

G. LEINEKUGEL

**Remarques géométriques sur la
même question**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 9
(1890), p. 41-46

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9_41_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

REMARQUES GÉOMÉTRIQUES SUR LA MÊME QUESTION (1);

PAR M. G. LEINEKUGEL.

Il était évident *a priori* que la parabole (H) était indépendante du rayon du cercle (O). Cette parabole (H) admet, en effet, comme directrice le diamètre de (P) qui passe en O; elle est de plus tangente à la polaire A de O par rapport à (P), ainsi qu'aux bissectrices des deux tangentes menées de O à (P). Cette dernière propriété de (H) résulte de ce que les polaires A de O déterminent sur ces deux droites deux divisions homographiques en involution, et d'après une propriété connue :

La droite qui joint les points homologues de deux divisions homographiques enveloppe une conique tangente aux deux droites sur lesquelles sont tracées les deux divisions (CHASLES, *Traité des sections coniques*).

De même l'hyperbole équilatère (*h*) des neuf points d'un quadrilatère inscrit à la fois dans un cercle (O) et dans une conique (*p*) fixe ne change pas quand, le centre du cercle restant fixe, son rayon varie. En effet, elle admet comme tangente au centre du cercle la perpendiculaire au diamètre de (*p*) qui passe en ce point; elle passe par le centre de (*p*) et admet comme directions asymptotiques des parallèles aux axes de (*p*).

(1) Voir 3^e série, Tome VIII, p. 298.

De là il résulte immédiatement les propriétés suivantes :

THÉORÈME VIII. — *L'enveloppe des polaires d'un point O par rapport aux coniques inscrites dans les quadrilatères circonscrits à une conique (P) et aux cercles (O) de centre fixe et de rayons variables est une parabole (H).*

THÉORÈME IX. — *Les quadrilatères circonscrits à la conique (P) et aux cercles (O) déterminent par leurs points de contact avec ces cercles des quadrilatères dont les centres de gravité se déplacent sur la perpendiculaire menée de O au diamètre de (P) qui passe en ce point.*

THÉORÈME X. — *Les quadrilatères inscrits dans une conique fixe et dans une série de cercles concentriques ont même centre de gravité.*

THÉORÈME XI. — *Les sommets des quadrilatères circonscrits à une conique (P) et à des cercles (O) concentriques décrivent une strophoïde oblique (T).*

THÉORÈME XII. — *Les foyers de toutes les coniques inscrites dans les quadrilatères circonscrits à (P) et aux cercles (O) sont situés sur cette strophoïde (T).*

Ces deux derniers théorèmes se déduisent de ce que la strophoïde oblique trouvée dans la dernière partie de la question du concours passe par les six sommets du quadrilatère circonscrit à (O) et à (P) et qu'elle est la podaire de O par rapport à la conique (P), qui reste fixe quand le rayon de (O) varie.

THÉORÈME XIII. — *Les côtés des triangles autopolaires communs à une conique (P) et à des cercles (O)*

concentriques enveloppent une conique (H), et leurs sommets décrivent également une conique (h).

Comme une série de cercles concentriques et de rayons variables sont des coniques bitangentes à l'infini aux deux ombilics du plan, une transformation par projection conique des théorèmes précédents conduit aux suivants qui sont plus généraux :

THÉORÈME XIV. — *L'enveloppe des polaires d'un point quelconque ω par rapport aux coniques inscrites dans les quadrilatères circonscrits à une conique fixe (P) et aux coniques (Ω) bitangentes à une conique (Ω_1) aux points de contact des tangentes menées de ω à la conique (Ω_1), est une conique (Σ).*

THÉORÈME CORRÉLATIF. — *Les pôles d'une droite quelconque par rapport aux coniques circonscrites aux quadrilatères inscrits dans une conique fixe (P) et dans des coniques (Ω) bitangentes à une conique (Ω_1) fixe aux points où la droite la rencontre, est une conique (σ).*

En particulier, les côtés des triangles autopolaires communs à la conique (P) et aux coniques (Ω) enveloppent la conique (Σ), et leurs sommets décrivent la conique (σ).

THÉORÈME XV. — *Les sommets des quadrilatères circonscrits à une conique (P) et aux coniques (Ω) bitangentes à une conique (Ω_1) en deux points fixes décrivent une cubique.*

THÉORÈME XVI. — *Étant donné un quadrilatère circonscrit à une conique (Ω), on joint les points conjugués harmoniques des points de rencontre α, β, γ de la polaire L d'un point ω du plan à avec les diago-*

nales, par rapport aux segments déterminés par cette conique sur les diagonales de ce quadrilatère au point ω ; et par les conjugués harmoniques des mêmes points par rapport aux diagonales on mène des droites rencontrant la droite L aux points où les trois droites issues de ω la rencontrent.

Par les sommets du triangle ainsi obtenu, on mène des droites rencontrant L aux points où les droites qui joignent le point ω arbitrairement choisi aux points conjugués harmoniques des points d'intersection de L avec les côtés du nouveau triangle rencontrent L ; on obtient ainsi trois droites concourantes sur la droite conjuguée de la polaire du point ω par rapport à la conique (Ω).

Ce théorème résulte du théorème II, en remarquant que, par suite de la transformation par projection conique, le centre du cercle se projette en un point quelconque ω du plan. Les perpendiculaires aux milieux des diagonales donnent dans la projection des droites menées par les points α' , β' , γ' (conjugués harmoniques des points α , β , γ de rencontre de la polaire L de ω avec les diagonales, par rapport à ces diagonales) et rencontrant la droite L aux points où les droites qui joignent le point ω aux points α'' , β'' , γ'' [conjugués harmoniques des points α , β , γ par rapport aux segments déterminés par (Ω) sur les diagonales] la rencontrent.

Quant à la droite de Newton qui, dans le théorème II, est par rapport au cercle la droite conjuguée de la droite de l'infini, il lui correspondra la droite conjuguée de la polaire L de ω par rapport à (Ω).

THÉORÈME XVII. — *Le diamètre conjugué de la droite de Newton d'un quadrilatère circonscrit à une*

conique passe par le centre de gravité du quadrilatère qui a pour sommets les points de contact du premier.

THÉORÈME XVIII. — *Les quadrilatères inscrits dans une conique (P) et dans des coniques bitangentes à une conique fixe aux points où une droite Δ la rencontre ont tous même centre de gravité G_Δ harmoniquement associé à la droite Δ .*

Voici comment nous définissons le centre de gravité G_Δ harmoniquement associé à une droite Δ dans un quadrilatère ABCD quelconque.

Soient

$$a, a'; b, b' \text{ et } c, c'$$

les couples de points où Δ rencontre les côtés opposés et les diagonales intérieures.

Si l'on prend par rapport à ces mêmes côtés et ces diagonales les conjugués harmoniques de ces points, on obtient les trois couples suivants

$$a_1, a'_1; b_1, b'_1 \text{ et } c_1, c'_1;$$

les droites $a_1, a'_1, b_1, b'_1, c_1, c'_1$ sont concourantes en un point G_Δ intimement lié à la droite Δ . Il devient le centre de gravité du quadrilatère quand la droite Δ passe à l'infini, de sorte que nous en déduisons :

Les quadrilatères inscrits dans une conique P et dans des coniques homothétiques et concentriques ont tous même centre de gravité.

THÉORÈME XIX. — *Étant donné un quadrilatère circonscrit à une conique (Σ) et une droite Δ , il existe une conique (Σ_1) passant par les quatre sommets du quadrilatère formé en joignant les sommets du premier aux points où leurs polaires respectives rencontrent Δ et par les points de rencontre de Δ et de (Σ).*

Si l'on considère cette conique (Σ_1) et les deux coniques (Σ_2) , (Σ_3) qui passent par ces deux mêmes points et qui sont l'une circonscrite au triangle formé par les trois diagonales, l'autre au triangle formé en joignant les points conjugués harmoniques, par rapport aux diagonales, des points de rencontre (α, β, γ) de Δ avec ces droites aux points d'intersection des droites qui joignent le pôle de Δ , par rapport à (Σ) , aux conjugués harmoniques des points α, β, γ , par rapport aux segments déterminés par (Σ) sur ces diagonales, avec la droite Δ , on obtient trois coniques (Σ_1) , (Σ_2) , (Σ_3) se coupant en un même point.