NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P. DE SANCTIS

Recherche d'une équation des surfaces moulures

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 552-556

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__552_1>

RECHERCHE D'UNE ÉQUATION DES SURFACES MOULURES;

PAR M. P. DE SANCTIS,
Docteur ès Sciences de la Faculté de Rome.

On sait que les surfaces moulures peuvent être engendrées par une courbe tracée sur un plan qui se meut perpendiculairement à une autre courbe dans l'espace en ne roulant jamais autour de la tangente à cette seconde courbe.

En partant de cette définition, on peut trouver l'équation d'une surface moulure quelconque.

Soient

$$(1) \qquad x = \varphi(\gamma), \qquad y = \psi(\gamma), \qquad z = \gamma$$

les équations d'une courbe dans l'espace, γ étant le paramètre fondamental, l'équation

$$(2) \qquad (x-\varphi)\frac{d\varphi}{d\gamma} + (y-\psi)\frac{d\psi}{d\gamma} + z - \gamma = 0$$

représente, pour les différentes valeurs de γ, les différentes positions du plan normal à la courbe (1). Cette courbe rencontre le plan normal qui correspond à la valeur quelconque

$$\gamma = \gamma_0$$

du paramètre, dans le point

$$x = \varphi(\gamma_0), \qquad y = \psi(\gamma_0), \qquad z = \gamma_0.$$

Si l'on appelle s l'arc de la courbe dans l'espace et ρ son rayon de courbure, les cosinus de direction de la normale principale à la courbe (1) sont

$$\frac{1}{\rho}\frac{d^2x}{ds^2}, \quad \frac{1}{\rho}\frac{d^2y}{ds^2}, \quad \frac{1}{\rho}\frac{d^2z}{ds^2};$$

en outre,

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{d\gamma}\frac{d\gamma}{ds}, \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{d\gamma}\frac{d\gamma}{ds}, \qquad \frac{dz}{ds} = \frac{d\gamma}{ds},$$

et, puisque

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

en posant

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{d\gamma}, \qquad \psi' = \frac{d\psi}{d\gamma}, \qquad \varphi'' = \frac{d^2\varphi}{d\gamma^2}, \qquad \psi'' = \frac{d^2\psi}{d\gamma^2},$$

on aura

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{d\gamma}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\gamma}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi'^2 + \psi'^2}}.$$

De là on tire, au moyen d'une dérivation,

$$\frac{d^2\gamma}{ds^2} = -\frac{\varphi'\varphi'' + \psi'\psi''}{(1 + \varphi'^2 + \psi'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or on a

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d^2x}{d\gamma^2}\left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2 + \frac{dx}{d\gamma}\frac{d^2\gamma}{ds^2},$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{d^2y}{d\gamma^2}\left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2 + \frac{dy}{d\gamma}\frac{d^2\gamma}{ds^2},$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} = \frac{d^2\gamma}{ds^2},$$

et, par conséquent, en substituant,

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{\varphi''(1+\varphi'^2+\psi'^2)^{\frac{1}{2}} - \varphi'(\varphi'\varphi''+\psi'\psi'')}{(1+\varphi'^2+\psi'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{\psi''(1+\varphi'^2+\psi'^2)^{\frac{1}{2}} - \psi'(\varphi'\varphi''+\psi'\psi'')}{(1+\varphi'^2+\psi'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} = -\frac{\varphi'\varphi''+\psi'\psi''}{(1+\varphi'^2+\psi'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Les trois quantités $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$, $\frac{d^2z}{ds^2}$ sont proportionnelles aux cosinus des angles que la normale principale à la courbe (1) fait avec les axes; par conséquent, l'équation du plan de la tangente et de la binormale à la même courbe est la suivante :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}&(x-\varphi)\left[\varphi''(1+\varphi'^2+\psi'^2)^{\frac{1}{2}} - \varphi'(\varphi'\varphi''+\psi'\psi'')\right]\\ &\quad+(y-\psi)\left[\psi''(1+\varphi'^2+\psi'^2)^{\frac{1}{2}} - \psi'(\varphi'\varphi''+\psi'\psi'')\right]\\ &\quad\quad-(z-\gamma)(\varphi'\varphi''+\psi'\psi'') = 0.\end{aligned}\right.$$

Pour les différentes valeurs de γ l'équation précédente donne les différentes positions du plan de la tangente et de la binormale.

Divisons le premier membre de l'équation (3) par le coefficient du dernier terme et écrivons les équations (2) et (3) symboliquement de la façon suivante :

$$Z = A_1(x-\varphi) + A_2(y-\psi) + z - \gamma = 0,$$
$$X = B_1(x-\varphi) + B_2(y-\psi) + z - \gamma = 0.$$

L'équation du plan de la tangente et de la normale principale à la courbe (1) sera alors

$$(A_2 - B_2)(x-\varphi) + (B_1 - A_1)(y-\psi) + (A_1B_2 - A_2B_1)(z-\gamma) = 0.$$

que nous écrirons brièvement

$$Y = 0.$$

Aux plans coordonnés fixes substituons les plans coordonnés mobiles

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0.$$

Les formules de transformation des coordonnées, comme on le voit facilement, sont

$$(4) \qquad \begin{cases} X = B_1(x-\varphi) + B_2(y-\psi) + z - \gamma, \\ Y = (A_2 - B_2)(x-\varphi) + (B_1 - A_1)(y-\psi) \\ \qquad + (A_1 B_2 - A_2 B_1)(z-\gamma), \\ Z = A_1(x-\varphi) + A_2(y-\psi) + z - \gamma. \end{cases}$$

Sur le plan normal à la courbe (1) et dont l'équation dans le nouveau système d'axes mobiles est

$$(5) \qquad Z = 0,$$

soit située une courbe

$$(6) \qquad f(X, Y) = 0.$$

Si nous substituons à X, Y leurs valeurs (4), nous aurons une équation contenant x, y, z, γ, et cette équation avec l'équation (5) nous représente, pour les valeurs successives de γ, les positions successives de la courbe plane. Il est sous-entendu que la substitution voulue par les équations (4) doit aussi être faite dans le premier membre de l'équation (5).

Si nous éliminons γ dans les deux équations (5) et (6) transformées, nous obtiendrons une équation résultante qui nous donnera la position générique de la courbe plane : c'est-à-dire la surface engendrée par son mouvement, qui n'est autre que la surface moulure dont elle est le profil. Comme on le voit, cette équation contient les différences partielles du second ordre des fonetions φ et ψ.

En faisant varier les fonctions f, φ, ψ, on a toutes les surfaces moulures.