Nouvelles annales de mathématiques

Maximilien Marie

Réalisation et usage des formes imaginaires en géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 508-528

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__508_1>

RÉALISATION ET USAGE DES FORMES IMAGINAIRES EN GÉOMÉTRIE.

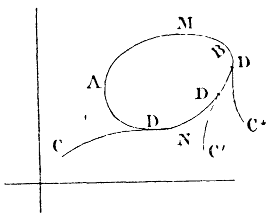
CONFÉRENCES DONNÉES PAR M. MAXIMILIEN MARIE
au Collège Stanislas, à Sainte-Barbe, à l'École Sainte-Geneviève
et à l'École Monge (¹).

14. *De la manière la plus générale dont s'engendrent les périodes correspondant aux parcours des anneaux fermés de l'une des deux enveloppes.* — Il n'est pas nécessaire que le point décrivant $[x, y]$ passe même

(¹) *Voir* même tome, p. 435.

une seule fois sur l'un de ces anneaux, pour que s'engendre la période qui correspondrait à son parcours. En effet, soit AMBNA (*fig.* 16) l'un de ces anneaux : supposons que les deux limites $[x_0, y_0]$, $[x, y]$ de l'intégrale $\int y\,dx$ appartiennent à deux conjuguées CD, C′D′, tangentes en D et D′ à l'anneau AMBNA, et représentent les points C et C′ des deux conjuguées : l'intégrale $\int y\,dx$, à la différence près des expressions algébriques des aires des triangles introduits par les changements de direction de l'axe des y en C, D, D′ et C′, se composera de l'aire, en partie réelle et en partie imaginaire, du segment de la conjuguée CD, compris entre l'arc CD, l'axe des x et les cordes réelles de la conjuguée CD,

Fig. 16.



menées en C et en D ; de la valeur de l'intégrale $\int y\,dx$, prise le long de l'arc DD′ de l'enveloppe ; enfin, de l'aire, en partie réelle et en partie imaginaire, du segment de la conjuguée D′C′, compris entre l'arc D′C′, l'axe des x et les cordes réelles de la conjuguée D′C′, menées en D′ et C′.

Si, la limite inférieure $[x_0, y_0]$ restant fixe, la limite supérieure $[x, y]$ se transportait de C′ en C″ sur la conjuguée C″D″, la première partie de l'intégrale resterait fixe, la seconde s'accroîtrait de la valeur de l'intégrale $\int y\,dx$, prise le long de l'arc D′D″ de l'anneau considéré de l'enveloppe, enfin la troisième varierait en raison de la substitution de l'arc D″C″ à l'arc D′C′.

Supposons maintenant que, la limite supérieure continuant à se mouvoir dans le même sens, le point D'' s'avance sur l'arc $DND'D''BMAD$, de façon à rejoindre à la fin le point D, en même temps que le point C'' reviendrait au point C, l'accroissement total de l'intégrale $\int y\,dx$ se réduira à la valeur de l'intégrale prise le long de l'anneau DNBMAD de l'enveloppe.

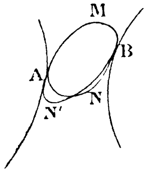
C'est de cette façon, en général, que s'engendrent les périodes relatives aux parcours des anneaux fermés des deux enveloppes.

Au reste, le multiple, sous lequel chaque période devra entrer dans la valeur de l'intégrale, sera marqué par le nombre de fois que la limite supérieure aura passé successivement et dans le même ordre sur toutes les conjuguées tangentes à l'anneau correspondant.

15. *De la manière la plus générale dont s'engendrent les périodes correspondant aux parcours des anneaux fermés des conjuguées.* — Nous avons vu que le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire enfermée dans un anneau, composé de points imaginaires conjugués deux à deux, qui se rejoignent sur les deux branches de la courbe réelle entre lesquelles sont comprises des conjuguées fermées d'une même catégorie, constitue une période égale à celle qui s'engendrerait dans le parcours d'une de ces conjuguées fermées; mais, comme nous l'avons également remarqué, il n'est pas nécessaire, pour que la même période s'engendre, que les deux arcs de l'anneau fermé, qui ont leurs extrémités sur les deux branches de la courbe réelle, soient composés de points imaginaires conjugués deux à deux. En effet, si AMBNA (*fig.* 17) est tel que les points de AMB et de ANB soient deux à deux imaginaires conjugués, on pourra toujours, d'après le théorème de Cauchy, substituer au chemin BNA, par

exemple, un autre chemin voisin BN′A, ce qui n'altérera pas l'intégrale, et le chemin AMBN′A ne sera plus composé de points imaginaires conjugués deux à deux; la valeur de l'intégrale, le long de ce nouveau parcours AMBN′A, n'en restera pas moins égale au produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire entourée par une des conjuguées fermées;

Fig. 17.

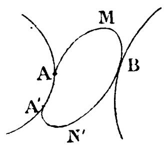


toute la différence sera que cette valeur de l'intégrale n'aura plus une relation simple avec les aires des segments correspondants aux arcs AMB et AN′B.

C'est ainsi, généralement, que s'engendrent les périodes qui représentent les produits par $\sqrt{-1}$ des aires enveloppées par les anneaux fermés de conjuguées.

Quant au multiple entier, sous lequel chacune des périodes de ce genre devrait entrer dans la valeur de

Fig. 18.



l'intégrale, il se comptera par le nombre de fois que le chemin suivi par le point mobile $[x, y]$ aura successivement touché les deux branches de la courbe réelle, sans rebroussement; car, si le chemin ne se fermait pas, comme dans le parcours AMBN′A′ (*fig.* 18), la période imaginaire n'en serait pas moins complète, puisqu'en fermant le parcours, par l'addition du chemin A′A, on n'ajouterait rien à la partie imaginaire de l'intégrale.

16. *Sur une forme géométrique singulière que peuvent affecter les périodes engendrées dans le parcours d'une des enveloppes.* — Chacune des périodes imaginaires, engendrées dans le parcours des conjuguées, a toujours une infinité de représentations géométriques, sous la forme des aires des anneaux fermés de ces conjuguées ; tandis que les périodes, engendrées dans le parcours de l'une ou l'autre enveloppe, n'en ont jamais qu'une chacune ; d'où il résulte que les premières sont toujours beaucoup mieux représentées que les autres.

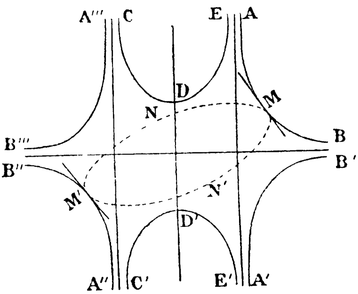
Parmi les formes géométriques des périodes de la première espèce, il s'en trouve toujours de singulières : ce sont celles des anneaux qui dégénèrent en branches infinies, lorsqu'on fait tendre la caractéristique de la conjuguée vers le coefficient angulaire de l'une des asymptotes aux branches de la courbe réelle qui comprennent entre elles un anneau de la conjuguée.

On pourrait toujours éviter la considération d'une conjuguée ainsi déformée, puisqu'on aurait à sa disposition une infinité d'autres anneaux fermés se prêtant beaucoup mieux, par exemple, à une quadrature approchée.

Il n'en sera naturellement plus de même si c'est l'une des périodes engendrées dans le parcours de l'une ou l'autre enveloppe, qui se présente sous une forme géométrique singulière, puisqu'il n'en existera pas d'autre représentation. Il importe donc de pouvoir reconnaître ces périodes sous leur figure exceptionnelle.

Mais nous donnerons d'abord un exemple de ce qui vient d'être dit : considérons l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ qui donne l'aire de la courbe $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$, figurée en ABA'B'A''B''A'''B'''; cette courbe est du quatrième degré, si on lui mène deux tangentes parallèles en M et en M', une droite quelconque parallèle à ces deux tangentes et comprise entre elles, ne coupera la courbe réelle qu'en deux points; il se trouvera donc, entre ces deux tangentes, un anneau fermé de la conjuguée, dont la caractéristique serait le coefficient angulaire des deux tan-

Fig. 19.



gentes. Le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire, enfermée dans cet anneau MNM'N', sera une période de l'intégrale.

L'anneau MNM'N' s'allongerait indéfiniment si la direction commune des deux tangentes tendait à devenir parallèle à l'axe des y et à la limite, cet anneau dégénérerait dans la courbe à branches infinies CDEE'D'C', dont l'équation en coordonnées réelles serait

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

de sorte que l'aire MNM'N' se transformerait dans l'aire egale, comprise entre les deux branches CDE, C'D'E' et leurs asymptotes CC' et DD'.

Considérons maintenant l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$: les limites étant supposées les mêmes de part et d'autre, les deux intégrales auront les mêmes valeurs, au facteur $\sqrt{-1}$ près; si la période de la première est le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire CDEE'D'C', celle de l'autre sera égale à cette même aire considérée comme réelle.

Mais la période imaginaire de la première intégrale aura une infinité de représentations géométriques, tandis que la période réelle de la seconde n'en a qu'une, exceptionnelle.

L'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ est $\arcsin x$, dont la période est 2π; et 2π représente l'aire CDEE'D'C' ou celle qu'enveloppe l'anneau MNM'N'N.

17. *Condition pour que l'aire comprise entre une branche de courbe et son asymptote soit finie.* — Les considérations précédentes nous amènent à rechercher la condition pour que l'aire comprise entre une courbe et son asymptote soit finie.

Supposons qu'on ait pris l'asymptote pour axe des y; l'équation de la courbe, supposée résolue par rapport à y, sera

$$y = \frac{\varphi(x)}{x^\alpha};$$

$\varphi(x)$ ne devenant ni nul ni infini pour $x = 0$.

L'intégrale quadratrice de la courbe sera

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{x^\alpha},$$

et l'aire de la courbe, comprise entre cette courbe et son asymptote, sera

$$\int_0^\varepsilon \frac{\varphi(x)\,dx}{x^\alpha},$$

ε étant aussi petit qu'on le voudra.

$\varphi(x)$ ne variera qu'infiniment peu de o à ε : on pourra donc le remplacer par $\varphi(o) = A$, par exemple ; l'intégrale se réduira ainsi à

$$A\int_0^\varepsilon \frac{dx}{x^\alpha} = A\int_0^\varepsilon x^{-\alpha}\,dx = A\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_0^\varepsilon.$$

Si $1-\alpha$ est positif, ou si α est moindre que 1, l'intégrale aura pour valeur

$$A\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} - 0$$

et restera finie, tandis que si $1-\alpha$ est négatif, ou si α est plus grand que 1, l'intégrale acquerra une valeur

$$A\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} \quad \infty,$$

et croîtra indéfiniment.

On sait du reste, par l'exemple de l'hyperbole du second degré, que, si $\alpha = 1$, l'intégrale prendra une valeur infinie.

La condition pour que l'aire reste finie est donc

$$\alpha < 1$$

C'est ce qui arrive pour chacune des asymptotes des deux courbes, conjuguées l'une de l'autre,

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

La condition peut s'exprimer sous une forme préférable : elle signifie que

$$\frac{x\,\varphi(x)}{x^\alpha}$$

doit tendre vers o pour $x = o$.

Mais x, dans ce qui précède, représente la distance d'un point de la courbe à l'asymptote et $\frac{\varphi(x)}{x^\alpha}$ représente l'ordonnée de la courbe; or, si l'on fait intervenir un changement d'axes, la distance d'un point de la courbe à son asymptote changera simplement d'expression, et quant à l'ordonnée, restée infinie, du point de la courbe, elle sera simplement multipliée par un rapport de sinus, de sorte que si, dans un système d'axes, le produit de l'ordonnée, devenue infinie, d'un point d'une branche indéfinie d'une courbe, par la distance, évanouissante, d'un point de cette branche à son asymptote, tend vers zéro ou croît indéfiniment, il en sera de même dans tout autre système d'axes.

On pourrait donc, les axes étant quelconques et l'équation de l'asymptote à la branche de courbe considérée étant $y - cx - d = 0$, se borner à évaluer la limite vers laquelle tendrait le produit

$$y(y - cx - d),$$

lorsque x croîtrait indéfiniment : l'aire comprise entre la courbe et son asymptote serait finie ou infinie, selon que la limite trouvée serait nulle ou infinie.

Mais, lorsqu'il s'agit d'une courbe algébrique, la condition peut recevoir une expression géométrique très simple et dont l'existence sera toujours facile à vérifier.

L'équation d'une courbe algébrique ayant pour asymptote l'axe des y est de la forme

$$xy^{m-1} + (ax^2 + bx + c)y^{m-2} + \ldots = 0;$$

il s'agit d'exprimer la condition pour que le produit de x tendant vers zéro par y devenu infini tende vers zéro. Posons $xy = z$, d'où $y = \frac{z}{x}$, la relation entre z

et x sera

$$z^{m-1} + (ax^2 + bx + c)z^{m-2} + (dx^3 + ex^2 + fx + g)xz^{m-3} + \ldots = 0.$$

Cette équation, pour $x = 0$, a toujours au moins $(m-2)$ racines nulles, qui sont les produits des $(m-2)$ valeurs finies de y par x devenu nul: la dernière est c. Ainsi, pour que le produit de $x = 0$ par $y = \infty$ soit nul, il faut que $c = 0$, c'est-à-dire que l'asymptote coupe la courbe en trois points situés à l'infini.

Telle est la condition générale pour que l'aire comprise entre une courbe algébrique et son asymptote soit finie.

Mais cela suppose que la courbe n'ait pas d'autres asymptotes parallèles à celle que l'on considère. Dans le cas contraire, on trouverait par le même calcul qu'il faudrait que l'asymptote considérée coupât la courbe à l'infini en un nombre de points égal à $3 +$ le nombre des asymptotes parallèles à la première.

Corollaire. — Dans l'exemple qui nous a servi précédemment, des deux courbes $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, conjuguées l'une de l'autre, les quadratrices avaient la même période, réelle dans l'une et affectée du signe $\sqrt{-1}$ dans l'autre. Le fait est évidemment général, parce que si une courbe a pour conjuguée une autre courbe, réciproquement, la seconde a pour conjuguée la première, et les anneaux fermés réels de l'une se retrouvent imaginaires dans l'autre.

Remarque. — Il n'y aurait pas lieu de rechercher des périodes imaginaires dans les aires des conjuguées qui ne toucheraient que l'enveloppe imaginaire, parce que ces conjuguées ne pourraient pas présenter d'anneaux fermés. En effet, on ne pourrait même pas leur mener de tangentes parallèles à leurs cordes réelles, car le point de contact d'une pareille tangente réunirait deux points imaginaires conjugués et serait, par conséquent, réel, c'est-à-dire appartiendrait à la courbe réelle.

18. *Des périodes cycliques ou logarithmiques.* — Il nous reste à parler d'une classe particulière de périodes, dont la théorie et la génération n'ont rien de particulier, mais qui s'expriment, dans tous les lieux, d'une façon exceptionnelle très simple. Ce sont les produits par $\sqrt{-1}$ des aires d'anneaux fermés qui se séparent des conjuguées auxquelles ils appartiennent, lorsque les caractéristiques de ces conjuguées tendent à venir se confondre avec les coefficients angulaires des asymptotes du lieu.

Si une asymptote d'une courbe algébrique de degré m coupe la courbe en $(m - 2)$ points à distance finie, les deux branches correspondantes de la courbe se trouvent de part et d'autre de l'asymptote et la touchent à l'infini à ses deux extrémités opposées. Ces deux branches présentent chacune un certain nombre de points d'inflexion, à partir du dernier desquels chacune des branches ne formera plus qu'un arc dont les points se rapprocheront de plus en plus de l'asymptote. Si l'on conçoit à ces deux arcs terminaux deux tangentes parallèles, très peu inclinées sur la direction de l'asymptote, une parallèle quelconque à ces deux tangentes, et comprise entre elles, coupera le lieu, à distance finie, en des points infiniment peu éloignés de ceux où l'asymptote elle-même coupe déjà ce lieu à distance finie, c'est-à-dire en $m - 2$ points. Mais il en manquera deux, situés à des distances plus ou moins grandes; d'où il faut conclure que les deux tangentes comprendront entre elles un anneau de la conjuguée ayant pour caractéristique leur coefficient angulaire commun, anneau d'ailleurs complètement isolé des autres branches de la même conjuguée. Le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire de cet anneau fermé sera une des périodes de la quadratrice de la courbe; c'en sera une période cyclique.

Tous ces anneaux ont même aire : le fait n'a pas besoin d'une nouvelle démonstration; mais à la limite ils deviennent des ellipses, dont l'aire constante peut être évaluée. Ces ellipses recouvrent deux fois l'asymptote, comme si l'équation de la courbe était du second degré et représentait une hyperbole.

En effet, si l'asymptote en question a été prise pour axe des y et que l'équation de la courbe soit

$$xy^{m-1} + (ax^2 + bx + c)y^{m-2} + \ldots = 0,$$

on a vu que le produit de x, tendant vers zéro par y devenu infini, a pour limite $-c$. Cela signifie que les deux branches de la courbe, asymptotes à l'axe des y, tendent à se confondre avec l'hyperbole du second degré

$$xy = -c,$$

et, par conséquent, que l'une des conjuguées du lieu tend à se confondre, dans une de ses parties, avec une conjuguée de l'hyperbole $xy = -c$. La coïncidence n'a lieu, il est vrai, que lorsque les cordes réelles de la conjuguée sont devenues parallèles à l'asymptote; mais, à ce moment, l'anneau considéré de la conjuguée devient une ellipse indéfiniment allongée et indéfiniment aplatie; d'un autre côté, l'aire enveloppée par cet anneau, tout en changeant de figure, a conservé la même valeur; on peut donc prendre pour cette valeur celle de l'aire de l'ellipse, laquelle est $\pm 2\pi c$, de sorte que la période est

$$\pm 2\pi c\sqrt{-1}.$$

19. *Relation entre les m périodes cycliques d'un lieu de degré m.* — La quadratrice d'une courbe de degré m a, en général, m périodes cycliques; mais ces périodes ne sont pas indépendantes.

En effet, soit

$$(y - a_1 x - b_1)(y - a_2 x - b_2)\ldots(y - a_m x - b_m) + x^{m-2}\varphi_{m-2}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \ldots = 0$$

l'équation de la courbe.

Si l'on voulait rendre nulle la période cyclique relative à l'asymptote $y - a_1 x - b_1 = 0$, il faudrait faire en sorte que cette asymptote coupât la courbe en $m - 3$ points seulement à distance finie; mais, en éliminant y entre l'équation de la courbe et $y = a_1 x + b_1$, on trouverait

$$x^{m-2}\varphi_{m-2}\left(1, a_1 + \frac{b_1}{x}\right) + x^{m-3}\ldots = 0;$$

de sorte que pour faire disparaître le terme en x^{m-2}, il faudrait faire en sorte que $\varphi_{m-2}(1, a_1)$ fût nul.

On pourrait bien ainsi faire disparaître $m - 2$ périodes cycliques en posant

$$\varphi_{m-2}\left(1, \frac{y}{x}\right) = k\left(\frac{y}{x} - a_1\right)\left(\frac{y}{x} - a_2\right)\ldots\left(\frac{y}{x} - a_{m-2}\right);$$

mais, pour en faire disparaître encore une, il faudrait faire $k = 0$, et alors la dernière disparaîtrait aussi.

Ainsi les m périodes cycliques de la quadratrice d'un lieu de degré m sont nécessairement liées entre elles par une relation telle que, si $m - 1$ d'entre elles sont nulles, la dernière l'est aussi.

Cette relation consiste en ce que *la somme des périodes cycliques est toujours nulle*, pourvu, bien entendu, qu'on en tire les expressions d'une même formule générale ; car, autrement, chacune d'elles pouvant recevoir le double signe $\pm\sqrt{-1}$, la somme totale ne serait pas déterminée.

Remarquons d'abord que, si l'équation de la courbe a été mise sous la forme

$$L(x-h)y^{m-1}+(Mx^2+Nx+P)y^{m-2}+\ldots=0,$$

les axes faisant entre eux un angle α, la période cyclique relative à l'asymptote $x=h$ sera exprimée par

$$\frac{2\pi(Mh^2+Nh+P)\sin\alpha}{L}\sqrt{-1}.$$

Cela posé, soit, en coordonnées rectangulaires,

$$(y-a_1x-b_1)(y-a_2x-b_2)\ldots(y-a_mx-b_m)$$
$$+x^{m-2}\varphi_{m-2}\left(1,\frac{y}{x}\right)+\ldots=0$$

l'équation de la courbe : rendons l'axe des y parallèle à l'asymptote $y=a_1x+b_1$, sans changer l'origine, ni l'axe des x, les formules de transformation seront

$$x=x'+y\cos\alpha_1 \qquad \text{et} \qquad y=y'\sin\alpha_1,$$

α_1 désignant l'angle dont la tangente est a_1.

La substitution donnera

$$(-a_1x'-b_1)[y'(\sin\alpha_1-a_2\cos\alpha_1)-a_2x'-b_2]\ldots$$
$$\times[y'(\sin\alpha_1-a_m\cos\alpha_1)-a_mx'-b_m]$$
$$+\varphi_{m-2}(x'+y'\cos\alpha_1, y'\sin\alpha_1)+\ldots=0;$$

en conséquence, le coefficient de $x'y'^{m-1}$ sera

$$L=-a_1\cos^{m-1}\alpha_1(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_m).$$

Quant au terme en y'^{m-2}, qui proviendrait de

$$(-a_1x'-b_1)[y'(\sin\alpha_1-a_2\cos\alpha_1\ -a_2x'-b_2]\ldots$$
$$\times[y'(\sin\alpha_1-a_m\cos\alpha_1)-a_mx'-b_m],$$

il disparaîtrait de lui-même, quand on y ferait

$$a_1x'+b_1=0,$$

il sera donc inutile de le transcrire.

Il reste à chercher la partie utile du coefficient de y^{m-2} dans

$$\varphi_{m-2}(x'+y'\cos\alpha_1 . y'\sin\alpha_1).$$

Ce coefficient est simplement

$$\varphi_{m-2}(\cos\alpha_1,\sin\alpha_1),$$

ou, à cause de l'homogénéité de cette fonction,

$$\cos^{m-2}\alpha_1\,\varphi_{m-2}(1,a_1).$$

La période cyclique relative à l'asymptote

$$y-a_1x-b_1=0$$

est donc

$$\frac{2\pi\sqrt{-1}\cos^{m-2}\alpha_1\,\varphi_{m-2}(1,a_1)\sin\alpha_1}{-a_1\cos^{m-1}\alpha_1(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_m)}$$

ou, simplement,

$$-\frac{2\pi\sqrt{-1}\,\varphi_{m-2}(1,a_1)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_m)}.$$

Les autres s'exprimeraient de la même manière.

Mais un polynôme de degré $(m-2)$ est déterminé par $(m-1)$ substitutions et, d'après la formule de Lagrange,

$$\begin{aligned}\varphi_{m-2}(1.a) = {}&\ \varphi_{m-2}(1,a_1)\frac{(a-a_2)(a-a_3)\ldots(a-a_{m-1})}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_{m-1})}\\ &+\varphi_{m-2}(1,a_2)\frac{(a-a_1)(a-a_3)\ldots(a-a_{m-1})}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_1-a_{m-1})}\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+\varphi_{m-2}(1,a_{m-1})\frac{(a-a_1)\ldots(a-a_{m-2})}{(a_{m-1}-a_1)\ldots(a_{m-1}-a_{m-2})}.\end{aligned}$$

En remplaçant, dans cette identité, a par a_m, il vient

$$\begin{aligned}\varphi_{m-2}(1, a_m) = \quad & \varphi_{m-1}(1, a_1)\frac{(a_m - a_2)\ldots(a_m - a_{m-1})}{(a_1 - a_2)\ldots(a_1 - a_{m-1})} \\ & + \varphi_{m-2}(1, a_2)\frac{(a_m - a_1)\ldots(a_m - a_{m-1})}{(a_2 - a_1)\ldots(a_2 - a_{m-1})} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \varphi_{m-2}(1, a_{m-1})\frac{(a_m - a_1)\ldots(a_m - a_{m-2})}{(a_{m-1} - a_1)\ldots(a_{m-1} - a_{m-2})},\end{aligned}$$

ou, en multipliant les deux termes de la première fraction du second membre par $(a_1 - a_m)$, les deux termes de la seconde par $(a_2 - a_m)$, ..., divisant les deux membres par

$$(a_m - a_1)(a_m - a_2)\ldots(a_m - a_{m-1}),$$

et, faisant tout passer dans le premier membre,

$$\sum \frac{\varphi_{m-2}(1, a_1)}{(a_1 - a_2)\ldots(a_1 - a_m)} = 0$$

ou

$$\sum \frac{\varphi_{m-2}(1. a_1)}{\varphi'_m(1, a)_{a=a_1}} = 0.$$

C. Q. F. D.

20. Théorème. — *Les périodes cycliques de la quadratrice d'une courbe algébrique de degré m sont les produits par* $2\pi\sqrt{-1}$ *des racines d'une équation algébrique de degré m, manquant de second terme, et dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de ceux de l'équation de la courbe.*

En effet, soit $2\pi\sqrt{-1}\,R$ l'une des périodes cycliques, R est donné par la formule

$$R = \frac{\varphi_{m-2}(1, a)}{\varphi'_m a},$$

a désignant le coefficient angulaire de l'une des asymptotes, racine de l'équation $\varphi_m(a) = 0$, de sorte que les valeurs de R seraient les racines de l'équation qu'on obtiendrait en éliminant a entre les équations

$$R = \frac{\varphi_{m-2}(1, a)}{\varphi'_m(a)} \qquad \text{et} \qquad \varphi_m(a) = 0.$$

Mais les coefficients de $\varphi_{m-2}(1, a)$ ne sont pas explicités dans l'équation de la courbe ; car, dans ce qui précède, $\varphi_{m-2}(x, y)$ désigne la différence entre l'ensemble des termes de degré $(m - 2)$ du premier membre de l'équation de la courbe, lesquels seuls sont connus d'avance, et l'ensemble des termes de degré $(m - 2)$ du produit

$$(y - a_1 x - b_1)(y - a_2 x - b_2)\ldots(y - a_m x - b_m).$$

Mais l'expression générale d'un terme de degré $(m - 2)$ de ce produit est

$$b_1 b_2 (y - a_3 x)(y - a_4 x)\ldots(y - a_m x)$$

ou

$$\frac{\varphi_{m-1}(1, a_1)\varphi_{m-1}(1, a_2)}{\varphi'_m(1, a_1)\varphi'_m(1, a_2)}(y - a_3 x)(y - a_4 x)\ldots(y - a_m x),$$

$\varphi_{m-1}(x, y)$ désignant l'ensemble connu des termes de degré $(m - 1)$ du premier membre de l'équation de la courbe, telle qu'elle est donnée, de sorte que l'ensemble des termes que l'on cherchait est

$$\sum \frac{\varphi_{m-1}(1, a_1)\varphi_{m-1}(1, a_2)}{\varphi'_m(1, a_1)\varphi'_m(1, a_2)}(y - a_3 x)\ldots(y - a_m x).$$

Or les coefficients de cette fonction de x et de y seront des fonctions symétriques de $a_1, a_2, \ldots, a_m$; ils s'exprimeront donc rationnellement en fonction des coefficients de $\varphi_m(x, y)$; par conséquent, les coefficients de $\varphi_{m-2}(x, y)$

ou ceux de $\varphi_{m-2}(1, a)$ s'exprimeront aussi rationnellement en fonction des coefficients donnés de l'équation de la courbe.

Donc les coefficients de l'équation en R seront des fonctions rationnelles des coefficients de l'équation donnée de la courbe proposée.

Ainsi, la théorie des périodes cycliques est ramenée à celle des équations algébriques. On pourra savoir si la quadratrice d'une courbe a des périodes cycliques égales, si les quadratrices de deux courbes ont des périodes cycliques communes, etc. ([1]).

21. *Classification des quadratrices des courbes algébriques d'après le nombre et l'espèce de leurs périodes.* — D'après la théorie qui a été exposée dans ce qui précède, les périodes de l'intégrale quadratrice d'une courbe algébrique sont représentées par les aires d'anneaux fermés de la courbe réelle, des conjuguées de cette courbe ou de l'enveloppe imaginaire; mais les figures géométriques de ces anneaux ne dépendent pas du choix des axes : les périodes de l'intégrale quadratrice d'une courbe restent donc toujours les mêmes, quels que soient les axes auxquels cette courbe soit rapportée.

Nous savons dans quelles conditions les périodes cycliques peuvent disparaître.

D'un autre côté, si un anneau fermé de la courbe réelle ou d'une conjuguée devient accidentellement évanouissant, l'aire qu'il enveloppait sera nulle et la quadratrice de la courbe perdra une de ses périodes,

---

([1]) Ce dernier théorème ne se trouve pas dans ma *Théorie des fonctions de variables imaginaires;* il n'a été publié qu'en 1876, dans les *Comptes rendus des seances de l'Academie des Sciences.*

réelle dans le premier cas, et imaginaire sans partie réelle dans le second.

Dans l'un et l'autre cas, il se forme dans la courbe un point double réel. C'est évident dans le premier cas et facile à voir dans le second, parce qu'un anneau fermé de conjuguée est toujours tangent à la courbe réelle en deux points appartenant à deux branches distinctes et que ces deux points doivent forcément se réunir en un seul pour que l'anneau s'évanouisse. Nous avons démontré, en effet, que les conjuguées qui ne touchent que l'enveloppe imaginaire ne peuvent pas présenter d'anneaux fermés.

Le fait est encore facile à constater lorsqu'il s'agit d'un anneau fermé de l'enveloppe imaginaire, composé de points imaginaires conjugués deux à deux : lorsqu'un pareil anneau devient évanouissant, la période représentée par l'aire qu'il enveloppait disparaît, et en même temps il se forme un point double réel, réunion de deux séries de points imaginaires conjugués deux à deux.

Enfin, le cas, plus général, où deux périodes imaginaires conjuguées seraient liées à l'existence simultanée, dans l'enveloppe imaginaire, de deux anneaux composés chacun des points imaginaires conjugués de ceux qui formeraient l'autre, rentre encore dans les précédents, mais présente une particularité qui consiste en ce que les deux périodes ne peuvent disparaître qu'en même temps et par la formation simultanée de deux points doubles.

Supposons, s'il s'agissait d'une équation à coefficients imaginaires,

$$P + Q\sqrt{-1} = 0,$$

qu'on l'ait complétée par l'addition du facteur

$$P - Q\sqrt{-1} = 0;$$

de façon à obtenir l'équation

$$P^2 + Q^2 = 0.$$

Les deux périodes imaginaires conjuguées seront représentées par les formules

$$I = 2S_1 - \frac{S+S'}{2} + \frac{S-S'}{2}\sqrt{-1}$$

et

$$I' = 2S_1 - \frac{S+S'}{2} - \frac{S-S'}{2}\sqrt{-1};$$

elles s'évanouiront en même temps si les anneaux dont les aires sont S et S' se réduisent à deux points imaginaires conjugués parce que l'arc dont l'aire est S_1 se réduira alors aussi à un seul point; mais les deux points imaginaires conjugués où se seront concentrées les deux suites de points imaginaires conjugués qui constituaient les deux anneaux seront alors deux points doubles.

C'est ce qui arrive, par exemple, dans le système des deux cercles imaginaires conjugués, représentés par l'équation

$$\begin{aligned}&\left[(x-a-b\sqrt{-1})^2+(y-a'-b'\sqrt{-1})^2-(r+r'\sqrt{-1})^2\right]\\ \times&\left[(x-a+b\sqrt{-1})^2+(y-a'+b'\sqrt{-1})^2-(r-r'\sqrt{-1})^2\right]=0,\end{aligned}$$

Les deux périodes sont

$$\pi(r+r'\sqrt{-1})^2 \quad \text{et} \quad \pi(r-r'\sqrt{-1})^2;$$

elles ne s'annulent ni l'une ni l'autre que pour $r = 0$ et $r' = 0$, mais alors le lieu acquiert deux points doubles,

$$\begin{cases} x = a + b\sqrt{-1}, \\ y = a' + b'\sqrt{-1}, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x = a - b\sqrt{-1}, \\ y = a' - b'\sqrt{-1}. \end{cases}$$

Remarque. — Les deux périodes I et I′ s'évanouiraient arithmétiquement sans disparaître géométriquement si S, S′ et S_1 satisfaisaient aux conditions

$$S - S' = 0 \qquad \text{et} \qquad 2S_1 - \frac{S + S'}{2} = 0;$$

mais ces deux conditions, fortuitement satisfaites, seraient d'ordre transcendant.

Ces périodes peuvent souvent disparaître dans des conditions analogues, sans que leur disparition entraîne la formation de points doubles, comme nous aurons occasion de le dire plus loin; mais ce n'est pas de ce genre de réduction dans le nombre des périodes que nous nous occupons ici. Nous cherchons à fixer les conditions dans lesquelles la valeur d'une période devient nulle en même temps que sa représentation géométrique devient évanouissante; et nous trouvons que, dans tous les cas, la condition consiste en ce qu'il se forme dans le lieu un ou deux points doubles, selon qu'il s'agit de faire disparaître une période réelle, ou imaginaire sans partie réelle, ou deux périodes imaginaires conjuguées. (*A suivre.*)