

DE SAINT-GERMAIN

Note sur le problème de mécanique proposé au concours d'agrégation en 1890

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 9
(1890), p. 546-552

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9_546_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**NOTE SUR LE PROBLÈME DE MÉCANIQUE PROPOSÉ
AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1890.**

(Extrait d'une lettre de M. DE SAINT-GERMAIN à M. ROUCHÉ).

Je vais encore indiquer, pour quelques lecteurs des *Nouvelles Annales*, une solution du problème de Mécanique proposé en 1890 au concours d'agrégation des Sciences mathématiques : la question est classique ; les calculs seuls exigent un peu d'attention.

Il s'agit, en premier lieu, de trouver la grandeur et la direction des axes de l'ellipsoïde d'inertie P, relatif au centre de gravité G d'un tétraèdre homogène OABC dont le trièdre en O est trirectangle, et où l'on a

$$OA = a = \sqrt{2}, \quad OB = b = 1, \quad OC = c = \sqrt{3};$$

on propose ensuite de déterminer le mouvement du tétraèdre, en supposant qu'il ne soit pas pesant et que son mouvement initial se réduise à une rotation dont l'axe passe au point G et dont les composantes, suivant l'axe majeur, l'axe moyen et l'axe mineur de P, soient

$$p_0 = \sqrt{6 + \sqrt{5}}, \quad q_0 = 0, \quad r_0 = \sqrt{6 - \sqrt{5}}.$$

1° Soient ε la densité du tétraèdre, m sa masse. Prenons d'abord les droites OA, OB, OC pour axes des x , des y , des z et cherchons les intégrales de la forme

$$U = \iiint \varepsilon x^2 dx dy dz, \quad V = \iiint \varepsilon yz dx dy dz,$$

étendues à tout le volume du tétraèdre : un calcul très simple, que des considérations géométriques peuvent

encore abrégé, donne

$$U = \frac{a^3 b c \varepsilon}{60} = \frac{m a^2}{10}, \quad V = \frac{a b^2 c^2 \varepsilon}{120} = \frac{m b c}{20} :$$

ces résultats se déduiraient immédiatement de la formule, bonne à retenir,

$$\iiint x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} dx dy dz = a^p b^q c^r \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r+1)},$$

l'intégrale s'étendant à la partie de l'espace où x, y, z sont positifs et satisfont à l'inégalité

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq 1.$$

Par le point G, dont les coordonnées sont $\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, \frac{c}{4}$, menons des axes Gx', Gy', Gz' parallèles aux premiers : l'équation de l'ellipsoïde central P sera de la forme

$$(1) \quad \mathfrak{A} x'^2 + \mathfrak{B} y'^2 + \mathfrak{C} z'^2 - 2\mathfrak{D} y' z' - 2\mathfrak{E} z' x' - 2\mathfrak{F} x' y' = 1,$$

et l'on a, d'après des théorèmes bien connus et d'après les valeurs des intégrales analogues à U et à V,

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \sum (y'^2 + z'^2) dm \\ &= \sum (y^2 + z^2) dm - \frac{b^2 + c^2}{16} m = 3 \frac{b^2 + c^2}{80} m, \\ \mathfrak{D} &= \sum y' z' dm = \sum \left(y - \frac{b}{4} \right) \left(z - \frac{c}{4} \right) dm = - \frac{bcm}{80}. \end{aligned}$$

Avec les valeurs numériques attribuées à a, b, c , on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \frac{12m}{80}, & \mathfrak{B} &= \frac{15m}{80}, & \mathfrak{C} &= \frac{9m}{80}, \\ \mathfrak{D} &= - \frac{m\sqrt{3}}{80}, & \mathfrak{E} &= - \frac{m\sqrt{6}}{80}, & \mathfrak{F} &= - \frac{m\sqrt{2}}{80}. \end{aligned}$$

Rapporté à ses axes principaux $G\xi, G\eta, G\zeta$, P aurait pour équation

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1,$$

A, B, C étant égaux aux moments principaux d'inertie relatifs au point G, et aussi aux racines de l'équation en S pour la surface (1) : écrivons cette équation sous la forme, dite de Jacobi,

$$(2) \quad \frac{1}{\mathfrak{O}^2(S-\lambda)} + \frac{1}{\mathfrak{C}^2(S-\mu)} + \frac{1}{\mathfrak{F}^2(S-\nu)} + \frac{1}{\mathfrak{O}\mathfrak{C}\mathfrak{F}} = 0,$$

en posant

$$\lambda = \mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{F}}{\mathfrak{O}} = \frac{5m}{40}, \quad \mu = \dots = \frac{7m}{40}, \quad \nu = \frac{3m}{40}.$$

Pour simplifier l'écriture, faisons $m = 40$, puis, dans l'équation (2), remplaçons les lettres par leurs valeurs et réduisons : il vient

$$S^3 - 18S^2 + 103S - 186 = 0;$$

on trouve que cette équation a pour racines 6 et $6 \pm \sqrt{5}$.
Nous poserons

$$A = 6 - \sqrt{5}, \quad B = 6, \quad C = 6 + \sqrt{5};$$

le moment d'inertie minimum A correspond à l'axe majeur $G\xi$ de P, B à l'axe moyen, C à l'axe mineur.

Les cosinus directeurs de ces axes sont, on le sait, proportionnels aux inverses de $\mathfrak{O}(S-\lambda)$, $\mathfrak{C}(S-\mu)$, $\mathfrak{F}(S-\nu)$ en faisant S égal à A pour $G\xi$, à B pour $G\eta$, à C pour $G\zeta$: on trouve pour ces trois axes respectifs, après quelques réductions simples,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha'}{\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)} &= \frac{\beta}{\sqrt{5}-1} = \frac{\gamma}{-\sqrt{3}(3+\sqrt{5})} = \frac{\pm 1}{\sqrt{60+20\sqrt{5}}}, \\ \frac{\alpha'}{\sqrt{6}} &= \frac{\beta'}{-\sqrt{3}} = \gamma' = \frac{\pm 1}{\sqrt{10}}, \\ \frac{\alpha''}{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)} &= \frac{\beta''}{\sqrt{5}+1} = \frac{\gamma''}{\sqrt{3}(3-\sqrt{5})} = \frac{\pm 1}{\sqrt{60-20\sqrt{5}}}. \end{aligned}$$

2° La recherche du mouvement du tétraèdre revient à celle du mouvement de l'ellipsoïde P qui lui est lié d'une manière fixe et connue, sinon simple. Le centre G reste immobile et P est animé d'un *mouvement de Poin-sot*. Pour déterminer ce mouvement, on calcule d'abord, en fonction du temps, les composantes p , q , r de la rotation instantanée suivant $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$. A cet effet, j'associe la seconde équation d'Euler à celles qui expriment la conservation de la force vive et du couple résultant des quantités de mouvement : j'ai trois équations de la forme

$$Ap^2 + \dots = H, \quad A^2p^2 + \dots = K^2, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{C-A}{B}pr,$$

qui, eu égard aux valeurs de A , B , C , p_0 , q_0 , r_0 , deviennent

$$(3) \quad (6 - \sqrt{5})p^2 + 6q^2 + (6 + \sqrt{5})r^2 = 31 \times 2,$$

$$(4) \quad (6 - \sqrt{5})^2p^2 + 36q^2 + (6 + \sqrt{5})^2r^2 = 31 \times 12.$$

$$(5) \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\sqrt{5}}{3}pr.$$

L'élimination de q entre les équations (3) et (4) donne

$$(6) \quad \frac{r}{p} = \pm \sqrt{\frac{6 + \sqrt{5}}{6 - \sqrt{5}}};$$

le signe $+$, qui convient d'abord, doit être conservé jusqu'à ce que p et r s'annulent, ce qui, on le verra, ne se produira jamais. Le lieu de l'axe instantané dans le solide est un plan. On est dans le cas simple où la distance $\frac{\sqrt{H}}{K}$ du centre G au plan sur lequel P doit rouler

est égale au demi-axe moyen de l'ellipsoïde. Des équations (3) et (6) on déduit

$$(7) \quad p = \pm \sqrt{\frac{31 - 3q^2}{6 - \sqrt{5}}}, \quad r = \pm \sqrt{\frac{31 - 3q^2}{6 + \sqrt{5}}};$$

on prendra les signes + qui conviennent à l'état initial. L'équation (5) donne alors

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\sqrt{5}}{3} \frac{31 - 3q^2}{\sqrt{31}}$$

ou, en posant, pour abrégier,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{5}{3}} &= n, & \sqrt{31} &= \omega \sqrt{3}, \\ n dt &= \frac{\omega dq}{\omega^2 - q^2}. \end{aligned}$$

Intégrons, en nous rappelant que q_0 est nul, et résolvons par rapport à q : il vient

$$q = \omega \frac{e^{2nt} - 1}{e^{2nt} + 1} = \omega \frac{e^{nt} - e^{-nt}}{e^{nt} + e^{-nt}};$$

les équations (7) donnent, après des réductions simples,

$$p = \frac{2\sqrt{6 + \sqrt{5}}}{e^{nt} + e^{-nt}}, \quad r = \frac{2\sqrt{6 - \sqrt{5}}}{e^{nt} + e^{-nt}}.$$

Rien de plus facile que de discuter les valeurs de p , q , r . L'axe de la rotation instantanée, d'abord égal à $\sqrt{31}$, tend, pour t infini, à devenir égal à ω ou à $\sqrt{\frac{31}{3}}$ et à prendre la direction de $G\eta$.

Reste à déterminer, pour chaque instant, la position de P par rapport à un système d'axes fixes $Gx_1y_1z_1$;

Gz_1 coïncide avec l'axe du couple K des quantités de mouvement, $G\gamma_1$ avec la position initiale de $G\gamma$, Gx_1 forme avec $G\gamma_1 z_1$ un trièdre superposable à $G\xi\eta\zeta$. La position de ce dernier trièdre par rapport à $Gx_1\gamma_1 z_1$ sera définie par les trois angles d'Euler ψ , θ , φ et il suffit de faire la figure pour voir qu'à l'instant initial on a

$$\psi = \frac{3\pi}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \theta_0 = \arccos \sqrt{\frac{6 + \sqrt{5}}{12}}.$$

Les angles θ et φ sont donnés par les équations bien connues

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{Cr}{K} = \frac{\sqrt{6 + \sqrt{5}}}{(e^{nt} + e^{-nt})\sqrt{3}}, \\ \sin \theta \sin \varphi &= \frac{Ap}{K} = \frac{\sqrt{6 - \sqrt{5}}}{(e^{nt} + e^{-nt})\sqrt{3}}, \\ \sin \theta \cos \varphi &= \frac{Bq}{K} = \frac{e^{nt} - e^{-nt}}{e^{nt} + e^{-nt}}; \end{aligned}$$

pour t infini, θ tend vers $\frac{\pi}{2}$, φ vers zéro; à la limite, $G\zeta$ et $G\xi$ sont dans le plan $Gx_1\gamma_1$ et $G\gamma_1$ coïncide avec Gz_1 ou K .

La détermination de ψ exige une quadrature : on a

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \frac{p \sin \varphi + q \cos \varphi}{\sin \theta} \\ &= \frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2 p^2 + B^2 q^2} K = \frac{(e^{2nt} + e^{-2nt})\sqrt{93}}{3e^{2nt} - \sqrt{5} + 3e^{-2nt}}; \end{aligned}$$

l'équation peut se mettre sous la forme

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \frac{12ne^{2nt}}{\sqrt{31} \left[1 + \frac{(6e^{2nt} - \sqrt{5})^2}{31} \right]}.$$

L'intégration introduit un arc tang, qu'on sup-

(552)

posera compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et dont la valeur initiale est θ_0 ; on aura

$$\psi = \omega t + \text{arc tang} \frac{6e^{2\omega t} - \sqrt{5}}{\sqrt{31}} + \frac{3\pi}{2} - \theta_0.$$

Il est sans doute inutile d'insister sur l'interprétation bien connue des résultats précédents, ni sur la recherche de l'herpolhodie, la polhodie étant une ellipse.