Nouvelles annales de mathématiques

C.-R.-J. Kallenberg Van den Bosch

Relations entre la distance d'un point P du plan d'une conique au foyer et les rayons vecteurs des pieds des normales abaissées du point P sur la courbe

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 395-400

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__395_1>

RELATIONS ENTRE LA DISTANCE D'UN POINT P DU PLAN D'UNE CONIQUE AU FOYER ET LES RAYONS VECTEURS DES PIEDS DES NORMALES ABAISSÉES DU POINT P SUR LA COURBE;

PAR M. C.-R.-J. KALLENBERG VAN DEN BOSCH.

PARABOLE.

Les pieds des normales, abaissées du point $P(\xi, \eta)$, sont donnés par l'équation de la courbe

$$y^2 = 2px$$

et l'équation

$$\eta - y = -\frac{y}{p}(\xi - x),$$

qui exprime que la normale au point (x, y) passe par le point P.

L'élimination de y donne, pour les abscisses des pieds des normales, l'équation

$$x^3 - 2(\xi - p)x^2 + (\xi - p)^2 x - \tfrac{1}{2}p\eta^2 = 0,$$

d'où l'on tire, pour les trois racines x_1, x_2 et x_3,

$$x_1+x_2+x_3 = 2(\xi - p),$$
$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = (\xi - p)^2,$$
$$x_1x_2x_3 = \tfrac{1}{2}p\eta^2.$$

Le rayon vecteur d'un point de la courbe étant donné par

$$v = x + \frac{p}{2},$$

on a, pour le produit des rayons vecteurs des pieds des normales,

$$\begin{aligned} v_1v_2v_3 &= \left(x_1+\frac{p}{2}\right)\left(x_2+\frac{p}{2}\right)\left(x_3+\frac{p}{2}\right) \\ &= x_1x_2x_3 + \frac{p}{2}(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) \\ &\quad + \frac{p^2}{4}(x_1+x_2+x_3) + \frac{p^3}{8} \end{aligned}$$

ou, en substituant les valeurs trouvées ci-dessus,

$$\begin{aligned} v_1v_2v_3 &= \frac{1}{2}p\eta^2 + \frac{1}{2}p(\xi-p)^2 \\ &\quad + \frac{p^2}{2}(\xi-p) + \frac{p^3}{8} = \frac{p}{2}\left[\left(\xi - \frac{p}{2}\right)^2 + \eta^2\right]. \end{aligned}$$

L'expression entre parenthèses représente le carré de la distance u du point P au foyer; donc

$$v_1v_2v_3 = \tfrac{1}{2}pu^2$$

ou

$$u^2 = 2\,\frac{v_1v_2v_3}{p}. \tag{1}$$

Le rayon vecteur v d'un point de la courbe est lié au rayon de courbure ρ en ce point par l'équation

$$\rho^2 = \frac{8v^3}{p},$$

tandis qu'on a encore

$$\rho = \frac{n^3}{p^2},$$

n représentant la partie de la normale comprise entre la courbe et l'axe de la parabole.

Si, à l'aide de ces formules, on introduit dans la relation (1), d'une part, les rayons de courbure et, d'autre part, les longueurs n relatives aux pieds des normales abaissées du point P, on trouve

$$(2) \qquad u^3 = \frac{\rho_1}{2}\,\frac{\rho_2}{2}\,\frac{\rho_3}{2}$$

et

$$(3) \qquad u = \frac{n_1 n_2 n_3}{2p^2}.$$

ELLIPSE ET HYPERBOLE.

L'élimination de y entre l'équation de la courbe

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

et celle de l'hyperbole équilatère

$$c^2 xy \pm b^2 \eta\, x - a^2 \xi\, y = 0,$$

où $c^2 = a^2 \mp b^2$, donnent pour les abscisses des pieds des normales, abaissées du point $P(\xi, \eta)$, l'équation

$$x^4 - \frac{2a^2\xi}{c^2}x^3 + \frac{a^2}{c^4}(a^2\xi^2 \pm b^2\eta^2 - c^4)x^2 + \frac{2a^4\xi}{c^2}x - \frac{a^6\xi^2}{c^4} = 0.$$

Donc on a, pour les quatre racines x_1, x_2, x_3 et x_4,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{2a^2\xi}{c^2},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \ldots = \frac{a^2}{c^4}(a^2\xi^2 \pm b^2\eta^2 - c^4),$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots = -\frac{2a^4\xi}{c^4},$$

$$x_1x_2x_3x_4 = -\frac{a^6\xi^2}{c^4}.$$

Par rapport au foyer F situé à droite de l'axe des y, le rayon vecteur d'un point de l'ellipse est donné par

$$v = a - \frac{c}{a}x,$$

et celui d'un point de l'hyperbole par

$$v = \pm\left(\frac{c}{a}x - a\right) \qquad \text{ou} \qquad v = \mp\left(a - \frac{c}{a}x\right).$$

Pour avoir une valeur positive, il faut prendre dans la dernière formule le signe — pour les abscisses positives et le signe + pour les abscisses négatives.

Or de l'égalité

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = -\frac{a^6\xi^2}{c^4}$$

il résulte que, des quatre abscisses des pieds des normales, il y en a toujours un nombre impair qui sont de même signe.

Donc, pour l'hyperbole, il faut que, dans le produit $v_1 v_2 v_3 v_4$, le facteur $a - \frac{c}{a}x$ soit précédé un nombre impair de fois du signe —, ou que le produit lui-même soit affecté de ce même signe.

Ainsi l'on a

$$\begin{aligned}
v_1 v_2 v_3 v_4 &= \pm\left[\left(a - \frac{c}{a}x_1\right)\left(a - \frac{c}{a}x_2\right)\left(a - \frac{c}{a}x_3\right)\left(a - \frac{c}{a}x_4\right)\right]\\
&= \pm\left[a^4 - a^2 c(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\right.\\
&\qquad + c^2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \ldots)\\
&\qquad \left. - \frac{c^3}{a^2}(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots) + \frac{c^4}{a^4}x_1x_2x_3x_4\right]\\
&= \pm\left[a^4 - \frac{2a^4\xi}{c} + \frac{a^2}{c^2}(a^2\xi^2 \pm b^2\eta^2 - c^4) + 2a^2\xi - a^2\xi^2\right]\\
&= \pm\left\{\pm\frac{a^2b^2}{c^2}\left[(\xi - c)^2 + \eta^2\right]\right\} = \frac{a^2b^2}{c^2}u^2,
\end{aligned}$$

en nommant u la distance du point P au foyer F.

On trouve donc, pour les deux courbes, la même relation

$$(1) \qquad u^2 = \frac{c^2}{a^2 b^2} v_1 v_2 v_3 v_4$$

et, évidemment, pour l'autre foyer F',

$$(1') \qquad u'^2 = \frac{c^2}{a^2 b^2} v'_1 v'_2 v'_3 v'_4.$$

De (1) et (1') on tire

$$(uu')^2 = \frac{c^2}{a^4 b^4} v_1 v'_1 . v_2 v'_2 . v_3 v'_3 . v_4 v'_4 .$$

Dans l'ellipse comme dans l'hyperbole, le rayon de courbure en un point de la courbe est lié aux rayons vecteurs de ce point par l'équation

$$\rho = \frac{(vv')^{\frac{3}{2}}}{ab},$$

et à la partie n de la normale, comprise entre la courbe et l'axe des x, par l'équation

$$\rho = \frac{a^2}{b^4} n^3.$$

En introduisant les rayons de courbure des pieds des normales et les longueurs n relatives à ces points dans l'équation de $(uu')^2$, on arrive aux relations

$$(2) \qquad (uu')^3 = \frac{c^6}{a^2 b^2} \rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4$$

et

$$(3) \qquad uu' = \frac{a^2 c^2}{b^6} n_1 n_2 n_3 n_4.$$

On peut encore remarquer que, les relations (1), (2) et (3) étant déduites pour les trois coniques de l'équation générale des abscisses, elles renferment le cas où deux abscisses ont des valeurs imaginaires.

En effet, les pieds des normales imaginaires sont des points imaginaires conjugués, dont les abscisses sont de la forme $x_1 = a + bi$ et $x_2 = a - bi$.

La somme et le produit des abscisses ont donc une valeur réelle, et il en est de même des produits $\nu_1 \nu_2$, $\rho_1 \rho_2$ et $n_1 n_2$ correspondants.