NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GEMINIANO PIRONDINI

Sur les trajectoires orthogonales d'une ligne mobile

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 297-317

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__297_1>

SUR LES TRAJECTOIRES ORTHOGONALES D'UNE LIGNE MOBILE;

PAR M. GEMINIANO PIRONDINI.

1. Soit L une ligne quelconque à double courbure : désignons respectivement par (x, y, z), $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $(\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)$, $(\cos l, \cos m, \cos n)$, s, ρ, r les coordonnées d'un point arbitraire de la ligne, les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale, l'arc, le rayon de courbure et le rayon de torsion.

On peut construire en un point quelconque de L le trièdre trirectangle formé par la tangente, par la normale principale et par la binormale (trièdre fondamental).

Considérons le mouvement déterminé par ce trièdre qui se déplace de manière à rester toujours le trièdre fondamental de L. Si Λ est une ligne liée invariablement au trièdre mobile T, et si l'on désigne par ξ, η, ζ les coordonnées d'un point quelconque P de Λ par rapport à ce trièdre, les coordonnées de P, rapporté à un système d'axes fixes, sont

$$X = x + \xi\cos\alpha + \eta\cos\lambda + \zeta\cos l, \qquad \ldots;$$

d'où, par dérivation,

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial \sigma} = \xi' \cos\alpha + \eta' \cos\lambda + \zeta' \cos l, \\ \dfrac{\partial X}{\partial s} = \left(1 - \dfrac{\eta}{\rho}\right)\cos\alpha + \left(\dfrac{\xi}{\rho} + \dfrac{\zeta}{\rho}\right)\cos\lambda - \dfrac{\eta}{r}\cos l, \end{cases} \qquad \ldots,$$

σ étant l'arc de A. Ces formules donnent

$$F = \sum \frac{\partial X}{\partial \sigma}\frac{\partial X}{\partial s} = \xi' + \frac{1}{\rho}(\xi\eta' - \xi'\eta) - \frac{1}{r}(\eta\zeta' - \eta'\zeta).$$

Sur la surface engendrée par la ligne mobile les lignes représentées par les équations $\sigma = \text{const.}$, $s = \text{const.}$ sont orthogonales lorsqu'on a la relation

$$(2)\qquad F = \xi' + \frac{1}{\rho}(\xi\eta' - \xi'\eta) + \frac{1}{r}(\eta\zeta' - \eta'\zeta) = 0.$$

Si l'on dérive (2) par rapport à la variable s, on obtient l'égalité

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)'(\xi\eta' - \xi'\eta) - \left(\frac{1}{r}\right)'(\eta\zeta' - \eta'\zeta) = 0.$$

que l'on peut écrire

$$\frac{\left(\dfrac{1}{\rho}\right)'}{\left(\dfrac{1}{r}\right)'} = \frac{\eta\zeta' - \eta'\zeta}{\xi\eta' - \xi'\eta}.$$

Le premier membre est une fonction de σ, tandis que le second est une fonction de s; on doit donc avoir

$$\frac{\left(\dfrac{1}{\rho}\right)'}{\left(\dfrac{1}{r}\right)'} = a. \qquad \frac{\eta\zeta' - \eta'\zeta}{\xi\eta' - \xi'\eta} = a,$$

a étant une constante arbitraire. La première équation donne

$$(3)\qquad \frac{1}{\rho} = \frac{a}{r} + b,$$

b étant une nouvelle constante, ce qui démontre que les deux courbures de la directrice L sont liées entre elles par une relation linéaire. La seconde équation peut s'écrire

$$\frac{\eta'}{\eta} = \frac{\zeta' + a\xi'}{\zeta + a\xi};$$

d'où, par intégration,

$$\log \eta = \log c + \log(\zeta + a\xi),$$

c'est-à-dire

$$(4) \qquad \eta = c(a\xi + \zeta),$$

c étant une constante arbitraire.

La relation (2) se réduit alors à

$$\frac{\xi'}{\xi} = b\,\frac{\eta'}{b\eta - 1};$$

d'où, en intégrant,

$$\log \xi = \log e + \log(b\eta - 1),$$

c'est-à-dire

$$(5) \qquad \xi = e(b\eta - 1),$$

e étant une constante quelconque. Les équations (4), (5) représentent une droite dont la position dépend des constantes a, b, c, e; d'ailleurs a, b sont données aussitôt que l'on donne la courbe L directrice du mouvement.

Si l'on considère a et b fixes et les constantes arbitraires c et e comme des fonctions d'un paramètre indépendant t, les équations (4), (5) représentent une surface réglée S.

Les lignes demandées sont les génératrices rectilignes d'une telle surface réglée et chaque ligne plane ou à double courbure que l'on peut considérer comme l'enveloppe d'un système de ces droites. Cherchons donc si les droites dont on vient de parler peuvent engendrer des surfaces développables.

Les équations (4), (5) peuvent s'écrire

$$(6)\quad \xi(1-abce)=bce\zeta-e, \qquad \eta(1-abce)=c\zeta-ace,$$

et la surface représentée par ces équations est développable lorsqu'on a

$$\frac{d}{dt}\frac{bce}{1-abce}\frac{d}{dt}\frac{ace}{1-abce}-\frac{d}{dt}\frac{e}{1-abce}\frac{d}{dt}\frac{c}{1-abce}=0.$$

Si l'on développe cette égalité, on trouve

$$(1-abce)^2\frac{dc}{dt}\frac{de}{dt}=0,$$

ce qui donne

$$\frac{dc}{dt}=0, \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{de}{dt}=0, \qquad \text{ou bien} \qquad abce=1.$$

Lorsque $\frac{dc}{dt}=0$, le plan (4) reste invariable de position et la surface réglée S se réduit à ce plan; les génératrices de cette surface sont les intersections du plan fixe (4) et du plan mobile (5).

Si l'on remarque que ce plan passe toujours par la droite fixe

$$\xi=0, \qquad b\eta=1,$$

on conclut que les génératrices rectilignes de la surface S, placées sur le plan (4), enveloppent un point.

Si l'on suppose

$$\frac{de}{dt}=0,$$

le plan (5) est invariable de position et la surface réglée se réduit à ce plan; les génératrices rectilignes de cette surface sont les intersections du plan fixe (5) et du plan mobile (4), qui passe toujours par la droite fixe

$$\eta = 0, \qquad a\xi + \zeta = 0.$$

Donc l'enveloppe des génératrices rectilignes de la surface S, sur le plan (5), est aussi un point.

Considérons maintenant la condition $abce = 1$; les relations (4), (5) deviennent

$$\eta = ac\,\xi + c\zeta,$$
$$ac\xi = \eta - ace;$$

d'où

$$\zeta = ae.$$

Le système (4), (5) équivaut donc au suivant

$$\zeta = ae, \qquad \xi = e(b\eta - 1).$$

La première équation représente un plan parallèle au plan coordonné $\zeta = 0$; les intersections du plan variable $\zeta = ae$ et du plan variable $\xi = e(b\eta - 1)$ forment donc une surface réglée à plan directeur.

Par conséquent les génératrices n'enveloppent aucune ligne.

On a donc ce théorème :

Si l'on pose la condition qu'une ligne Λ, *liée invariablement au trièdre fondamental d'une courbe de l'espace soit toujours orthogonale aux trajectoires décrites par ses points, lorsque le mouvement s'effectue de manière que le trièdre mobile soit toujours le trièdre fondamental de la ligne* L, *cette ligne doit avoir ses courbures liées entre elles par une équation linéaire* $\frac{1}{\rho} = \frac{a}{r} + b$, *et la ligne mobile* Λ *est une génératrice rectiligne quelconque de la surface réglée représentée par les équations* (4), (5), *dans lesquelles* c, e *sont des fonctions d'un paramètre indépendant quelconque* t.

Lorsque la directrice est plane, $\frac{1}{r}=0$, et la condition à vérifier devient

$$\xi'+\frac{1}{\rho}(\xi\eta'-\xi'\eta)=0,$$

ce qui exige que la directrice soit un cercle.

Or nous avons

$$\frac{\xi'}{\xi}=\frac{\eta'}{\eta-\rho};$$

d'où par intégration

$$\log\xi=\log m+\log(\eta-\rho),$$

c'est-à-dire

$$\xi=m(\eta-\rho),$$

m étant une constante arbitraire.

Cette équation représente un plan passant par la perpendiculaire élevée du centre sur le plan du cercle; la génératrice est une ligne quelconque placée sur ce plan, et le mouvement est une rotation autour de la perpendiculaire susdite.

Lorsque la directrice est une droite, $\frac{1}{\rho}=0$ et $\frac{1}{r}$ devient indéterminé; si l'on considère $\frac{1}{r}$ comme constant, l'égalité (2) devient

$$\zeta\eta'-\zeta'\eta+r\xi'=0;$$

c'est l'équation d'une ligne qui, dans le mouvement hélicoïdal autour de $\Omega\xi$ pour lequel le rapport de la vitesse de translation à celle de rotation est r, reste orthogonale aux hélices décrites par ses points.

Si l'on considère $r=0$, on a

$$\eta\zeta'-\eta'\zeta=0;\qquad \text{d'où}\qquad \eta=p\zeta,$$

équation d'un plan qui passe par l'axe des ξ. La surface est donc une surface de révolution quelconque dont la courbe mobile est la ligne méridienne.

2. On peut donner une généralisation du théorème démontré au n° 1. Supposons que le mouvement du trièdre ait lieu de manière que l'origine Ω parcoure une ligne L, que les arêtes $\Omega\xi$, $\Omega\zeta$ forment deux surfaces réglées Σ, Σ_1 conjuguées, ayant L pour ligne de striction commune. L'arête $\Omega\eta$ est alors toujours normale aux surfaces Σ, Σ_1 le long de la ligne de striction. On peut construire dans l'espace une ligne H, dont les tangentes, les binormales et les normales principales soient parallèles aux arêtes $\Omega\xi$, $\Omega\zeta$, $\Omega\eta$.

Si l'on conserve les notations précédentes, les coordonnées d'un point arbitraire de la ligne mobile Λ, dans une de ses positions, sont

$$X = x + \xi\cos\alpha_0 + \eta\cos\lambda_0 + \zeta\cos l_0, \qquad \ldots,$$

où les quantités α_0, λ_0, l_0, ..., relatives à la directrice H, ont la signification établie au n° 1. Si s, σ sont l'arc de la ligne L parcourue par Ω et celui de la ligne mobile Λ, on a

$$\frac{\partial X}{\partial\sigma} = \xi'\cos\alpha_0 + \eta'\cos\lambda_0 + \zeta'\cos l_0,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial s} &= \cos\alpha - \eta\,\frac{ds_0}{\rho_0}\,\frac{\cos\alpha_0}{ds}\\ &\quad + \left(\xi\,\frac{ds_0}{\rho_0} + \zeta\,\frac{ds_0}{r_0}\right)\frac{\cos\lambda_0}{ds} - \eta\,\frac{ds_0}{r_0}\,\frac{\cos l_0}{ds},\end{aligned}$$

....

Or $\dfrac{ds_0}{\rho_0}$ est l'angle infinitésimal formé par deux tangentes consécutives de H, et par conséquent il est égal à l'angle ω de deux génératrices consécutives de Σ. Pareillement $\dfrac{ds_0}{r_0}$ est égal à l'angle infinitésimal ω_1 de deux génératrices consécutives de Σ; on a donc

$$\frac{\partial X}{\partial s} = \cos\alpha - \eta\,\frac{\omega}{ds}\cos\alpha_0 + \frac{\xi\omega + \zeta\omega_1}{ds}\cos\lambda_0 - \eta\,\frac{\omega_1}{ds}\cos l_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ;$$

d'où l'on déduit

$$\mathrm{F} = \sum \frac{\partial X}{\partial\sigma}\,\frac{\partial X}{\partial s} = \xi'\Sigma\cos\alpha\cos\alpha_0 + \eta'\Sigma\cos\lambda_0 + \zeta'\Sigma\cos\alpha\cos l_0$$
$$- \frac{\omega}{ds}(\xi\eta' - \xi'\eta) - \frac{\omega'}{ds}(\eta\zeta' - \eta'\zeta).$$

Si l'on remarque que

$$\Sigma\cos\alpha\cos\alpha_0 = \cos i, \qquad \Sigma\cos\alpha\cos l_0 = \sin i,$$

i étant l'angle sous lequel la ligne de striction L coupe les génératrices de Σ, et que $\Sigma\cos\alpha\cos\lambda_0 = 0$, on a, pour condition d'orthogonalité des lignes $s = \text{const.}$, $\sigma = \text{const.}$,

$$(7)\quad \mathrm{F} = \xi'\cos i - \zeta'\sin i + \frac{\omega}{ds}(\xi\eta' - \xi'\eta) - \frac{\omega'}{ds}(\eta\zeta' - \eta'\zeta) = 0.$$

Si l'on fait $i = 0$, on obtient la relation (2); si l'on suppose i constant, la ligne de striction est géodésique sur les surfaces gauches Σ, Σ_1.

Dans cette hypothèse, une dérivation par rapport à s réduit (7) à

$$\left(\frac{\omega}{ds}\right)'(\xi\eta' - \xi\,\eta) - \left(\frac{\omega_1}{ds}\right)'(\eta\zeta' - \eta'\zeta) = 0.$$

Cette égalité, par des considérations analogues à celles développées précédemment, donne

$$(8)\qquad \frac{\omega}{ds} - a\,\frac{\omega_1}{ds} = b, \qquad \eta = c(a\xi + \zeta),$$

ce qui réduit l'égalité (7) à la suivante

$$\xi'\cos i - \zeta\sin i + b(\xi\eta' - \xi'\eta) = 0.$$

Or la deuxième égalité (8) nous offre

$$\zeta = \frac{\eta}{c} - a\xi; \qquad \text{d'où} \qquad \zeta' = \frac{\eta'}{c} - a\xi',$$

et l'égalité précédente devient

$$\frac{b\xi'}{b\xi + \frac{\sin i}{c}} = \frac{b\eta'}{b\eta + a\sin i - \cos i};$$

d'où, par intégration,

$$(9) \qquad \xi + \frac{\sin i}{c} = e(b\eta + a\sin i - \cos i).$$

La première équation (8) sert à caractériser la ligne L parcourue par le sommet du trièdre mobile. En effet, l'angle infinitésimal ω, formé par deux génératrices consécutives d'une surface réglée dont la ligne de striction est géodésique, est donné de la manière suivante

$$\omega = \left(\frac{\cos i}{\rho} - \frac{\sin i}{r}\right) ds,$$

ρ étant le rayon de courbure et r celui de torsion de la ligne de striction.

Pour obtenir l'angle ω_1, il suffit que l'on change i en $i - \frac{\pi}{2}$ dans l'égalité qui précède. On a de la sorte

$$\omega_1 = \left(\frac{\sin i}{\rho} + \frac{\cos i}{r}\right) ds,$$

et l'équation (8) nous donne alors

$$(10) \qquad (\cos i - a\sin i)\frac{1}{\rho} = (\sin i + a\cos i)\frac{1}{r} + b.$$

Donc :

Si l'on pose la condition que, dans le mouvement d'un trièdre trirectangle s'effectuant de la manière *qu'on vient d'indiquer, une ligne invariablement liée à ce trièdre soit orthogonale aux trajectoires décrites par ses points, le sommet du trièdre parcourt une ligne dont la courbure et la torsion sont liées entre elles par une équation linéaire et la ligne mobile est une génératrice rectiligne quelconque de la surface réglée représentée par les équations*

$$\eta = e(a\xi + \zeta), \qquad \xi + \frac{\sin i}{bc} = e(bq + a\sin i\cos i),$$

c et e étant des fonctions d'un paramètre indépendant.

3. Considérons un point A invariablement lié au trièdre fondamental d'une ligne à double courbure quelconque L et désignons par ξ, η, ζ les coordonnées de A par rapport à la tangente, à la normale principale et à la binormale de L. Dans le mouvement du trièdre, le point A décrit une ligne Λ, dont nous désignons par σ l'arc. La première des relations (1) et ses analogues nous donnent

$$\frac{\partial X}{\partial \sigma}\frac{d\sigma}{ds} = \left(1 - \frac{\eta}{\rho}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\xi}{\rho} + \frac{\zeta}{r}\right)\cos\lambda - \frac{\eta}{r}\cos l, \qquad \ldots,$$

et, si l'on désigne par $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ les cosinus directeurs de la tangente de Λ, il vient

$$\cos\alpha_1 = \frac{\partial X}{\partial \sigma} = \frac{\left(1 - \frac{\eta}{\rho}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\xi}{\rho} + \frac{\zeta}{r}\right)\cos\lambda - \frac{\eta}{r}\cos l}{\sqrt{\left(1 - \frac{\eta}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\xi}{\rho} + \frac{\zeta}{r}\right)^2 + \frac{\eta^2}{r^2}}}, \qquad \ldots.$$

Si donc D désigne le dénominateur de cette fraction, on a

$$\Sigma \cos\alpha_1 \cos\alpha = \frac{1-\frac{\tau_1}{\rho}}{D},$$

$$\Sigma \cos\alpha_1 \cos\lambda = \frac{\frac{\xi}{\rho}+\frac{\zeta}{r}}{D},$$

$$\Sigma \cos\alpha_1 \cos l = -\frac{\frac{\tau_1}{r}}{D}.$$

La condition $\Sigma \cos\alpha_1 \cos\alpha = 0$ équivaut à $\rho = \tau_1$; or τ_1 est constant dans le mouvement du trièdre, par conséquent la ligne L doit être à courbure constante.

La condition $\Sigma \cos\alpha_1 \cos\lambda = 0$ équivaut à $\frac{\rho}{r} = -\frac{\xi}{\zeta}$, qui, à cause de la constance de ξ et ζ, exprime que la ligne L est une hélice.

La condition $\Sigma \cos\alpha_1 \cos l = 0$ équivaut à $\frac{\tau_1}{r} = 0$, qui est vérifiée lorsque $\frac{1}{r} = 0$, ou bien $\tau_1 = 0$; la première condition nous apprend que L est plane et l'autre exprime que le point doit être sur le plan rectifiant de la directrice.

Si l'on remarque que l'équation $\tau_1 = \rho$ représente un plan parallèle au plan rectifiant de L, et que l'équation $\frac{\xi}{\zeta} = -\frac{\rho}{r}$ représente un plan passant par la normale principale et par la droite rectifiante de L, on a le théorème suivant :

Entre les points liés invariablement au trièdre fondamental d'une ligne à double courbure L, *ceux qui, dans le mouvement dont on vient de parler, décrivent une ligne* Λ *dont la tangente est perpendiculaire respectivement à la tangente ou à la normale principale ou à la binormale de* L, *sont placés d'une manière quelconque respectivement sur un plan passant par le* *centre de courbure parallèlement au plan rectifiant de* L, *ou sur un plan déterminé par la normale principale et la droite rectifiante de* L, *ou sur le plan rectifiant de* L.

La directrice L *est respectivement une ligne à courbure constante, ou une hélice, ou une ligne entièrement arbitraire.*

Lorsque la directrice est plane, le point que l'on cherche est arbitraire.

Les points, décrivant des lignes dont la tangente est perpendiculaire à la tangente et à la normale principale, c'est-à-dire parallèle à la binormale de L, sont sur l'intersection des deux premiers plans du théorème que l'on vient d'énoncer; cette intersection est parallèle à la droite rectifiante de L et passe par le centre de courbure de cette ligne. La ligne L doit être une hélice à courbure constante, c'est-à-dire une hélice circulaire.

Les points, décrivant des lignes dont la tangente est perpendiculaire à la normale principale et à la binormale, c'est-à-dire parallèle à la tangente de L, sont sur l'intersection des deux derniers plans du théorème précédent. Cette intersection est la droite rectifiante de L et cette ligne est une hélice.

Donc :

Entre les points invariablement liés au trièdre fondamental d'une ligne L, *ceux qui, dans le mouvement susdit, décrivent une ligne dont la tangente est parallèle respectivement à la binormale ou à la tangente de* L, *sont respectivement sur la droite parallèle à la droite rectifiante d'une hélice circulaire menée par le centre de courbure de cette ligne ou sur la droite rectifiante d'une hélice quelconque. Il n'y a pas de points qui décrivent des lignes ayant leur tangente parallèle à la normale principale de la courbe directrice.*

4. Soit Λ une courbe plane liée invariablement au système d'axes $\Omega(\xi, \eta)$, dont l'origine Ω parcourt une ligne L; désignons par ξ, η les coordonnées d'un point quelconque de Λ exprimées en fonction de l'arc σ. Les coordonnées de ce point par rapport au système d'axes fixes sont

$$\begin{aligned} X &= x(s) + \xi(\sigma)\cos\theta(\sigma) - \eta(\sigma)\sin\theta(\sigma), \\ Y &= y(s) + \xi(\sigma)\sin\theta(\sigma) + \eta(\sigma)\cos\theta(\sigma), \end{aligned}$$

$\theta(\sigma)$ étant l'angle que l'axe coordonné $\Omega\xi$ forme avec l'axe Ox.

On a ici

$$\frac{\partial X}{\partial \sigma} = \xi' \cos\theta - \eta' \sin\theta, \qquad \frac{\partial X}{\partial s} = x' - (\xi \sin\theta + \eta \cos\theta)\,\theta',$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \sigma} = \xi' \sin\theta + \eta' \cos\theta, \qquad \frac{\partial Y}{\partial s} = y' + (\xi \cos\theta - \eta \sin\theta)\,\theta',$$

et la condition pour que les lignes $s = \text{const.}$ (ligne mobile) et les $\sigma = \text{const.}$ (trajectoires décrites par les points de Λ) soient orthogonales est

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial X}{\partial \sigma}\frac{\partial X}{\partial s} + \frac{\partial Y}{\partial \sigma}\frac{\partial Y}{\partial s} \\ &\quad = \xi'(x' \cos\theta + y' \sin\theta) \\ &\quad\quad - \eta'(x' \sin\theta - y' \cos\theta) + (\xi\eta' - \xi'\eta)\theta' = 0. \end{aligned} \right.$$

Si l'on suppose que le mouvement de la ligne ne soit pas une translation, θ' est différent de zéro; on peut donc diviser (11) par θ', ce qui donne

$$\xi' \frac{x' \cos\theta + y' \sin\theta}{\theta'} - \eta' \frac{x' \sin\theta - y' \cos\theta}{\theta'} + \xi\eta' - \xi'\eta = 0;$$

d'où, par dérivation par rapport à s,

$$\xi' \left(\frac{x' \cos\theta + y' \sin\theta}{\theta'}\right)'_s - \eta' \left(\frac{x' \sin\theta - y' \cos\theta}{\theta'}\right)'_s \cdot$$

On en déduit

$$\frac{\xi'}{\eta'} = \frac{\left(\dfrac{x'\sin\theta - y'\cos\theta}{\theta'}\right)'_s}{\left(\dfrac{x'\cos\theta + y'\sin\theta}{\theta'}\right)'_s};$$

et puisque le premier membre est une fonction de σ et le second une fonction de s, il faut qu'on ait

$$\xi' = a\eta', \qquad \left(\frac{x'\sin\theta - y'\cos\theta}{\theta'}\right)'_s = a\left(\frac{x'\cos\theta + y'\sin\theta}{\theta'}\right)'_s,$$

a étant une constante arbitraire.

On obtient par intégration

$$\xi = a\eta + b, \qquad x'\sin\theta - y'\cos\theta = a(x'\cos\theta + y'\sin\theta) + \theta c,$$

et conséquemment la condition (11) devient

$$\theta'\eta'(b - c) = 0.$$

Cette relation nous donne $b = c$; et l'on peut dire que la solution la plus générale de l'équation (11) est la suivante

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \xi &= a\eta + b,\\ x'\sin\theta - y'\cos\theta &= a(x'\cos\theta + y'\sin\theta) + b\theta'. \end{aligned}\right.$$

La première des équations (12) nous apprend que la ligne mobile se réduit à une droite; la deuxième donne θ en fonction de x' et y' et conséquemment en fonction de s; le mouvement est donc entièrement déterminé.

On peut faire $b = 0$ sans rien perdre en généralité; en effet, la condition $b = 0$ peut être remplie par une translation de l'axe des η parallèlement à sa direction, en vertu de laquelle l'origine Ω se réduit à une nouvelle origine Ω_1. Il suffit alors de remplacer la ligne L parcourue par Ω par la ligne L_1, décrite par la nouvelle origine Ω_1.

On peut donc énoncer le théorème :

Entre les lignes invariables de forme, il n'y a que la droite qui, dans le mouvement sur un plan, puisse rester orthogonale aux trajectoires décrites par ses points ; cela a lieu lorsque la droite passe par l'origine Ω *des axes mobiles et le mouvement s'effectue de manière que cette origine parcourt une ligne quelconque* $L(x, y, s)$, *tandis que l'axe* $\Omega\xi$ *fait avec l'axe des* x *un angle* θ *donné par l'équation*

$$\tan g\theta = \frac{a\dfrac{dx}{ds} + \dfrac{dy}{ds}}{\dfrac{dx}{ds} - a\dfrac{dy}{ds}}.$$

5. Soient $x = \varphi(u, v), y = 0, z = \psi(u, v)$ les coordonnées d'un point quelconque du plan coordonné xz, exprimées en fonction de deux paramètres indépendants u, v. Considérons la surface représentée par les équations

$$X = x\cos V, \qquad Y = x\sin V, \qquad Z = z,$$

V étant une fonction arbitraire de v. On en déduit

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\cos V, \qquad \frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\sin V, \qquad \frac{\partial Z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\cos V - x\sin V.V', \qquad \frac{\partial Y}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\sin V + x\cos V.V', \qquad \frac{\partial Z}{\partial v} = 0,$$

d'où

$$\sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Cette égalité exprime la proposition suivante :

Si $x = \varphi(u, v), y = 0, z = \psi(u, v)$ *sont les coordonnées d'un point quelconque d'un plan, exprimées en fonction des paramètres* u, v *de deux systèmes de* *lignes orthogonales, sur la surface*

$$X = \varphi(u, v)\cos V, \qquad Y = \varphi(u, v)\sin V, \qquad Z = \psi(u, v)$$

(V *étant une fonction arbitraire de* v), *les lignes* $u =$ const., $v =$ const., *sont orthogonales, et réciproquement.*

Nous allons faire quelques applications de ce théorème.

Sur une surface quelconque soient L les lignes que l'on obtient en coupant la surface par une suite de plans passant par l'axe des z. Considérons sur la surface les lignes l trajectoires orthogonales des lignes L; les lignes l, L seront représentées sur la surface respectivement par les équations $u =$ const., $v =$ const. On peut supposer que u indique un paramètre indépendant quelconque et que v représente l'angle que le plan coupant la surface fait avec le plan coordonné $y = 0$.

Les coordonnées d'un point quelconque de la surface peuvent s'exprimer en fonction de u, v, par des égalités de la forme

$$X = \varphi(u, v)\cos v, \qquad Y = \varphi(u, v)\sin v, \qquad Z = \psi(u, v),$$

$\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ étant deux fonctions convenables de u et v.

Si l'on fait tourner les plans coupant la surface autour de l'axe des z jusqu'à ce qu'ils coïncident avec le plan $y = 0$, on obtient sur ce plan une suite de lignes L_0 égales aux sections L. Les points A_1, A_2, A_3, ..., où les lignes L sont coupées par une même ligne l, forment, sur le plan $y = 0$, une ligne l_0, lieu des points a_1, a_2, a_3, ..., où vont coïncider les points A_1, A_2, A_3, ... Les lignes planes L_0, l_0 sont, en vertu du théorème énoncé, orthogonales.

Donc :

Que l'on coupe une surface quelconque par une suite de plans qui passent par une même droite R, *et que l'on considère les lignes* l, *trajectoires orthogonales des sections* L; *si l'on fait tourner chaque plan coupant, autour de la droite* R, *de manière à l'amener sur un plan fixe passant par cette droite, les lignes* L, l *donnent lieu, sur ce plan, à un double système de lignes orthogonales.*

Sur un plan considérons une ligne L_0 et le système de ses développantes. Ces développantes et les tangentes à la ligne L_0 forment un double système de lignes orthogonales; si donc on fait application du théorème que l'on vient de démontrer, on a :

Si une ligne plane quelconque L *change de forme et de position de manière à rester géodésiquement parallèle à elle-même, tandis que son plan tourne autour d'une droite placée sur ce plan, la ligne mobile* L *reste toujours orthogonale aux trajectoires décrites par ses points dans le double mouvement considéré.*

Soit A une ligne plane quelconque placée sur le plan coordonné $y = 0$; considérons une droite qui se déplace sur ce plan de manière à rester toujours tangente à A. La droite mobile, dans ses différentes positions, et les trajectoires décrites par ses points forment un double système de lignes orthogonales. Si donc on applique le théorème énoncé, on a :

Si une droite roule sur une ligne plane quelconque, tandis que le plan de la courbe tourne autour d'une droite placée sur ce plan, la droite mobile reste tou-

jours orthogonale aux trajectoires décrites par ses points.

Si l'on suppose que la ligne A se réduise à un point, nous avons :

Si une droite D *tourne autour d'un point sur un plan, tandis que ce plan tourne autour d'une de ses droites, la ligne* D *est toujours orthogonale aux trajectoires décrites par ses points.*

Supposons que la droite mobile soit placée sur le plan coordonné $y = 0$, et que le point A, autour duquel a lieu la rotation de la droite, soit placé sur l'axe des x à la distance a de l'origine. Les coordonnées d'un point quelconque M de la droite sont

$$x = a - v\cos\sigma,$$
$$y = 0,$$
$$z = -v\sin\sigma,$$

v désignant le segment AM et σ l'angle de AM avec Ox.

Nous aurons pour les coordonnées d'un point de la surface engendrée

$$X = (a - v\cos\sigma)\cos\varphi(\sigma),$$
$$Y = (a - v\cos\sigma)\sin\varphi(\sigma),$$
$$Z = -v\sin\sigma,$$

$\varphi(\sigma)$ étant une fonction arbitraire de σ. On en déduit

$$\frac{\partial X}{\partial \sigma} = v\sin\sigma\cos\varphi - (a - v\cos\sigma)\sin\varphi.\varphi', \qquad \frac{\partial X}{\partial v} = -\cos\sigma\cos\varphi,$$
$$\frac{\partial Y}{\partial \sigma} = v\sin\sigma\sin\varphi + (a - v\cos\sigma)\cos\varphi\,\varphi', \qquad \frac{\partial Y}{\partial v} = -\cos\sigma\sin\varphi,$$
$$\frac{\partial Z}{\partial \sigma} = -v\cos\sigma, \qquad \frac{\partial Z}{\partial v} = -\sin\sigma,$$

et

$$E = \sum \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 = v^2 + (a - v\cos\sigma)^2 \varphi'^2,$$

$$F = \sum \frac{\partial X}{\partial \sigma}\frac{\partial X}{\partial v} = 0,$$

$$G = \sum \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 = 1.$$

Si dS est la distance entre deux points consécutifs de la surface, nous avons, en vertu des égalités précédentes,

$$dS^2 = [v^2 + (a - v\cos\sigma)^2 \varphi'^2]\, d\sigma^2 + dv^2.$$

Si l'on considère la surface réglée formée par les normales principales d'une ligne L, on a, pour le carré de la distance infinitésimale entre deux points consécutifs de la surface,

$$dS_1^2 = \left[\frac{v^2}{r^2} + \left(1 - \frac{v}{\rho}\right)^2\right] ds^2 + dv^2,$$

s, ρ, r étant l'arc, le rayon de courbure et le rayon de torsion de L, et v les portions des normales principales de L, comptées à partir de cette ligne.

Pour comparer les expressions de dS^2 et de dS_1^2, on remarque que l'on peut écrire

$$dS^2 = \left[\frac{v^2}{a^2\varphi'^2} + \left(1 - \frac{v}{\dfrac{a}{\cos\sigma}}\right)^2\right] a^2\varphi'^2\, d\sigma^2 + dv^2.$$

On rend dS^2 égal à dS_1^2 si l'on prend

$$\rho = \frac{a}{\cos\sigma}, \qquad r = a\varphi', \qquad a\varphi'\, d\sigma = ds.$$

Ces conditions équivalent aux suivantes

$$\rho = \frac{a}{\cos\sigma}, \qquad \varphi(\sigma) = \frac{s}{a} + b, \qquad d\sigma = \frac{ds}{r}.$$

La dernière égalité donne

$$\sigma = \int \frac{ds}{r} + c$$

et, conséquemment,

$$\rho = \frac{a}{\cos\left(c + \int \frac{ds}{r}\right)}.$$

Donc :

La surface, lieu des normales principales d'une ligne pour laquelle est vérifiée la relation

$$\rho \cos\left(c + \int \frac{ds}{r}\right) = a,$$

est applicable sur la surface engendrée par une droite qui tourne autour d'un point A, *l'angle de rotation* σ *étant donné par la formule*

$$\sigma = c + \int \frac{ds}{r},$$

tandis que le plan de la figure tourne autour d'une droite perpendiculaire à celle d'où l'on compte les angles σ, *placée à la distance a de* A, *avec la loi exprimée par l'égalité*

$$\varphi(\sigma) = \frac{s}{a} + b.$$

On a encore

$$s = a\varphi(\sigma) - ab, \qquad r\frac{ds}{d\sigma} = a\varphi'(\sigma),$$

et conséquemment :

La surface réglée engendrée par une droite tournant autour d'un point A, *tandis que le plan de la figure tourne autour d'une droite selon la loi exprimée* *par la fonction* $\varphi(\sigma)$ *de l'angle* σ, *est applicable sur la surface gauche des normales principales d'une ligne, dont le rayon de courbure et celui de torsion sont exprimés de la manière suivante*

$$\rho = \frac{a}{\cos\sigma}, \qquad r = a\varphi'(\sigma),$$

σ *s'exprimant par* s *moyennant l'égalité* $\varphi(\sigma) = \frac{s}{a} + b$.

Exemple. — Si l'on suppose $\varphi(\sigma) = \frac{m}{\sigma}$, on a

$$\sigma = \frac{am}{s + ab};$$

d'où

$$\rho = \frac{a}{\cos\left(\frac{am}{s + ab}\right)}.$$

D'ailleurs : $\varphi'(\sigma) = -\frac{m}{\sigma^2}$, et, par suite,

$$r = -\frac{am}{\sigma^2} = -\frac{(s + ab)^2}{am}.$$

Donc :

La surface engendrée est applicable sur la surface gauche des normales principales de la ligne

$$\rho = \frac{a}{\cos\left(\frac{am}{s + ab}\right)}, \qquad r = -\frac{(s + ab)^2}{am}.$$