NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CH. MÉRAY

Sur quelques perfectionnements dont serait susceptible l'exposition de la théorie des quantités négatives

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 50-59

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__50_0>

SUR QUELQUES PERFECTIONNEMENTS DONT SERAIT SUSCEPTIBLE L'EXPOSITION DE LA THÉORIE DES QUANTITÉS NÉGATIVES.

Extrait de *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques* (en préparation);

PAR M. CH. MÉRAY,
Professeur à la Faculte des Sciences de Dijon,

AVEC LA COLLABORATION DE M. CH. RIQUIER,
Professeur à la Faculté des Sciences de Caen.

Une confusion trop prématurée et trop absolue faite entre les signes *opératoires* de l'addition et de la soustraction et les signes *constitutionnels* des quantités positives et négatives, faite encore entre les quantités positives et leurs valeurs numériques, rend les principes de cette théorie à peu près inintelligibles pour les commençants. Ses applications à la spécification mathématique des grandeurs convenables dans deux sens contraires, et la pratique du calcul algébrique, finissent sans doute par leur apprendre le maniement de ces quantités; mais ils parviennent bien rarement à se rendre un compte parfaitement raisonné de ce qu'ils font ainsi.

En procédant comme ci-après, il semble qu'on réussirait à éviter toute obscurité et qu'on gagnerait par surcroît l'avantage de ne pas s'écarter du domaine de l'Algèbre pure.

. . . .

15. De même que la substitution des nombres fractionnaires aux nombres entiers rend toutes les divisions possibles et permet même de changer une multiplication en une division ou inversement, celle des nouvelles quantités fictives dont nous allons parler aux nombres fractionnaires absolus ajoute à ce double avantage celui de supprimer les soustractions impossibles et de per-

mettre aussi de remplacer à volonté une soustraction par une addition ou bien une addition par une soustraction.

Nous appellerons provisoirement *qualifiées* des quantités absolues (14) conventionnellement pourvues de certaines qualités factices les rendant aptes à subir les opérations également factices qui vont être successivement définies.

A chaque quantité absolue a non $=$ o correspondront *deux* quantités qualifiées dites l'une *positive*, l'autre *négative* dont nous appellerons ce nombre a la *valeur absolue* (quelquefois *numérique*) et que provisoirement nous noterons par $\overrightarrow{a}$, $\overleftarrow{a}$ respectivement.

A la quantité absolue o correspondra *une seule* quantité qualifiée dite *neutre* et de *valeur absolue nulle*, que nous représenterons par $\overleftrightarrow{o}$.

Deux quantités qualifiées dont les valeurs absolues sont égales entre elles, mais non à o, seront dites *égales* si leurs noms sont identiques, *opposées* s'ils sont différents.

Deux quantités neutres seront dites *indéfiniment égales* ou *opposées*.

16. L'*addition* de plusieurs quantités qualifiées données consiste à faire la somme des valeurs absolues, de celles qui sont positives, celle des valeurs absolues des négatives, et à qualifier du nom de la plus grande de ces deux sommes son excès sur la plus petite (on néglige naturellement les quantités neutres). Quand cet excès est nul, par exemple quand il s'agit d'additionner deux quantités qualifiées opposées, on prend $\overleftrightarrow{o}$ pour résultat.

Par exemple, en conservant pour toutes nos opérations factices les signes opératoires employés dans le calcul des quantités absolues, on aura

$$\overrightarrow{3} + \overleftarrow{7} + \overleftarrow{2} + \overleftrightarrow{0} + \overrightarrow{10} + \overleftrightarrow{0} = \overrightarrow{4},$$

$$\overleftrightarrow{0} + \overleftarrow{5} + \overrightarrow{2} = \overleftarrow{3},$$

$$\left(\overrightarrow{\tfrac{3}{4}}\right) + \left(\overleftarrow{\tfrac{3}{4}}\right) = \overleftrightarrow{0}.$$

Une somme de plusieurs quantités qualifiées reste la même si l'on modifie arbitrairement l'ordre de succession de ses termes, si l'on y introduit ou qu'on en ôte un nombre quelconque de parties neutres.

17. *Deux quantités qualifiées quelconques étant données, on peut toujours en trouver une troisième et une seule dont l'addition à la seconde reproduise la première.* Pour exécuter cette *soustraction,* il suffit d'ajouter à la première quantité l'opposée de la seconde (15). Le résultat est la *différence* de ces quantités considérées dans l'ordre indiqué.

Exemples :

$$\overrightarrow{5} - \overleftarrow{6} = \overrightarrow{5} + \overrightarrow{6} = \overrightarrow{11},$$

$$\overleftarrow{7} - \overleftarrow{3} = \overleftarrow{7} + \overrightarrow{3} = \overleftarrow{4},$$

$$\left(\overrightarrow{\tfrac{5}{3}}\right) - \left(\overrightarrow{\tfrac{5}{3}}\right) = \left(\overleftarrow{\tfrac{5}{3}}\right) - \left(\overleftarrow{\tfrac{5}{3}}\right) = \left(\overrightarrow{\tfrac{5}{3}}\right) + \left(\overleftarrow{\tfrac{5}{3}}\right) = 0.$$

18. *Deux quantités qualifiées, quand elles sont égales entre elles, ont leur différence neutre et réciproquement.*

Quand elles sont inégales, elles ont une différence positive ou négative. On dit, selon l'un ou l'autre de ces deux cas, que la première est *supérieure* ou *inférieure* à la seconde.

Par exemple,

$$\overrightarrow{7} > \left(\overrightarrow{\tfrac{1}{2}}\right) > \overleftrightarrow{0} > \overleftarrow{11} > \overleftarrow{15}$$

ou bien encore

$$\overleftarrow{15} < \overleftarrow{11} < \overleftrightarrow{0} < \left(\overrightarrow{\tfrac{1}{2}}\right) < \overrightarrow{7}.$$

En particulier, *la quantité neutre* $\overleftrightarrow{0}$ *est supérieure à toute quantité négative, inférieure au contraire à toute quantité positive.*

19. *Des quantités qualifiées données étant combinées dans un certain ordre par voie d'additions et soustractions consécutives, le même résultat final est encore obtenu si, à l'addition ou à la soustraction d'une quelconque de ces quantités, on substitue respectivement la soustraction ou l'addition de la quantité opposée.*

Par exemple,

$$\begin{aligned}
&\overleftarrow{5} - \overleftarrow{11} + \overrightarrow{6} - \overleftarrow{3} = \overleftarrow{5} + \overrightarrow{11} + \overrightarrow{6} - \overleftarrow{3} \\
&= \overleftarrow{5} - \overleftarrow{11} - \overleftarrow{6} + \overrightarrow{3} = \ldots \\
&= \overleftarrow{5} + \overrightarrow{11} + \overrightarrow{6} - \overrightarrow{3} = \overrightarrow{15}.
\end{aligned}$$

En particulier, cette observation permet de remplacer toutes les soustractions par l'addition des quantités opposées à celles qu'il faut soustraire, c'est-à-dire de transformer toujours en une somme l'expression considérée.

Si donc, *on compose plusieurs notations simples en unissant indissolublement diverses quantités qualifiées à des signes opératoires* $+$ *ou* $-$ *placés devant elles; si* *l'on écrit ces notations les unes à la suite des autres en convenant de remplacer la première par* $\overrightarrow{a}$ *quand elle est* $+\overrightarrow{a}$ *ou* $-\overleftarrow{a}$, *par* $\overleftarrow{a}$ *quand elle est* $-\overrightarrow{a}$ *ou* $+\overleftarrow{a}$, *on obtient une notation composee représentant la même quantité qualifiée, quel que soit l'ordre de succession adopté pour les notations simples.*

Une pareille notation composée se nomme un *polynôme* dont les divers *termes* sont les notations simples formées ainsi par des associations artificielles de signes opératoires $+$, $-$ avec des quantités qualifiées.

La valeur d'un polynôme ne change pas non plus, si dans quelques termes on change simultanément le signe opératoire et le nom de la quantité qualifiée qu'il précède.

En écrivant ses termes par groupes quelconques, on obtient des polynômes partiels représentant des quantités dont la somme reproduit toujours la valeur du proposé.

20. Le *produit* de plusieurs quantités qualifiees est celui qui a pour valeur absolue le produit des valeurs absolues des *facteurs*, et qui est positive quand le nombre des facteurs négatifs est nul ou pair, négative quand ce nombre est impair, neutre quand quelqu'un des facteurs l'est lui-même.

Exemples :

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overleftarrow{a} \times \overleftarrow{b} = (\overrightarrow{ab}),$$

$$\overleftarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times \overleftarrow{b} = (\overleftarrow{ab}),$$

$$\overrightarrow{a} \times \overleftrightarrow{0} = \overleftarrow{a} \times \overleftrightarrow{0} = \overleftrightarrow{0}.$$

Pour qu'un pareil produit soit neutre, il faut donc et il suffit que l'un au moins de ses facteurs le soit lui-même.

21. *Le produit de deux polynômes peut s'obtenir en en formant un autre qui a pour termes les divers produits des quantités qualifiées figurant dans le premier par celles qui figurent dans le second, chacun de ces produits partiels étant précédé du signe opératoire + ou — selon que, dans les polynômes proposés, ses facteurs sont précédés de signes identiques ou différents.*

Exemple :

$$\left(+\overleftarrow{a} \dot{-} \overrightarrow{a}\right)\left(-\overrightarrow{c}-\overrightarrow{d}\right)=-\left(\overleftarrow{ac}\right)-\left(\overleftarrow{ad}\right)+\left(\overrightarrow{bc}\right)+\left(\overrightarrow{bd}\right).$$

22. Le *quotient* de la *division* d'une première quantité qualifiée par une seconde sera (en cas qu'elle existe) la quantité dont le produit par celle-ci régénère la première. Sa recherche conduit aux résultats suivants :

1° Quand le *diviseur* n'est pas neutre, le quotient existe *et il est unique :* I° neutre si *le dividende* l'est; II° non neutre, si le dividende ne l'est pas, et alors positif ou négatif selon que les noms du dividende et du diviseur sont identiques ou différents; de plus, sa valeur absolue est toujours égale au quotient de celle du dividende divisée par celle du diviseur;

2° Quand le diviseur est neutre : I° la division est impossible si le dividende ne l'est pas en même temps; II° la division redevient possible, mais le quotient est absolument et entièrement indéterminé si le dividende est neutre aussi.

Exemples (b non $=$ o) :

$$\frac{\overleftrightarrow{0}}{\overrightarrow{b}}=\frac{\overleftrightarrow{0}}{\overleftarrow{b}}=\overleftrightarrow{0},$$

$$\frac{\overrightarrow{a}}{\overrightarrow{b}} - \frac{\overleftarrow{a}}{\overleftarrow{b}}=\left(\overrightarrow{\frac{a}{b}}\right),$$

$$\frac{\overrightarrow{a}}{\overleftarrow{b}} = \frac{\overleftarrow{a}}{\overrightarrow{b}} = \left(\frac{\overleftarrow{a}}{b}\right),$$

$$\frac{\overleftrightarrow{0}}{\overleftrightarrow{0}} = \text{telle quantité qualifiée qu'on voudra.}$$

Comme on a

$$\overrightarrow{a} \times \overleftarrow{1} = \frac{\overrightarrow{a}}{\overleftarrow{1}} = \overleftarrow{a},$$

$$\overleftarrow{a} \times \overleftarrow{1} = \frac{\overleftarrow{a}}{\overleftarrow{1}} = \overrightarrow{a},$$

le changement d'une quantité qualifiée en son opposée équivaut à sa multiplication ou à sa division par $\overleftarrow{1}$.

23. *Dans un monôme, expression composée ne comportant que des multiplications et des divisions, la substitution, à un facteur ou diviseur, de la quantité qualifiée qui lui est opposée change seulement le nom du résultat, sans changer sa valeur absolue.*

En combinant cette remarque avec celle du n° 19, on aperçoit que *dans toute expression impliquant seulement l'exécution d'additions, soustractions, multiplications et divisions de quantités qualifiées, on peut où l'on voudra remplacer l'un par l'autre les signes opératoires* $+$, $-$, *à condition de changer en même temps d'une manière convenable les noms de quelques-unes de ces quantités.*

En particulier, *on peut ainsi n'y laisser subsister que des signes* $+$; *cela même se fait de plusieurs manières.*

Exemple :

$$\frac{\overleftarrow{3}-\overrightarrow{4}}{\overrightarrow{1}-\overrightarrow{8}}-\frac{\overleftarrow{7}-\overleftarrow{1}}{\overrightarrow{5}\,.\,\overrightarrow{4}-\overleftarrow{10}\,.\,\overleftarrow{10}}$$

$$=\frac{\overleftarrow{3}+\overleftarrow{4}}{\overrightarrow{1}+\overleftarrow{8}}+\frac{\overrightarrow{7}+\overleftarrow{1}}{\overrightarrow{5}\,.\,\overrightarrow{4}-\overrightarrow{10}\,.\,\overleftarrow{10}}$$

$$=\frac{\overrightarrow{3}+\overrightarrow{4}}{\overleftarrow{1}+\overrightarrow{8}}+\frac{\overleftarrow{7}+\overrightarrow{1}}{\overleftarrow{5}\,.\,\overrightarrow{4}+\overrightarrow{10}\,.\,\overrightarrow{10}}=\ldots.$$

24. *Si* R *est le résultat d'opérations, additions et multiplications, soustractions et divisions (ces deux dernières sortes d'opérations étant naturellement supposées possibles) exécutées sur les quantités absolues*

$$a,\quad b,\quad c,\quad \ldots,\quad 0,$$

la quantité positive $\overrightarrow{\mathrm{R}}$ $\left(\textit{ou neutre } \overleftrightarrow{0} \textit{ si } \mathrm{R}=0\right)$ *est aussi le résultat des opérations homonymes dans la théorie des quantités qualifiées qu'on exécuterait parallèlement sur les quantités positives ou neutres*

$$\overrightarrow{a},\quad \overrightarrow{b},\quad \overrightarrow{c},\quad \ldots,\quad \overleftrightarrow{0}.$$

Cette proposition évidente autorise la substitution systématique, aux nombres absolus définis dans le paragraphe précédent, des quantités positives dont ils sont les valeurs numériques. Et sa combinaison avec la possibilité constante de toutes les soustractions qualifiées, d'une part (17), avec les observations des n^os 19 et 23, d'autre part, assure à la substitution dont il s'agit les deux avantages annoncés au n° 15.

Moyennant la substitution ultérieure de quelques quantités négatives à des quantités positives, on reste notamment maître *de ne laisser subsister dans une* *expression donnée que ceux des signes opératoires + ou — qui facilitent le mieux la conception, la généralisation et l'énonciation des résultats obtenus dans la question où elle se présente.* C'est en procédant ainsi qu'on est arrivé, par exemple, à cet énoncé simple et lumineux de la règle de multiplication de deux polynômes quelconques :

Le produit est la somme des produits partiels des termes du multiplicande et du multiplicateur transformés de manière à ne plus contenir l'un et l'autre que des signes opératoires +.

25. Le plus souvent (mais pas toujours) on a intérêt à ne laisser partout que le signe opératoire + ; le mécanisme *habituel* de cette transformation d'un polynôme à termes absolus en une somme de quantités qualifiées consiste donc à substituer une quantité positive à chaque nombre absolu qui est précédé du signe + et une quantité négative, précédée du même signe +, à chaque notation complexe constituée par un nombre absolu précédé du signe — et par le signe — lui-même.

Mais s'il demeure bien sous-entendu que le polynôme qualifié ne contiendra jamais que des signes +, on peut se contenter de retenir que des nombres absolus a, b, ... doivent être remplacés par les quantités positives $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, ... et des notations telles que $-a$, $-b$, ... par les quantités négatives $\overleftarrow{a}$, $\overleftarrow{b}$, ... Cette manière de voir les choses conduit à juger équivalentes les notations

$$\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \ldots,\ \overleftarrow{a},\ \overleftarrow{b},\ \ldots$$

d'une part,

$$a,\ b,\ \ldots,\ -a,\ -b,\ \ldots$$

d'autre part, et, d'autre part encore, par extension,

$$+a, \quad +b, \quad \ldots, \quad -a, \quad -b, \quad \ldots.$$

L'usage courant est conforme à ce dernier point de vue : on trouve commode de confondre les quantités positives avec leurs valeurs absolues, sauf à écrire devant les notations de celles-ci, quand on tient à mieux affirmer qu'on les a transformées par la pensée en des quantités positives, le signe opératoire + *changé tacitement en signe qualificatif*, et à représenter une quantité négative par la notation de sa valeur absolue précédée du signe opératoire — *pris de même dans un sens nouveau qui est purement qualificatif*. C'est ainsi qu'on est ramené à dire que *les quantités positives ont le signe + et les quantités négatives le signe* —, bien qu'il ne s'agisse pas nécessairement d'additions ou de soustractions à exécuter.

Enfin le théorème du n° 24 conduit encore à identifier la quantité neutre $\overset{\longleftrightarrow}{0}$ avec le zéro naturel.

. . . .

Mais, en réalité, un nombre n'est pas une quantité positive; et, pour la notation habituelle des quantités négatives, le signe — n'est détourné de son sens opératoire que par une convention tacite. On ne verra plus les quantités négatives à travers un nuage en ne l'oubliant pas, en se souvenant aussi qu'il y a, *non une théorie des quantités négatives, mais bien une théorie des quantités factices tant positives que négatives.*

Ce mode d'exposition peut, à ce qu'il semble, se passer d'illustrations empruntées à la considération des grandeurs concrètes *dirigées;* c'est au début des diverses théories où les grandeurs se rencontrent qu'il convient le mieux d'expliquer l'application des quantités positives et négatives à leur représentation analytique.