J.-B. POMEY

Démonstration des formules de Frenet

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 559-560

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__559_0>

DÉMONSTRATION DES FORMULES DE FRENET;

PAR M. J.-B. POMEY,
Ingénieur des Télégraphes, à Tours.

Les formules de Frenet relatives aux différentielles des cosinus directeurs de la tangente, de la normale et de la binormale en un point d'une courbe gauche peuvent s'obtenir aisément par les projections, de la manière suivante, qui n'a peut-être pas été publiée.

Soit

$$(1)\qquad \begin{cases} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda & \mu & \nu \end{cases}$$

le tableau des cosinus directeurs de la tangente, de la binormale et de la normale principale en un point M d'une courbe gauche. Prenons pour direction positive de la tangente celle des arcs s croissants, pour direction positive de la normale principale celle de la droite MO menée du point M au centre de courbure O, et pour direction positive de la binormale le sens tel que le déterminant formé par le tableau (1) soit égal à $+1$.

Soit k la courbure, ε l'angle de contingence, on aura

$$\varepsilon = k\,ds$$

et k sera considéré comme une grandeur absolue.

Soit τ la torsion, η l'angle de deux plans osculateurs infiniment voisins, on aura

$$\eta = \tau\,ds;$$

τ et η seront considérés comme positifs si la rotation d'un angle η autour de la tangente MT fait décrire au point O un élément de chemin OO_1 dans la direction positive de la binormale.

Soit M′ un point infiniment voisin de M. Négligeons les infiniment petits d'ordre supérieur au premier. La tangente MT étant la caractéristique du plan osculateur, le plan osculateur en M′ est le plan mené par MT qui fait avec le plan OMT un angle η. Soit OC l'axe du plan osculateur, le plan normal a OC pour caractéristique; donc le plan normal en M′ est le plan mené par OC qui fait avec le plan COM un angle égal à ε. L'intersection du plan osculateur et du nouveau plan normal est la nouvelle normale principale M′O′ qui coupe OC en un point O_1. Soit A l'origine des trois axes rectangulaires Ax, Ay, Az. Soient m, m' les points dont les coordonnées sont a, b, c et $a + da$, $b + db$, $c + cd$. On a $mm' = \varepsilon$ et mm' est parallèle à la normale principale MO et de même sens. En projetant sur Ax le contour Amm', on a

$$da = \lambda k \, ds.$$

Soient c et c' les points dont les coordonnées sont α, β, γ et $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$, $\gamma + d\gamma$. On a $cc' = \operatorname{mod} \eta$, et $c'c$ est parallèle à la normale principale MO; $c'c$ est dirigé suivant MO ou en sens contraire, suivant que η est positif ou négatif. En projetant sur Ax le contour Acc', on a

$$d\alpha = - \lambda \tau \, ds.$$

Projetons sur Ax le contour MOO_1M' et remarquons que OO_1 est dirigé suivant la binormale ou en sens contraire, selon que η est positif ou négatif, et il vient

$$d\lambda = \alpha \tau \, ds - ak \, ds.$$

Les autres formules de Frenet s'obtiennent en projetant les mêmes contours sur les autres axes de coordonnées.