

E. CESARO

**Nouvelles remarques sur divers articles
concernant la théorie des séries**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 9
(1890), p. 353-367

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9_353_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**NOUVELLES REMARQUES SUR DIVERS ARTICLES
CONCERNANT LA THÉORIE DES SÉRIES (1);**

PAR M. E. CESARO.

1. Dans mes précédentes remarques (2), je me suis occupé de la *série de Lerch*

$$(1) \quad \sum_1^{\infty} q^{n-(\log n)} x^{\frac{1}{2}(\log n)[(\log n)+1]},$$

convergente pour $0 < q < 1 < x$, bien que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ surpasse toute limite lorsque n parcourt une succession convenable de valeurs entières. Ces valeurs sont *infinitement rares* parmi les nombres entiers, ce qui n'a pas lieu pour d'autres séries de Lerch, et, à ce point de vue, on peut dire que la série (1) est *moins remarquable* que les autres, car *on doit être d'autant moins surpris de la convergence d'une série que les symptômes de divergence s'y manifestent plus rarement*. M. Auguste Gutzmer affirme, au contraire, que la série (1) est la *plus remarquable* de toutes, *parce que les termes où le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ cesse d'être inférieur à l'unité deviennent par degrés plus rares* (3) !

2. Il est vrai que M. Gutzmer, dans un article récent (4), explique mieux son argumentation en faveur de la série (1); mais je n'ai pas à m'occuper de ces rai-

(1) Cet article nous a été envoyé en avril 1889.

(2) *Nouvelles Annales*, 1888, p. 401.

(3) *Journal de Teixeira*, 1887, p. 36.

(4) *Nouvelles Annales*, 1889, p. 26.

sons *nouvelles*, mon intention n'ayant jamais été, évidemment, de donner la mesure de l'intérêt plus ou moins grand qu'on peut attacher à la série (1), que je trouve du reste fort intéressante, mais seulement de faire observer que, si la série en question pouvait être appelée *peu remarquable*, elle le serait justement pour la raison que M. Gutzmer invoque dans un but contraire.

3. Il est encore vrai que, si le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ peut, dans la série (1), surpasser toute limite, il ne devient pas, par compensation, arbitrairement petit pour d'autres valeurs de n , comme dans les séries que j'ai proposées. Mais cela tient à ce que la *compensation*, dans la série de Lerch, se fait par une autre voie : elle consiste précisément dans la rareté des valeurs de n , qui rendent le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ supérieur à tout nombre. C'est là un fait général, qu'on pourrait démontrer avec rigueur, mais dont on se rend compte immédiatement comme il suit. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers λ ou vers μ , suivant que n parcourt une succession de fréquence ϖ ou la succession complémentaire, $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers $\lambda^\varpi \mu^{1-\varpi}$. Si λ est infini, cette limite ne peut être finie, à moins que $\varpi = 0$ ou $\mu = 0$. La série (1) est dans le premier cas, les autres dans le second.

4. En poursuivant les recherches initiées par M. Lerch, j'ai pu construire des séries *convergentes*, telles que, en excluant certaines valeurs de n , *infinitement rares* parmi les nombres entiers, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ se maintient supérieur à un nombre plus grand que

l'unité. Voici un exemple fort simple. La série

$$q_1 + q_1^2 + q_2^3 + q_1^4 + q_2^5 + q_3^6 + q_1^7 + \dots$$

où

$$q_n = q^{1 + \frac{1}{n}}, \quad (0 < q < 1),$$

est convergente, parce que ses termes sont positifs et inférieurs aux termes correspondants de la série convergente $q + q^2 + q^3 + \dots$. Si n est un nombre triangulaire,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{q_1^{n+1}}{q_2^n}, \quad \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

Dans le cas contraire, soit ν le plus grand nombre triangulaire inférieur à n . On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{q_n^{n-\nu}}{q_{n+1}^{n-\nu+1}} = q^{1 - \frac{\nu}{(n-\nu)(n-\nu+1)}};$$

puis, en observant que $(n - \nu)(n - \nu + 1)$ ne surpasse pas 2ν ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{1}{q} > 1.$$

C'est ce qu'il fallait montrer.

5. Quant au *théorème de Weyr*, je ne puis croire que le dernier article de M. Gutzmer tende à lui ôter une partie de l'intérêt qu'il mérite; car c'est M. Gutzmer lui-même qui a posé la question en ces termes : *Il serait très intéressant d'avoir une série convergente à termes positifs, telle que, pour un nombre infini de valeurs de n le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ surpasse l'unité, et que cette propriété ne se perde pas par une transformation quelconque* (1). M. Édouard Weyr a immédiatement ré-

(1) *Journal de Teixeira*, 1887, janvier-février.

pondu (1) que de telles séries ne peuvent exister, et l'on appréciera d'autant mieux ce petit résultat lorsqu'on saura que, malgré l'extrême facilité qu'il y avait de l'obtenir, les efforts des géomètres cités par M. Gutzmer et connus de tout le monde sont restés longtemps infructueux. Il suffit de dire que M. Gutzmer n'était pas même parvenu à démontrer le théorème de Weyr pour la seule série (1), car il avait eu besoin de s'imposer la restriction *inutile* $q\sqrt{x} < 1$. Il était pourtant facile de s'en passer.

6. Je me suis occupé, à plusieurs reprises, du théorème de convergence, relatif à la limite de nu_n . Il n'y a rien de plus simple, pour établir ce théorème indépendamment de la considération de séries particulières, que d'écrire, en appliquant un théorème de Cauchy,

$$\lim \frac{nS_n}{n} - \lim [nS_n - (n-1)S_{n-1}] = \lim (nu_n + S_{n-1}).$$

Si la série est convergente, le premier membre est la somme S de la série. Si la limite λ de nu_n existe, le dernier membre est $\lambda + S$, donc $\lambda = 0$. Il est regrettable que le *théorème de Cauchy*, auquel je fais allusion ici, ne figure pas dans la plupart des Traités, alors qu'il devrait y jouer un rôle prépondérant. Il constitue une seconde règle de calcul : c'est la *règle de L'Hospital* pour les fonctions de variable entière. En l'introduisant dans mon *Cours* j'ai pu obtenir de remarquables simplifications dans diverses théories d'Analyse algébrique.

7. On pourrait imiter la démonstration précédente

(1) *Loc. cit.*, 1887, mars-avril.

pour le théorème plus général, relatif à la limite de $a_n u_n$, la fonction positive a_n étant choisie de manière que la série

$$(2) \quad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots$$

soit divergente. Dans ce cas la fonction

$$p_n = \left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \left(1 + \frac{1}{a_3}\right) \dots$$

croît indéfiniment avec n , et le théorème de Cauchy donne

$$\lim \frac{p_n S_n}{p_n} = \lim \frac{p_n S_n - p_{n-1} S_{n-1}}{p_n - p_{n-1}} = \lim \left(S_n + \frac{p_{n-1} u_n}{p_n - p_{n-1}} \right),$$

c'est-à-dire

$$S = \lim(S_n + a_n u_n) = S + \lambda,$$

d'où $\lambda = 0$. Mais cette démonstration n'a pas de raison d'être, du moment qu'on suppose connue la divergence de la série (2).

8. Soit σ_n la somme des n premiers termes de la série (2). C'est encore le théorème de Cauchy qui permet de constater rapidement la divergence de

$$(3) \quad \frac{1}{a_1 \sigma_1} + \frac{1}{a_2 \sigma_2} + \frac{1}{a_3 \sigma_3} + \dots,$$

établie la première fois par Abel, au moyen du principe général de convergence. Si τ_n est la somme des n premiers termes de la série (3), on a

$$\lim \frac{\tau_n}{\log \sigma_n} = \lim \frac{1}{a_n \sigma_n \log \frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}}} = \frac{1}{\lim \log \left(1 - \frac{1}{a_n \sigma_n}\right)^{-a_n \sigma_n}};$$

d'où, en observant que $a_n \sigma_n$ croît indéfiniment avec n ,

$$\lim \frac{\tau_n}{\log \sigma_n} = 1.$$

Donc τ_n croît sans limite, comme le logarithme de σ_n .

9. Si les termes de (2) vont en décroissant, on peut écrire

$$\frac{1}{a_{n+1} \sigma_{n+1}} < \log \frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} < \frac{1}{a_n \sigma_n},$$

et, par suite, la série

$$\frac{1}{a_1 \sigma_1} - \log \frac{\sigma_2}{\sigma_1} + \frac{1}{a_2 \sigma_2} - \log \frac{\sigma_3}{\sigma_2} + \frac{1}{a_3 \sigma_3} - \dots$$

est convergente. Soit C sa somme. On trouve sans peine

$$(4) \quad \lim (\tau_n - \log \sigma_n) = C.$$

Lorsque $a_n = 1$, C est la *constante d'Euler*. Pour $a_n = n$, $n \log n$, \dots , on obtient une infinité d'autres constantes, qui ont été considérées par M. F. Giudice (1).

10. Si les carrés des termes de la série (3) forment une série convergente, l'égalité (4) permet de définir une fonction analogue à la fonction Γ , comme il suit :

$$G(1+x) = \lim \frac{\sigma_n^x}{\left(1 + \frac{x}{a_1 \sigma_1}\right) \left(1 + \frac{x}{a_2 \sigma_2}\right) \dots \left(1 + \frac{x}{a_n \sigma_n}\right)}.$$

Elle permet ensuite de mettre $\frac{1}{G(1+x)}$ sous la forme caractéristique des fonctions holomorphes du premier

(1) *Journal de Battaglini*, 1889.

genre

$$\frac{1}{\Gamma(1+x)} = e^{cx} \prod_1^{\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{a_n \sigma_n} \right) e^{-\frac{x}{a_n \sigma_n}} \right].$$

En particulier, pour $a_n = 1$, on retrouve la *formule de Weierstrass*, relative à la fonction Γ .

11. Supposons que, à partir d'une certaine valeur de n , on ait constamment

$$(5) \quad \left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \right) \sigma_n < 1.$$

Si v_n est le terme général de la série (3), on a identiquement

$$\left(a_n \frac{v_n}{v_{n+1}} - a_{n+1} \right) \sigma_n = 1,$$

et, par suite, l'inégalité (5) devient

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Donc la série $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ est *plus divergente* que la série (3). On voit, par exemple, pour $a_n = n$, que, dans une série convergente à termes positifs, l'expression

$$\left[n \frac{u_n}{u_{n+1}} - (n+1) \right] \log n$$

ne peut finir par être constamment inférieure à l'unité, et, par suite, l'expression

$$n \left[n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right]$$

doit croître à l'infini avec n . C'est le *théorème de Cahen* (*).

(*) *Nouvelles Annales*, novembre 1886.

12. Si, au contraire, l'expression considérée finit par surpasser quelque nombre $1 + k$, supérieur à l'unité, on peut toujours construire une série *moins convergente* que la série proposée. Soit

$$\omega_n = \frac{v_n}{(1 + kv_1)(1 + kv_2)\dots(1 + kv_n)}.$$

On a identiquement

$$a_n \frac{\omega_n}{\omega_{n+1}} - a_{n+1} = a_n \frac{v_n}{v_{n+1}} - a_{n+1} + ka_n v_n = \frac{1 + h}{\sigma_n}.$$

Conséquemment l'inégalité

$$(6) \quad \left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \right) \sigma_n > 1 + k$$

revient à celle-ci :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{\omega_{n+1}}{\omega_n}.$$

Il reste donc à prouver que la série $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \dots$ est convergente. Cela résulte immédiatement de l'identité

$$k(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n) = 1 - \frac{1}{(1 + kv_1)(1 + kv_2)\dots(1 + kv_n)}.$$

Si k est positif, l'expression

$$(1 + kv_1)(1 + kv_2)\dots(1 + kv_n) > 1 + k(v_1 + v_2 + \dots + v_n)$$

surpasse toute limite, lorsque n croît à l'infini. Conséquemment

$$\lim(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n) = \frac{1}{k}.$$

13. Les moyens de démonstration employés dans les remarques précédentes servent seulement à mettre en évidence la possibilité de construire une série *moins divergente* ou *moins convergente* que la série proposée.

Mais le *théorème de Kummer* suffit à tout. Lorsqu'on remplace, dans l'expression considérée par ce théorème, la fonction a_n par $a_n \sigma$, on peut écrire

$$a_n \sigma_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \sigma_{n+1} = \left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \right) \sigma_n = 1,$$

et l'on voit que la série $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ est divergente ou convergente, suivant qu'on finit par avoir l'une ou l'autre des inégalités (5), (6), respectivement. On appliquera habituellement ce théorème en cherchant d'abord la limite de l'expression

$$\left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \right) \sigma_n,$$

puis, si on la trouve égale à l'unité, celle des expressions

$$\left[\left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \right) \sigma_n - 1 \right] \log \sigma_n, \\ \left\{ \left[\left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \right) \sigma_n - 1 \right] \log \sigma_n - 1 \right\} \log \log \sigma_n, \\ \dots\dots\dots$$

successivement. A la première limite qu'on trouvera différente de 1, on saura que la série $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ est convergente ou divergente, suivant que la limite trouvée est supérieure ou inférieure à l'unité. L'introduction des fonctions $\log \sigma_n, \log \log \sigma_n, \dots$ est justifiée par une remarque précédente.

14. Le théorème de Cauchy permet d'étudier aisément les relations qui existent entre les tendances de $a_n u_n$ et de l'expression envisagée par le théorème de Kummer. Si la série $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ est divergente, on a

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \lim \frac{a_n u_n}{S_n} &= \lim \frac{a_{n+1} u_{n+1} - a_n u_n}{u_{n+1}} \\ &= - \lim \left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \right). \end{aligned} \right.$$

Si $a_n u_n$ admet une limite différente de zéro, ce qui permet d'affirmer immédiatement la divergence de la série, le théorème de Kummer ne dit rien, parce que, d'après (7), la limite considérée par ce théorème est nulle, si elle existe. Si cette limite existe pour une série convergente, et qu'elle soit $\lambda > 0$, prenons $0 < k < \lambda$. Il existe aussi un nombre ν , tel que, pour $n > \nu$,

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} > k,$$

c'est-à-dire

$$k_n a_n u_n < k_\nu a_\nu u_\nu,$$

où

$$k_n = \left(1 + \frac{k}{a_1}\right) \left(1 + \frac{k}{a_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{k}{a_n}\right).$$

Si l'on observe que, d'après le théorème de Cauchy, on a

$$\lim \frac{\sigma_n}{k_n} = \frac{1}{k} \lim \frac{1}{k_n} = 0,$$

on voit que $a_n \sigma_n u_n$ tend nécessairement vers zéro.

15. Dans les mêmes conditions où l'on a pu définir la fonction G , on peut dire que, pour n croissant à l'infini, l'expression

$$\frac{\sigma_n^h}{\left(1 + \frac{x}{a_1 \sigma_1}\right) \left(1 + \frac{x}{a_2 \sigma_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{x}{a_n \sigma_n}\right)}$$

tend vers zéro ou surpasse toute limite suivant que $h < x$ ou $h > x$. Cela étant, supposons que l'on ait trouvé

$$(8) \quad \lim \left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \right) \sigma_n = \lambda.$$

Si $\lambda > 1$, la série est convergente, et l'on pourra fixer deux nombres $1 + \alpha$, $1 + \beta$, supérieurs à l'unité

et comprenant entre eux le nombre λ . Dès lors on aura, pour n surpassant un certain nombre ν ,

$$\alpha < a_n \sigma_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \sigma_{n+1} < \beta.$$

Donc, A et B étant deux nombres indépendants de n ,

$$a_n \sigma_n^r u_n < \frac{A \sigma_n^{r-1}}{\left(1 + \frac{\alpha}{a_1 \sigma_1}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{a_2 \sigma_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{\alpha}{a_n \sigma_n}\right)},$$

$$a_n \sigma_n^r u_n > \frac{B \sigma_n^{r-1}}{\left(1 + \frac{\beta}{a_1 \sigma_1}\right) \left(1 + \frac{\beta}{a_2 \sigma_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{\beta}{a_n \sigma_n}\right)}.$$

Il en résulte

$$\lim a_n \sigma_n^r u_n = 0,$$

si $r < 1 + \alpha < \lambda$, et

$$\lim a_n \sigma_n^r u_n = \infty,$$

si $r > 1 + \beta > \lambda$. Ainsi, lorsqu'on a pu constater la convergence de la série $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ au moyen de (8), non seulement $a_n u_n$ tend vers zéro, mais encore le produit de cette fonction par toute puissance de σ_n , dont l'exposant, inférieur à λ , est aussi voisin de λ qu'on veut. Par exemple, si λ est la limite considérée par la règle de Raabe et Duhamel, on a $\lim n^r u_n = 0$ pour $r < \lambda$. Lorsque $\lambda = 1$, on cherche

$$\lim \left[n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] \log n = \mu.$$

Si $\mu > 1$, la série est convergente, et l'on a

$$\lim n (\log n)^r u_n = 0$$

pour $r < \mu, \dots$

16. Il serait très intéressant de pouvoir assigner quelque condition *suffisante* pour l'existence de la

limite de

$$(9) \quad \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n),$$

pour n infini. On connaît une condition : c'est l'existence de la limite de a_n ; mais il faudrait la remplacer par une condition plus générale, pouvant servir dans les cas où a_n n'a pas de limite. J'ai cherché en vain une telle condition en la restreignant même aux fonctions a_n finies. Les n premiers nombres de la succession a_1, a_2, a_3, \dots étant représentés sur une droite, le nombre (9) est représenté par leur centre de gravité, qui se déplace, lors de l'adjonction de a_{n+1} aux nombres précédents, vers la droite ou vers la gauche suivant que

$$a_{n+1} - \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)$$

est positif ou négatif. Ce déplacement tend vers zéro lorsque n croît. Toute oscillation de (9), qui s'effectue constamment dans un sens déterminé, tend aussi vers zéro, si

$$(10) \quad \lim \frac{p_n}{n} = 0,$$

p_n étant le nombre de termes consécutifs de la succession

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1, \quad a_2 - a_1, \quad a_3 - \frac{1}{2} (a_1 + a_2), \\ a_4 - \frac{1}{3} (a_1 + a_2 + a_3), \quad \dots, \end{array} \right.$$

qui ont même signe que le premier d'entre eux, $n^{\text{ième}}$ de la suite.

On conçoit par là qu'en introduisant d'autres conditions simples, on pourrait en constituer, avec (10), un système suffisant pour l'existence de la limite de (9).

Mais il est de la dernière évidence que la condition (10) ne saurait suffire à elle seule pour affirmer, d'une manière générale, l'existence dont il s'agit. Il peut se faire, en effet, que par une infinité d'oscillations dans les deux sens le nombre (9) parvienne, quelque grand que soit n , à se déplacer d'un intervalle fini. Appelons b_1, b_2, b_3, \dots les termes de (11). On trouve sans peine

$$a_n = b_1 + \frac{1}{2} b_2 + \frac{1}{3} b_3 + \dots + \frac{1}{n-1} b_{n-1} + b_n,$$

et l'on voit que la convergence de la série

$$(12) \quad b_1 + \frac{1}{2} b_2 + \frac{1}{3} b_3 + \dots$$

est suffisante et nécessaire pour l'existence de la limite (9).

En conséquence, afin de construire une fonction a_n , telle que la limite de (9) n'existe pas, bien que la condition (10) soit remplie, nous tâcherons de construire une série (12) indéterminée. Considérons d'abord la série

$$(14) \quad 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} - \dots$$

Si n est une puissance de 2, la somme des n termes qui suivent le $n^{\text{ième}}$ tend, pour n croissant à l'infini, vers $\log 2$. Donc la série (13) n'est pas convergente. Elle n'est pas divergente; car on trouve, par un calcul élémentaire, que la somme de ses n premiers termes est comprise entre $-\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3} + \log 2$. Donc la série (13) est indéterminée; mais elle ne remplit pas la condition (10). En effet, $p_n = n$, si n est une puissance de 2. Ajoutons aux termes de (13) les termes correspondants de la série $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$, multipliés par des nombres su-

périeurs à l'unité. Il vient une série indéterminée, à termes alternativement positifs et négatifs. C'est une des séries (12) cherchées; car, à cause de $p_n = 1$, la condition (10) est remplie. Voici une de ces séries :

$$2 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{6} + \frac{2}{7} - \frac{2}{8} + \frac{1}{9} - \frac{2}{10} + \dots$$

La somme des n premiers termes est toujours comprise entre 0,87 et 1,72. C'est pourquoi la fonction correspondante a_n est finie.

17. La question posée en dernier lieu permettrait de résoudre plusieurs questions d'arithmétique asymptotique, que j'ai traitées autrefois par des méthodes peu rigoureuses. Ainsi, $\lambda(n)$ étant la fonction de Liouville, égale à $+1$ ou à -1 , suivant que n est composé d'un nombre pair ou d'un nombre impair de facteurs premiers, égaux ou inégaux, il importerait de savoir si la limite de

$$(14) \quad \frac{1}{n} [\lambda(1) + \lambda(2) + \lambda(3) + \dots + \lambda(n)]$$

existe. Fixons q de manière que $\lambda(q) = -\lambda(n)$. Évidemment $\frac{n}{q}$ ne peut être un carré parfait. Soit α^2 le plus petit carré surpassant $\frac{n}{q}$. On a

$$\lambda(q\alpha^2) = \lambda(q) = -\lambda(n).$$

D'autre part, le signe de

$$\lambda(n+1) - \frac{1}{n} [\lambda(1) + \lambda(2) + \dots + \lambda(n)]$$

étant le même que celui de $\lambda(n+1)$, la fonction p_n est définie par les conditions

$$\lambda(n) = \lambda(n+1) = \dots = \lambda(n+p_n-1) = -\lambda(n+p_n).$$

Or il est clair que $q\alpha^2$, supérieur à n , ne peut être inférieur à $n + p_n$. Donc

$$p_n \leq q\alpha^2 - n < q \left(1 + \sqrt{\frac{n}{q}} \right)^2 - n;$$

puis

$$\lim \frac{p_n}{n} \leq \lim \left(\frac{q}{n} + 2\sqrt{\frac{q}{n}} \right) = 0.$$

La condition (10) est remplie; mais on a vu que cela ne suffit pas pour affirmer l'existence de la limite du nombre (14). Cependant tout porte à croire que cette limite existe et que sa valeur est zéro.