines imaginaires qui occupent le premier rang dans le Tableau par ordre de grandeur croissante des racines ou de leurs modules.

Il est clair que, dans la pratique, cette méthode sera d'autant plus expéditive que le rapport entre les valeurs ou les modules des quantités cherchées et celles qui viennent immédiatement après dans l'échelle des racines sera plus grand en valeur absolue.

Telle que nous l'avons exposée, la méthode ne s'appliquerait pas au cas où les racines cherchées sont d'ordre multiple.

Dans le cas où ces quantités, sans être rigoureusement égales à celles qui suivent, en seraient très voisines, la méthode, tout en restant théoriquement exacte, deviendrait pratiquement inapplicable.

Pour calculer la plus grande racine réelle, ou les deux plus grandes racines imaginaires de l'équation donnée, il suffira de considérer l'équation en $\frac{1}{x}$ et de procéder comme plus haut.

Enfin il serait possible, au moyen de transformations convenables, de modifier la place des diverses racines dans l'échelle des valeurs, de manière à pouvoir appliquer la méthode successivement aux diverses racines.

Nous nous réservons de compléter par l'étude de ces divers points les indications succinctes que nous venons de donner.

Nota. — Nous donnons ci-après deux exemples de l'application de la méthode, l'un au calcul d'une racine réelle, l'autre au calcul de deux racines imaginaires d'équations du quatrième degré.

APPLICATION DE LA MÉTHODE AU CALCUL DE LA PLUS PETITE RACINE DE L'ÉQUATION ALGÉBRIQUE

$$1 = x + x^2 + x^3 + x^4.$$

Tableau des valeurs successives de

$f(x) = f(x+1) + f(x+2) + f(x+3) + f(x+4)$.	$\log f(x)$.	$\log \frac{f-m}{f-(m+1)}$.
$f(3) = 0$		
$f(2) = 0$		
$f(1) = 0$		
$f(0) = 1$		
$f(-1) = 1 \times 1 = 1$		
$f(-2) = 1 \times 1 + 1 = 2$		
$f(-3) = 2 + 1 + 1 = 4$		
$f(-4) = 4 + 2 + 1 + 1 = 8$		
$f(-5) = 8 + 4 + 2 + 1 = 15$		
$f(-6) = 15 + 8 + 4 + 2 = 29$		
$f(-7) = 29 + 15 + 8 + 4 = 56$		
$f(-8) = 56 + 29 + 15 + 8 = 108$		
$f(-9) = 108 + 56 + 29 + 15 = 208$		
$f(-10) = 208 + 108 + 56 + 29 = 401$	2,6031444	
$f(-11) = 401 + 208 + 108 + 56 = 773$	2,8881795	$\bar{1}$,7149649
$f(-12) = 773 + 401 + 208 + 108 = 1490$	3,1731863	$\bar{1}$,7149932
$f(-13) = 1490 + 773 + 401 + 208 = 2872$	3,4581844	1,7150019
$f(-14) = 2872 + 1490 + 773 + 401 = 5536$	3,7431961	1,7149883
$f(-15) = 5536 + 2872 + 1490 + 773 = 10671$	4,0282051	$\bar{1}$,7149910
$f(-16) = 10671 + 5536 + 2872 + 1490 = 20569$	4,3132132	1,7149919
$f(-17) = 20569 + 10671 + 5536 + 2872 = 39648$	4,5982213	1,7149919
$f(-18) = 39648 + 20569 + 10671 + 5531 = 76424$	4,8832398	1,7149915

Conclusion. — La valeur approchée de la racine est 0,51879.

APPLICATION DE LA MÉTHODE AU CALCUL DES DEUX PLUS PETITES RACINES DE L'ÉQUATION

$$1 = 2x - 3x^2 + x^3 - 4x^4.$$

Tableau des valeurs successives de

$f(x) = 2f(x+1) - 3f(x+2) + f(x+3) - 4f(x+4)$	$\log(-q_2) = \log - \dfrac{(a_3)^2 - a_2 a_4}{(a_2)^2 - a_1 a_3}$.	$\log q_1 = \log \dfrac{a_1 a_4 - a_2 a_3}{a_1 a_3 - (a_2)^2}$.
$f(\ \ 0) = 1$		
$f(-1) = 2$		
$f(-2) = 4 - 3 = 1$		
$f(-3) = 2 - 6 + 1 = -3$		
$f(-4) = -6 - 3 + 2 - 4 = -11$		
$f - 5 = -22 + 9 + 1 - 8 = -20$		
$f(-6) = -40 + 33 - 3 - 4 + -14$		
$f - 7 = -28 + 60 - 11 + 12 = 33$		
$f - 8 = 66 + 42 - 20 + 44 = 132$		
$f - 9 = 264 - 99 - 14 + 80 = 231$		
$f - 10 = 462 - 396 + 33 + 56 = 155$		
$f - 11 = 310 - 693 + 132 - 132 = -383$		
$f - 12 = -766 - 465 + 231 - 528 = -1528$		
$f - 13 = -3056 + 1149 + 155 - 924 = -2676$		
$f - 14 = -5352 + 4584 - 383 - 620 = -1771$		
$f - 15 = -3542 + 8028 - 1528 + 1532 = -4490$		
$f - 16 = 8980 + 5313 - 2676 + 6112 = 17729$		
$f - 17 = 35458 - 13470 - 1771 + 10704 = 30921$		
$f - 18 = 61842 - 53187 + 4490 + 7084 = 20229$	0,5320813	0,4160344
$f - 19 = 40458 - 92763 + 17729 - 17960 = -52536$	0,5319672	0,4159493
$f - 20 = -105072 - 60687 + 30921 - 70916 = -205754$	0,5319621	0,4159422
$f - 21 = -411508 + 157608 + 20229 - 123684 = -357355$	0,5319429	0,4159527
$f - 22 = -714710 + 617262 - 52536 - 80916 = -230900$	0,5319531	0,4159570

Les quatre premières décimales des logarithmes des coefficients cherchés paraissent bien déterminées. En prenant

$$\log(-q_2) = 0{,}53195,$$
$$\log q_1 = 0{,}41595,$$

les deux racines imaginaires de l'équation donnée, qui sont en bas de l'échelle des valeurs absolues, résultent de l'équation du deuxième degré

$$1 = 2{,}606x - 3{,}404x^2.$$