Nouvelles annales de mathématiques

J. Tano

Quelques théorèmes sur les coefficients binomiaux

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 564-567

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__564_1>

QUELQUES THÉORÈMES SUR LES COEFFICIENTS BINOMIAUX;

Par M. J. TANO, à Rome.

J'indique par ρ une racine *primitive* de l'équation

$$x^n - 1 = 0,$$

et je considère la somme

$$\sum_0^{n-1}{}_s (1 - \rho^s)^m,$$

dans laquelle m est un entier positif quelconque; si, comme d'ordinaire, nous mettons

$$m_q = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-q+1)}{1.2.3\ldots q},$$

il est facile de voir qu'on a la relation suivante

$$\sum_{0}^{n-1}{}_s (1-\rho^s)^m = n - m_1 S_1 + m_2 S_2 - m_3 S_3 + \ldots$$
$$\pm m_n S_n \pm m_{n+1} S_{n+1} \pm \ldots + m_{2n} S_{2n} - \ldots,$$

ayant posé

$$S_r = 1 + \rho^r + \rho^{2r} + \rho^{3r} + \ldots + \rho^{(n-1)r}.$$

Or, il est connu que, si $r \equiv 0 \pmod n$, nous aurons $S_r = n$, et si r n'est pas $\equiv 0 \pmod n$, alors $S_r = 0$; par conséquent, si nous posons

$$\mu = E\left(\frac{m}{n}\right),$$

c'est-à-dire, si μ indique le plus grand entier contenu dans le quotient $\frac{m}{n}$, nous aurons

$$\sum_{0}^{n-1}{}_s (1-\rho^s)^m = n(1 + m_n + m_{2n} + m_{3n} + \ldots + m_{\mu n})$$

si n est *pair*; tandis qu'on obtiendra

$$\sum_{0}^{n-1}{}_s (1-\rho^s)^m = n[1 - m_n + m_{2n} - m_{3n} + \ldots + (-1)^\mu m_{\mu n}]$$

si n est *impair*.

Cela étant, considérons l'équation

$$x^3 - 1 = 0,$$

par elle on aura

$$1 - \rho = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right),$$

$$1 - \rho^2 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} - i \sin\frac{\pi}{6}\right),$$

et, par le théorème de Moivre, on a

$$(1-\rho)^m + (1-\rho^2)^m = 2.3^{\frac{m}{2}} \cos m\frac{\pi}{6}.$$

Supposons en premier lieu $m \equiv \pm 1 \pmod{12}$, on aura évidemment

$$2.3^{\frac{m}{2}} \cos m\frac{\pi}{6} = +3^{\frac{m+1}{2}};$$

au contraire, $m \equiv \pm 5 \pmod{12}$, on a

$$2.3^{\frac{m}{2}} \cos m\frac{\pi}{6} = -3^{\frac{m+1}{2}};$$

de manière que, en supposant que le symbole $\left(\frac{3}{m}\right)$ ait le même sens que lui a attribué Jacobi, on pourra poser

$$(1) \quad m_0 - m_3 + m_6 - m_9 + \ldots + (-1)^\mu m_{3\mu} = \left(\frac{3}{m}\right) 3^{\frac{m-1}{2}}.$$

Supposons maintenant m pair; dans ce cas, si nous avons $m \equiv 0 \pmod 6$, nous aurons

$$(2) \quad \frac{1}{2}[m_0 - m_3 + m_6 - m_9 + \ldots + (-1)^\mu m_{3\mu}] = (-1)^{\frac{m}{6}} 3^{\frac{m-2}{2}},$$

et si m n'est pas $\equiv 0 \pmod 6$, on a évidemment

$$(3) \quad m_0 - m_3 + m_6 - m_9 + \ldots + (-1)^\mu m_{3\mu} = (-1)^{\frac{m-2}{2}} 3^{\frac{m-2}{2}}.$$

Considérons à présent l'équation

$$x^4 - 1 = 0.$$

nous aurons

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$1 - i^3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

par conséquent,

$$(1 - i)^m + (1 - i^3)^m = 2.2^{\frac{m}{2}} \cos m\frac{\pi}{4};$$

si donc nous supposons $m \equiv 2 \pmod 4$, on aura

$$(1) \qquad m_0 + m_4 + m_8 + m_{12} + \ldots + m_{4\mu} = 4^{\frac{m-2}{2}}.$$

Enfin, observant que les nombres gaussiens, c'est-à-dire les nombres premiers de la forme $2^h + 1$, ne peuvent être que de la forme $12K + 5$, si nous indiquons par p un nombre gaussien, nous avons de l'expression (1) la congruence

$$3^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p.$$

Cette congruence démontre très simplement le théorème suivant dû à Richelot : *Le nombre* 3 *est racine primitive des nombres gaussiens* (1).