

J. TANO

**Quelques théorèmes sur les coefficients  
binomiaux**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 9  
(1890), p. 564-567

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1890\\_3\\_9\\_564\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9_564_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

**QUELQUES THÉORÈMES SUR LES COEFFICIENTS BINOMIAUX;**

PAR M. J. TANO, à Rome.

---

J'indique par  $\rho$  une racine *primitive* de l'équation

$$x^n - 1 = 0,$$

et je considère la somme

$$\sum_0^{n-1} (1 - \rho^s)^m,$$

dans laquelle  $m$  est un entier positif quelconque; si, comme d'ordinaire, nous mettons

$$m_q = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-q+1)}{1.2.3\dots q},$$

il est facile de voir qu'on a la relation suivante

$$\sum_0^{n-1} (1-\rho^s)^m = n - m_1 S_1 + m_2 S_2 - m_3 S_3 + \dots \\ \pm m_n S_n \pm m_{n+1} S_{n+1} \pm \dots + m_{2n} S_{2n} - \dots,$$

ayant posé

$$S_r = 1 + \rho^r + \rho^{2r} + \rho^{3r} + \dots + \rho^{(n-1)r}.$$

Or, il est connu que, si  $r \equiv 0 \pmod{n}$ , nous aurons  $S_r = n$ , et si  $r$  n'est pas  $\equiv 0 \pmod{n}$ , alors  $S_r = 0$ ; par conséquent, si nous posons

$$\mu = E\left(\frac{m}{n}\right),$$

c'est-à-dire, si  $\mu$  indique le plus grand entier contenu dans le quotient  $\frac{m}{n}$ , nous aurons

$$\sum_0^{n-1} (1-\rho^s)^m = n(1 + m_n + m_{2n} + m_{3n} + \dots + m_{\mu n})$$

si  $n$  est *pair*; tandis qu'on obtiendra

$$\sum_0^{n-1} (1-\rho^s)^m = n[1 - m_n + m_{2n} - m_{3n} + \dots + (-1)^\mu m_{\mu n}]$$

si  $n$  est *impair*.

Cela étant, considérons l'équation

$$x^3 - 1 = 0,$$

par elle on aura

$$1 - \rho = \sqrt{3} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right),$$

$$1 - \rho^2 = \sqrt{3} \left( \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right),$$

et, par le théorème de Moivre, on a

$$(1 - \rho)^m + (1 - \rho^2)^m = 2 \cdot 3^{\frac{m}{2}} \cos m \frac{\pi}{6}.$$

Supposons en premier lieu  $m \equiv \pm 1 \pmod{12}$ , on aura évidemment

$$2 \cdot 3^{\frac{m}{2}} \cos m \frac{\pi}{6} = + 3^{\frac{m+1}{2}};$$

au contraire,  $m \equiv \pm 5 \pmod{12}$ , on a

$$2 \cdot 3^{\frac{m}{2}} \cos m \frac{\pi}{6} = - 3^{\frac{m+1}{2}};$$

de manière que, en supposant que le symbole  $\left(\frac{3}{m}\right)$  ait le même sens que lui a attribué Jacobi, on pourra poser

$$(1) \quad m_0 - m_3 + m_6 - m_9 + \dots + (-1)^\mu m_{3\mu} = \left(\frac{3}{m}\right) 3^{\frac{m-1}{2}}.$$

Supposons maintenant  $m$  pair; dans ce cas, si nous avons  $m \equiv 0 \pmod{6}$ , nous aurons

$$(2) \quad \frac{1}{2} [m_0 - m_3 + m_6 - m_9 + \dots + (-1)^\mu m_{3\mu}] = (-1)^{\frac{m}{6}} 3^{\frac{m-2}{2}},$$

et si  $m$  n'est pas  $\equiv 0 \pmod{6}$ , on a évidemment

$$(3) \quad m_0 - m_3 + m_6 - m_9 + \dots + (-1)^\mu m_{3\mu} = (-1)^{\frac{m-2}{2}} 3^{\frac{m-2}{2}}.$$

Considérons à présent l'équation

$$x^4 - 1 = 0.$$

nous aurons

$$1 - i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right),$$

$$1 - i^3 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right),$$

par conséquent,

$$(1 - i)^m + (1 - i^3)^m = 2 \cdot 2^{\frac{m}{2}} \cos m \frac{\pi}{4};$$

si donc nous supposons  $m \equiv 2 \pmod{4}$ , on aura

$$(1) \quad m_0 + m_4 + m_8 + m_{12} + \dots + m_{4\mu} = 4^{\frac{m-2}{2}}.$$

Enfin, observant que les nombres gaussiens, c'est-à-dire les nombres premiers de la forme  $2^k + 1$ , ne peuvent être que de la forme  $12K + 5$ , si nous indiquons par  $p$  un nombre gaussien, nous avons de l'expression (1) la congruence

$$3^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Cette congruence démontre très simplement le théorème suivant dû à Richelot : *Le nombre 3 est racine primitive des nombres gaussiens* (1).