NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FOURET

Démonstration et applications d'un théorème de Liouville sur l'élimination

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 258-288

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__258_1>

DÉMONSTRATION ET APPLICATIONS D'UN THÉORÈME DE LIOUVILLE SUR L'ÉLIMINATION;

Par M. G. FOURET,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

1. Liouville, dans un beau Mémoire bien connu sur l'élimination [1], a obtenu, entre autres résultats d'une analyse un peu complexe, un théorème d'un grand intérêt, en raison des nombreuses applications auxquelles il se prête. Je me propose de donner de ce théorème une démonstration fort simple, qui le rend en quelque sorte

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1re série, t. VI, p. 359.

intuitif, et d'en déduire ensuite quelques conséquences géométriques.

Occupons-nous d'abord du cas de deux équations à deux variables : le théorème de Liouville peut alors s'énoncer de la manière suivante :

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Dans l'équation de degré mn résultant de l'élimination d'une variable entre deux équations algébriques à deux variables, dont les degrés sont respectivement m et n, le coefficient du terme de degré $mn-i$ dépend exclusivement des coefficients des termes des deux équations données, qui sont d'un degré égal ou supérieur à $m-i$ pour la première, à $n-i$ pour la seconde.*

Les coefficients des termes de degrés respectivement égaux à $m-i$ et à $n-i$, dans les équations données, ne peuvent figurer que linéairement et multipliés par des facteurs indépendants des autres coefficients, dans la composition du coefficient du terme de degré $mn-i$ de l'équation résultante.

2. Soient

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &u_m + z u_{m-1} + z^2 u_{m-2} + \ldots + z^i u_{m-i} + \ldots + z^m u_0 = 0,\\ &v_n + z v_{n-1} + z^2 v_{n-2} + \ldots + z^i v_{n-i} + \ldots + z^n v_0 = 0\end{aligned}\right.$$

deux équations algébriques, à deux variables x et y, rendues homogènes par l'introduction d'une troisième variable z, et ayant des degrés respectivement égaux à m et à n. Dans ces équations, les u et les v désignent des polynômes homogènes en x et y, d'un degré marqué par leur indice.

L'équation

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &a_0 x^{mn} + a_1 z x^{mn-1} + a_2 z^2 x^{mn-2} + \ldots\\ &\qquad + a_i z^i x^{mn-i} + \ldots + a_{mn} z^{mn} = 0,\end{aligned}\right.$$

résultant de l'élimination de y entre les équations (1), s'obtient, comme on le sait, en égalant à zéro un certain déterminant, dont les éléments sont les polynômes en x et z, qui multiplient les diverses puissances de y dans ces équations. Les seules opérations à effectuer sur ces polynômes, pour en déduire le premier membre de l'équation (2), consistent par suite en multiplications et additions. Il ne saurait donc entrer dans la formation du coefficient a_i de $z^i x^{mn-i}$, aucun des coefficients des équations (1), qui contiennent z à un degré supérieur à i. Autrement dit, le coefficient a_i ne peut dépendre que des coefficients des termes des équations (1), qui sont d'un degré en z égal ou inférieur à i, c'est-à-dire d'un degré en x et y égal ou supérieur à $m - i$ pour la première équation, à $n - i$ pour la seconde.

Pour la même raison, le coefficient a_i est forcément linéaire par rapport à l'ensemble des coefficients de u_{m-i} et de v_{n-i}.

3. Les relations bien connues, qui lient les fonctions symétriques entières des racines d'une équation aux coefficients de cette équation, permettent de conclure immédiatement du théorème qui vient d'être démontré la conséquence suivante :

La somme des produits i à i des mn racines de l'équation résultante ne dépend que des termes des équations données, dont le degré est au moins égal à m — i pour la première et à n — i pour la seconde. Il en est de même de la somme des $i^{\text{èmes}}$ *puissances, et, plus généralement, de toute fonction symétrique entière de degré i de ces racines.*

Il est essentiel, pour appliquer judicieusement et sans erreur le théorème de Liouville, de s'assurer que l'équation résultante est bien d'un degré égal au produit des degrés des équations entre lesquelles doit se faire l'élimination.

4. Comme première application du théorème fondamental de Liouville, nous allons en déduire immédiatement, et sans calcul, le théorème suivant, dû à Chasles [1] :

Le centre de moyenne distance des points de contact des tangentes menées à une courbe plane algébrique, parallèlement à une même direction, est un point fixe, indépendant de cette direction.

En effet, soit

$$f(x, y) = 0 \tag{3}$$

l'équation de la courbe, supposée du $m^{\text{ième}}$ degré. Les points de contact des tangentes menées à cette courbe parallèlement à une direction de coefficient angulaire α, ont pour coordonnées les systèmes de valeurs de x et y qui vérifient à la fois l'équation (3) et l'équation

$$f'_x + \alpha f'_y = 0, \tag{4}$$

de degré $m - 1$.

---

(1) C'est, comme on le sait, en transformant géométriquement le théorème de Newton sur les diamètres des courbes ou des surfaces, que Chasles a trouvé ce théorème et son analogue dans l'espace (*Aperçu historique*, p 624). Il l'a démontré plus tard analytiquement, comme application d'un système particulier de coordonnées tangentielles (*Géométrie supérieure*, 1re édition, p. 358-360). M. d'Ocagne a communiqué récemment à la Société mathématique de France deux démonstrations du même théorème fondées sur l'emploi des coordonnées parallèles et axiales. M. Weill en a également publié une démonstration analytique (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. VI, p. 82). La démonstration de Liouville, après la notable simplification que nous lui faisons subir ici, nous paraît être la plus simple et la plus directe.

Soit

$$a_0 x^{m(m-1)} + a_1 x^{m(m-1)-1} + \ldots = 0$$

l'équation de degré $m(m-1)$ résultant de l'élimination de y entre les équations (3) et (4). L'abscisse x du centre de moyenne distance des points communs aux courbes (3) et (4) est égale à $-\dfrac{a_1}{m(m-1)a_0}$. Or les coefficients a_0 et a_1, d'après le théorème fondamental (n° 1), ne dépendent que des coefficients des termes de degrés m et $m-1$ de l'équation (3), ceux-ci entrant exclusivement dans la composition des termes de degrés $m-1$ et $m-2$ de l'équation (4). Par suite, le centre de moyenne distance des points communs aux courbes (3) et (4) ne change pas, lorsqu'on remplace la courbe (3) par une autre ayant les mêmes asymptotes, et notamment par l'ensemble de ces asymptotes. Mais les $m(m-1)$ points de contact des tangentes parallèles à une direction déterminée se confondent alors, par couples, avec les $\dfrac{m(m-1)}{2}$ points d'intersections mutuelles de ces m asymptotes. Le point fixe, centre de moyenne distance de ces derniers points, coïncide, en conséquence, avec le centre de moyenne distance des points de contact des tangentes menées à la courbe (3) parallèlement à une même direction, quelle que soit cette direction, et le théorème de Chasles se trouve démontré.

On voit, par la démonstration même, que ce théorème s'applique à une courbe possédant des points multiples, quelle qu'en soit la nature, et abstraction faite de ces points considérés comme points de contact multiples de tangentes parallèles à une même direction.

Il est également clair que le théorème n'a plus lieu, lorsque la courbe a une ou plusieurs branches paraboliques.

On peut remarquer en outre que, *dans le cas où les asymptotes de la courbe passent par un même point, ce point est précisément le centre de moyenne distance des points de contact des tangentes parallèles à une même direction.*

5. Imaginons que l'on fasse varier, dans les équations (1), les termes qui renferment z à un degré supérieur au premier, les autres ne changeant pas. Chacune des courbes définies par les équations (1), par rapport à un système d'axes de coordonnées quelconque, varie alors en conservant les mêmes asymptotes. D'ailleurs la somme des x et la somme des y des points communs aux deux courbes ne dépendant que de u_m, u_{m-1}, v_n, v_{n-1}, d'après le théorème fondamental de Liouville (n° 1), on voit que le centre de moyenne distance des points d'intersection des deux courbes reste fixe. On peut donc énoncer le théorème suivant, également dû à Liouville [1] :

Le centre de moyenne distance des points communs à deux courbes algébriques reste fixe, lorsque chacune de ces courbes varie, sans changer d'asymptotes.

Ce centre de moyenne distance est en même temps celui des points d'intersection des asymptotes de l'une des courbes avec les asymptotes de l'autre.

En particulier, *quand les asymptotes de deux courbes géométriques passent toutes par un même point, ce point est le centre de moyenne distance des points de rencontre des deux courbes.*

---

(1) *Loc. cit.*, p. 271. — M. Humbert a donné deux autres démonstrations de ce même théorème (*Journal de Mathematiques pures et appliquees*, 4e série, t. III, p. 361, et *Nouvelles Annales de Mathematiques*, 3e série, t. VI, p. 535).

6. Soit

$$f(x, y) = 0 \tag{5}$$

l'équation d'une courbe algébrique, de degré quelconque m, rapportée à un système d'axes de coordonnées rectangulaires. Les points d'incidence des normales menées à cette courbe par un point dont les coordonnées sont $x = a$, $y = b$, se trouvent à l'intersection de celle-ci avec la courbe de degré m,

$$(x - a)f'_y - (y - b)f'_x = 0. \tag{6}$$

Supposons que la courbe (5) n'ait pas de branche parabolique et ne passe pas par les *ombilics* ou *points cycliques*, et imaginons que l'on fasse varier cette courbe, en lui conservant ses asymptotes. Les termes de degrés m et $m - 1$ de l'équation (5) ne subissant, dans cette hypothèse, aucune altération, on voit immédiatement qu'il en est de même des termes de degrés m et $m - 1$ de l'équation (6). La courbe (6) varie par suite en conservant ses asymptotes, et l'on en conclut, d'après un théorème précédent (n° 5) que *le centre de moyenne distance des points d'incidence des normales menées d'un même point à une courbe algébrique n'ayant pas de branche parabolique, reste fixe, lorsque la courbe varie en conservant ses asymptotes* [1].

On peut ajouter que *ce centre de moyenne distance est le centre de moyenne distance des pieds des perpendiculaires abaissées du point fixe sur les asymptotes de la courbe et des points d'intersection, considérés*

---

[1] Les considérations développées plus loin (n° 8) montrent comment ce théorème s'étend aux courbes passant par les points cycliques.

comme doubles, de ces asymptotes prises deux à deux.

Il suffit, pour établir cette dernière partie du théorème, de supposer que la courbe du $m^{\text{ième}}$ degré se réduise à ses asymptotes, et de remarquer qu'alors les pieds des normales, issues d'un même point fixe, viennent coïncider par couples avec les $\frac{m(m-1)}{2}$ points d'intersection des asymptotes prises deux à deux.

Le théorème cesse d'être vrai, lorsque la courbe a une ou plusieurs branches paraboliques : les courbes (5) et (6) ayant alors un ou plusieurs de leurs points communs à l'infini, le centre de moyenne distance de ces points est lui-même à l'infini.

7. En général, le centre de moyenne distance des points d'incidence des normales à une courbe algébrique, issues d'un même point, varie avec la position de ce point; mais il existe une classe remarquable de courbes pour lesquelles ce centre de moyenne distance est fixe, quel que soit le point d'où sont menées les normales. Ce sont les courbes de degré pair dont toutes les directions sont des directions *isotropes,* et que, pour cette raison, M. d'Ocagne a proposé d'appeler *isotropiques* [1].

8. Considérons une courbe algébrique C, de degré m, pour laquelle les directions isotropes soient des directions asymptotiques multiples. Soit r le degré de multiplicité de chacune d'elles. Les normales menées d'un point O quelconque à cette courbe s'obtiennent en joignant le point O aux points d'intersection de la courbe C avec une seconde courbe égale, résultant d'une rotation

---

[1] *Journal de Mathématiques spéciales*, 3e série, t. I, p. 125.

infiniment petite de la première autour du point O. Les points d'intersection des deux courbes, et, par suite, les normales menées de O à C sont au nombre total de m^2. Mais chacune des courbes ayant r branches passant par chacun des points cycliques, il y a r^2 points d'intersection qui coïncident avec chacun de ces points cycliques, et le nombre des normales menées de O à C se trouve réduit à $m^2 - 2r^2$. D'autre part, l'ensemble des asymptotes de la courbe C, admettant également les points cycliques comme points multiples d'ordre r de multiplicité, le nombre des normales menées de O à cette courbe dégénérescente est pareillement réduit à $m^2 - 2r^2$: ces normales comprennent les $m - 2r$ perpendiculaires abaissées de O sur les asymptotes non isotropes, et deux fois les $\frac{m(m-1)}{2} - r(r-1)$ droites qui joignent le point O aux points, autres que les points cycliques, en lesquels se coupent deux à deux les m asymptotes. Les deux groupes, composés chacun de $m^2 - 2r^2$ points à distance finie, que l'on obtient ainsi, ont le même centre de moyenne distance en vertu d'un théorème démontré plus haut (n° 6).

9. Appliquons la conclusion précédente à une courbe isotropique de degré $2n$. Le nombre des normales menées d'un point quelconque O à une pareille courbe est $2n^2$. L'ensemble des $2n$ asymptotes isotropes de cette courbe peut être considéré comme une variété dégénérescente d'une courbe isotropique, et les $2n^2$ normales qu'on peut lui mener du point O se composent de deux fois les n^2 droites qui joignent ce point aux points d'intersection des asymptotes parallèles à l'une des directions isotropes avec les asymptotes parallèles à l'autre direction isotrope (n° 8). Le centre de moyenne distance

de ce dernier groupe de points étant indépendant du point O, on peut énoncer le théorème suivant ([1]) :

Le centre de moyenne distance des points d'incidence des normales menées d'un même point à une courbe isotropique est fixe, quelle que soit la position de ce point.

Ce point peut même s'éloigner à l'infini dans une direction quelconque. On en conclut que, *dans le cas d'une courbe isotropique, le centre de moyenne distance des pieds des normales issues d'un même point coïncide avec celui des points de contact des tangentes parallèles à une même direction.*

On peut ajouter que *ce centre de moyenne distance coïncide avec celui des foyers singuliers réels de la courbe.*

Pour établir cette dernière partie du théorème, il suffit de se rappeler que, suivant une dénomination introduite par Laguerre, les foyers singuliers sont les points réels où les asymptotes parallèles à l'une des directions isotropes coupent respectivement leurs conjuguées, et de remarquer que le centre de moyenne distance de ces n foyers réels coïncide manifestement avec le centre de moyenne distance des n^2 points, tant imaginaires que réels, où les n asymptotes parallèles à une des directions isotropes rencontrent les n asymptotes parallèles à l'autre direction isotrope.

10. Avant d'aller plus loin, nous allons rappeler la solution d'un problème bien simple et bien connu, sur

---

([1]) Ce théorème et le théorème analogue pour les surfaces isotropiques ont été communiqués à la Société mathématique, dans sa séance du 2 novembre 1887, par M. Humbert, qui est arrivé à ces résultats par une voie différente.

laquelle nous aurons à nous appuyer. Soient MN_1, MN_2, ..., MN_n des normales menées d'un même point M à n courbes ou segments de courbes C_1, C_2, ..., C_n. Supposons que le point M se meuve de façon que l'on ait

$$\overline{MN_1}^2 + \overline{MN_2}^2 + \ldots + \overline{MN_n}^2 = k^2$$

ou, pour abréger,

$$\Sigma \overline{MN}^2 = k^2, \tag{7}$$

k désignant une constante.

En différentiant la relation précédente, on obtient

$$\Sigma \overline{MN}\, d\overline{MN} = 0. \tag{8}$$

Considérons le point M comme soumis à n forces représentées, en grandeur, direction et sens, par MN_1, MN_2, ..., MN_n.

La relation (8) exprime que la somme des travaux élémentaires de ces forces est nulle, lorsque le point M se déplace sur la courbe définie par la relation (7). Il en est par suite de même du travail élémentaire de la résultante de ces forces, et l'on en conclut que cette résultante est dirigée suivant la normale en M à la courbe considérée [1]. D'autre part, d'après un théorème bien connu, la résultante des forces MN_1, MN_2, ..., MN_n passe par le centre de moyenne distance O des n points N_1, N_2, ..., N_n, et est représentée par n fois la distance MO. On aura donc la normale à la courbe définie par la relation (7), en joignant le point M de cette courbe au centre de moyenne distance des pieds des normales

(1) Cette courbe est une ligne de niveau pour le système de forces que nous considérons, et la fonction des forces correspondante est $\Sigma \overline{MN}^2$.

menées de ce point aux courbes ou portions de courbes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ (¹).

11. Considérons, dans un plan, une courbe C, du $m^{\text{ième}}$ degré, soumise à la seule restriction de n'avoir pas de branches paraboliques, et proposons-nous de trouver le lieu L d'un point M, tel que la somme $\Sigma\overline{MN}^2$ des carrés des normales qu'on peut lui mener de ce point soit constante. Par chaque point du plan passe un pareil lieu et un seul; de plus, la normale à ce lieu s'obtient par la construction exposée au numéro précédent, c'est-à-dire en joignant le point M au centre de moyenne distance des pieds des normales menées de ce point à la courbe C.

Considérons, d'autre part, le lieu Λ d'un point tel que la somme des carrés $\Sigma\overline{MP}^2$ des distances de ce point aux asymptotes de C, augmentée du double de la somme $\Sigma\overline{MQ}^2$ des carrés des distances du même point aux points d'intersection de ces asymptotes prises deux à deux, soit constante. Par chaque point du plan passe un tel lieu Λ et un seul. D'un théorème démontré plus haut (n° 6) et de la construction qui vient d'être rappelée (n° 10), il résulte d'ailleurs que les normales et par suite les tangentes, en un même point du plan, aux courbes L et Λ qui y passent, coïncident. Les deux systèmes de courbes L et Λ ont, en conséquence, la même équation différentielle, c'est-à-dire ne forment qu'un seul et même système.

12. Cela posé, soient, par rapport à un système d'axes de coordonnées rectangulaires,

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0$$

(¹) Cette solution, comme on le sait, est due à Leibnitz.

l'équation d'une quelconque des asymptotes de la courbe C, et α, β les coordonnées du point d'intersection de deux de ces asymptotes : l'équation du lieu Λ peut s'écrire

$$(9)\quad \Sigma(x\cos\varphi + y\sin\varphi - p)^2 + 2\Sigma[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2] = k^2,$$

k désignant une constante. On reconnaît là l'équation d'une conique, ou plutôt d'une série de coniques concentriques et homothétiques, correspondant aux diverses valeurs de k. Ainsi se trouve démontré un élégant théorème auquel M. Humbert est parvenu par des considérations différant peu des précédentes, et que l'on peut énoncer ainsi ([1]) :

Étant donnée une courbe plane algébrique, de degré quelconque, ne possédant aucune branche parabolique, le lieu d'un point du plan de cette courbe, satisfaisant à la condition que la somme des carrés des longueurs des normales menées de ce point à la courbe soit constante est une conique. Les diverses coniques que l'on obtient ainsi, pour une même courbe, sont concentriques et homothétiques.

Pour certaines courbes, ces coniques se réduiront chacune à un couple de droites parallèles équidistantes d'une même droite fixe.

On voit immédiatement, d'après la forme de l'équation (9), que ces coniques seront toujours des ellipses, lorsque les asymptotes de la courbe C seront toutes réelles.

([1]) Ce théorème et le théorème analogue pour les surfaces ont fait l'objet d'une Communication verbale de M. Humbert à la Société mathématique, dans la seance du 16 novembre 1887. M. Laisant, dans la séance du 4 décembre 1889 de cette Société, a donné une démonstration élégante et ingénieuse de ces mêmes propositions.

Il est clair que dans les cas où la courbe C aura soit un centre, soit un axe de symétrie, les coniques dont il vient d'être question admettront elles-mêmes ce centre ou cet axe de symétrie. En dehors de ces circonstances particulières, il est remarquable de trouver, dans le plan d'une courbe algébrique quelconque, un système de deux axes rectangulaires dont la position se trouve liée à la courbe par la propriété si simple remarquée par M. Humbert.

13. M. Desboves avait obtenu, il y a quelques années [1], le théorème précédent dans un cas très particulier, celui où la courbe C est une ellipse.

Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

l'équation d'une ellipse rapportée à ses axes.

Le lieu d'un point tel que la somme des carrés des longueurs des normales menées de ce point à la courbe soit égale à une constante k^2, a pour équation

$$\frac{a^2 - 2b^2}{c^2} x^2 + \frac{2a^2 - b^2}{c^2} y^2 = \frac{k^2}{2} - a^2 - b^2.$$

Ce lieu est une ellipse, un système de droites parallèles à l'axe des x, et équidistantes de cet axe, ou une hyperbole, suivant que a est supérieur, égal ou inférieur à $b\sqrt{2}$. On vérifie, en outre, sur la dernière équation, que le lieu reste homothétique à lui-même, lorsque k^2 varie.

Le changement de b^2 en $-b^2$ montre bien que, dans le cas de l'hyperbole, le lieu est toujours une ellipse.

---

[1] *Théorèmes et problèmes sur les normales aux coniques*, p. 16.

Enfin, lorsque l'hyperbole est équilatère, le lieu est un cercle. Cette remarque sera généralisée plus loin.

La même question a été résolue et étendue au cas de la parabole par M. Recoq ([1]). L'équation de la parabole rapportée à son axe et à sa tangente au sommet, étant

$$y^2 = 2px,$$

on trouve pour équation du lieu

$$x^2 + 3y^2 + 4px = 2p^2 + k^2.$$

On obtient donc, dans ce cas, une série d'ellipses homothétiques et concentriques, ayant pour centre commun le point de l'axe de la parabole situé à la distance $2p$ du sommet de cette courbe, du côté de la directrice.

Le théorème de M. Humbert, dont nous venons de nous occuper (n° 12), s'étend, du reste, ainsi que l'auteur l'a reconnu, non seulement à la parabole du second degré, mais à toutes les courbes possédant une ou plusieurs branches paraboliques. Nous avons dû laisser de côté ici ce cas spécial.

14. Imaginons, dans le plan d'une courbe algébrique C, supposée du $m^{\text{ième}}$ degré et dénuée de branches paraboliques, un point mobile, constamment sollicité par des forces représentées géométriquement par les normales MN. Un pareil système de forces admet, comme nous en avons déjà fait la remarque, une fonction qui n'est autre que la somme $\Sigma\overline{\mathrm{MN}}^2$ des carrés des longueurs des normales menées du point mobile à la courbe, et, d'après le théorème de M. Humbert (n° 12), les lignes de niveau correspondantes sont des coniques concentriques

---

([1]) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. IV, p. 112.

et homothétiques. Nous les appellerons *coniques de niveau* de la courbe C.

Cela posé, on sait, d'une manière générale, que si le point mobile subit un déplacement infiniment petit quelconque, l'accroissement correspondant de la fonction des forces est égal au produit de la résultante des forces par le segment compris, sur la ligne d'action de cette résultante, entre les deux courbes de niveau qui passent respectivement par les positions initiale et finale du point mobile. Or cette résultante n'est pas modifiée, si l'on remplace le système, défini plus haut (n° 10), des forces telles que MN, par un autre système, comprenant un premier groupe de forces représentées par les perpendiculaires MP menées du point mobile aux asymptotes de C, et un second groupe de forces dirigées vers les points Q d'intersection de ces asymptotes prises deux à deux, et représentées géométriquement par les doubles des longueurs MQ. D'ailleurs, comme on l'a vu (n° 11), les lignes de niveau sont les mêmes pour les deux systèmes de forces; par suite, pour tout déplacement infiniment petit du point mobile, les sommes $\Sigma\overline{MN}^2$ et $\Sigma\overline{MP}^2 + 2\Sigma\overline{MQ}^2$ subissent le même accroissement. On en conclut, par une intégration immédiate, que $\Sigma\overline{MN}^2$ ne diffère de $\Sigma\overline{MP}^2 + 2\Sigma\overline{MQ}^2$ que par une constante. Ce résultat peut s'énoncer ainsi :

Étant donnée une courbe plane algébrique, ne possédant aucune branche parabolique, il y a une différence constante entre la somme des carrés des longueurs des normales menées d'un point quelconque à cette courbe et la somme des carrés des distances du même point à ses asymptotes, augmentée de deux fois la somme des carrés des distances de ce point aux *points d'intersection des asymptotes prises deux à deux* [1].

Le centre commun des coniques définies par l'équation (9) est évidemment le point pour lequel la somme $\Sigma\overline{MP}^2 + 2\Sigma\overline{MQ}^2$ est la plus petite possible. De cette remarque et du dernier théorème énoncé il résulte que *le centre commun des coniques de niveau d'une courbe plane algébrique est un point tel que la somme des carrés des longueurs des normales menées de ce point à la courbe soit la plus petite possible.*

Par suite, en vertu d'un théorème de Statique bien connu, *le centre commun des coniques de niveau est le centre de moyenne distance des pieds de normales menées de ce point à la courbe algébrique.*

15. Il existe deux classes particulières de courbes algébriques dont les coniques de niveau sont des cercles. L'une de ces classes se compose des courbes *isotropiques;* l'autre comprend les courbes dont toutes les asymptotes sont réelles, distinctes, et forment un polygone équiangle.

Pour la première de ces deux classes de courbes, la particularité signalée résulte de ce que la normale à la ligne de niveau, en l'un quelconque de ses points, passe par le centre de moyenne distance des pieds des normales menées de ce point à la courbe isotropique (n° 10) et de ce que ce centre de moyenne distance est fixe (n° 9). De là ce théorème :

Étant donnée dans un plan une courbe isotropique,

---

[1] Cette différence constante est égale à $2(a^2 \pm b^2)$, lorsque la courbe est une ellipse ou une hyperbole, dont les axes ont pour longueurs respectives $2a$ et $2b$.

le lieu d'un point du plan, tel que la somme des carrés des normales menées de ce point à la courbe soit constante, est un cercle ayant pour centre le centre de moyenne distance des foyers singuliers de la courbe isotropique.

Des considérations exposées dans le numéro précédent (nº 14), on conclut en outre immédiatement les conséquences suivantes :

La somme des carrés des normales menées d'un point quelconque à une courbe isotropique de degré $2n$ diffère d'une quantité constante de $2n$ fois la somme des carrés des distances du même point aux n foyers singuliers de la courbe.

Le centre de moyenne distance des foyers singuliers d'une courbe isotropique est tel que la somme des carrés des normales menées de ce point à la courbe est un minimum.

16. Considérons maintenant une courbe plane algébrique C, dont toutes les asymptotes soient réelles, distinctes et forment un polygone équiangle. Dans l'équation (9), le coefficient de xy est égal à $2\Sigma \sin\varphi \cos\varphi$, c'est-à-dire à $\Sigma \sin 2\varphi$; les coefficients de x^2 et de y^2 sont respectivement égaux à $m(m-1)+\Sigma \cos^2\varphi$ ou $m(m-1)+\frac{1}{2}\Sigma(1+\cos 2\varphi)$ et à $m(m-1)+\Sigma \sin^2\varphi$ ou $m(m-1)+\frac{1}{2}\Sigma(1-\cos 2\varphi)$. Or les angles 2φ, d'après les hypothèses faites sur les asymptotes de la courbe C, forment une progression arithmétique dont la raison est $\frac{4\pi}{m}$. Il en résulte, comme on le sait, que $\Sigma \sin 2\varphi$ et $\Sigma \cos 2\varphi$ sont nuls. Par suite, le terme en xy disparaît de l'équation (9), et les coefficients de x^2 et y^2 sont tous deux égaux à $\frac{m(2m-1)}{2}$. Le lieu défini par l'équa-

tion (9) est donc bien un cercle. De là le théorème suivant :

Étant donnée une courbe plane algébrique, dont toutes les asymptotes sont réelles, distinctes, et forment un polygone équiangle, le lieu d'un point tel que la somme des carrés des normales menées de ce point à la courbe soit égale à une constante, est un cercle dont le centre est fixe, quelle que soit la valeur de la constante.

Dans le cas où le polygone formé par les asymptotes est régulier, le centre commun des cercles est le centre du polygone régulier. Cela résulte de ce que le lieu d'un point tel que la somme des carrés des distances de ce point aux côtés d'un polygone régulier soit constante est un cercle ayant pour centre le centre de ce polygone. Il est clair que le cas particulier où les asymptotes de la courbe C formerait une rose des vents est compris dans le précédent.

17. Passons maintenant à une autre application du théorème de Liouville. Soit

$$u_m + z u_{m-1} + z^2 u_{m-2} + \ldots + z^m u_0 = 0 \tag{10}$$

l'équation, rendue homogène, d'une courbe algébrique fixe, coupée par un faisceau ponctuel de courbes ayant toutes les mêmes directions asymptotiques, dont l'équation est, par suite, de la forme

$$\begin{aligned}(1+\lambda)v_n + z(v_{n-1} + \lambda w_{n-1})\\ + z^2(v_{n-2} + \lambda w_{n-2}) + \ldots + z^n(v_0 + \lambda w_0) = 0.\end{aligned}$$

ou bien

$$\left\{\begin{aligned} &v_n + z\frac{v_{n-1} + \lambda w_{n-1}}{1+\lambda}\\ &+ z^2\frac{v_{n-2} + \lambda w_{n-2}}{1+\lambda} + \ldots + z^n\frac{v_0 + \lambda w_0}{1+\lambda} = 0.\end{aligned}\right. \tag{11}$$

Les lettres u, v, w désignent ici des polygones homogènes en x et y d'un degré marqué par leur indice; λ est un paramètre variable.

D'après le théorème de Liouville (n° 1), la somme des x et la somme des y des points d'intersection d'une quelconque des courbes du faisceau (11) avec la courbe fixe (10) dépendent exclusivement des coefficients des termes de l'équation (11) compris dans v_n et $\frac{v_{n-1}+\lambda w_{n-1}}{1+\lambda}$; de plus, les coefficients de ce dernier groupe de termes y figurent linéairement. Les coordonnées ξ et η du centre de moyenne distance des points communs à la courbe (10) et à l'une quelconque des courbes (11) ont par suite des expressions de la forme

$$(12) \qquad \xi = \frac{a\lambda + b}{\lambda + 1}, \qquad \eta = \frac{c\lambda + d}{\lambda + 1},$$

a, b, c, d désignant des constantes.

On en conclut que le lieu de ce centre de moyenne distance est une droite. De là le théorème suivant, que M. Humbert a établi antérieurement par des considérations différentes [1] :

Le lieu du centre de moyenne distance des points communs à une courbe plane algébrique fixe et à l'une quelconque des courbes d'un faisceau ponctuel, ayant toutes les mêmes directions asymptotiques, est une ligne droite [2].

Il est intéressant de remarquer que, dans le cas particulier ($n = 1$) où le faisceau est formé de droites pa-

(1) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. III, p. 36?.

(2) Dans certains cas spéciaux, ce centre de moyenne distance sera fixe; c'est ce qui aura lieu, par exemple, dans le cas d'un faisceau de courbes ayant toutes les mêmes asymptotes.

rallèles à une direction fixe, on retrouve un théorème bien connu dû à Newton (diamètre de Newton).

De la forme des relations (12) on conclut encore immédiatement qu'*il y a correspondance anharmonique entre les courbes du faisceau et les centres de moyenne distance de leurs points d'intersection avec la courbe fixe.*

On peut généraliser le théorème précédent à l'aide de l'homographie. On obtient alors une propriété, facile à énoncer, du centre harmonique, par rapport à une même droite, des points communs à une courbe fixe et aux courbes d'un faisceau ponctuel coupant toutes cette droite aux mêmes points.

18. Soit, par rapport à un système d'axes de coordonnées rectangulaires,

$$f(x, y) = 0 \tag{13}$$

l'équation d'une courbe algébrique quelconque C. Les points d'incidence des normales menées à cette courbe par un point dont les coordonnées sont $x = \alpha\lambda$, $y = \beta\lambda$, se trouvent à la rencontre de celle-ci avec la courbe

$$(x - \alpha\lambda) f'_y - (y - \beta\lambda) f'_x = 0. \tag{14}$$

Or, lorsque λ varie, c'est-à-dire lorsque le point $(\alpha\lambda, \beta\lambda)$ décrit une droite [1], l'équation (14) définit un faisceau de courbes ayant toutes les mêmes directions asymptotiques. Donc, en vertu d'un théorème démontré précédemment (n° 17), *le centre de moyenne distance des points d'incidence des normales, menées d'un point mobile à une courbe algébrique plane quelconque,*

---

[1] Il est clair que l'on ne restreint pas la généralité de la démonstration, en supposant que la droite passe par l'origine.

décrit une droite, lorsque le point mobile décrit lui-même une droite [1].

Il y a correspondance anharmonique entre le point mobile et le centre de moyenne distance qui en résulte.

On peut donner à ce théorème une forme plus concise et plus élégante, en l'énonçant de la manière suivante :

Étant donnée, dans un plan, une courbe algébrique, un point variable et le centre de moyenne distance des pieds des normales, menées de ce point à la courbe, décrivent deux figures homographiques.

19. On a vu précédemment (n° 14) qu'il existe dans le plan de la courbe C un point possédant la propriété d'être le centre de moyenne distance des pieds des normales qui en sont issues. Ce point, centre commun des coniques de niveau, est donc un des trois points en chacun desquels se trouvent réunis deux points homologues des deux figures homographiques. Les deux autres sont à l'infini : on voit, en effet, immédiatement qu'à tout point à l'infini de l'une des figures correspond un point à l'infini dans l'autre. La droite de l'infini, considérée comme appartenant à l'une quelconque des deux figures, coïncide donc avec son homologue. Il existe deux autres droites jouissant de la même propriété : ce sont évidemment les axes communs des coniques de niveau. D'une construction donnée plus haut (n° 10) il résulte, en effet, que le centre de moyenne distance des pieds des normales menées à la courbe C d'un point quelconque d'un de ces axes est situé sur cet axe. La relation qui unit les deux figures homographiques que nous venons de considérer est, comme on le voit, du genre de

---

[1] Humbert, *loc. cit.*, p. 362.

celles auxquelles Euler a donné le nom d'*affinité*. On peut ajouter que cette affinité se changera en *homothétie*, lorsque la courbe C, sans être isotropique ([1]), sera de telle nature que ses coniques de niveau soient des cercles.

20. Le théorème d'Algèbre, que nous avons établi au commencement de cette Note, s'étend sans difficulté et, au moyen d'un raisonnement tout semblable à celui qui nous a déjà servi, au cas d'un nombre quelconque d'équations algébriques, contenant un nombre au moins égal de variables. On obtient ainsi le théorème suivant, sous une forme un peu plus générale que celle qui lui avait été donnée par Liouville :

Théorème fondamental généralisé. — *Dans l'équation de degré $mn\ldots r$, résultant de l'élimination de $k-1$ variables entre k équations algébriques, dont les degrés sont respectivement m, n, ..., r, les coefficients des termes de degré $mn\ldots r-i$ dépendent exclusivement des coefficients des termes des k équations données, qui sont d'un degré au moins égal à $m-i$ pour la première, à $n-i$ pour la seconde, ..., à $r-i$ pour la $k^{\text{ième}}$ de ces équations.*

Les coefficients des termes de degrés respectivement égaux à $m-i$, $n-i$, ..., $r-i$, dans les équations données, ne peuvent figurer que linéairement, et multipliés par des quantités indépendantes des autres coefficients, dans la composition des termes de degré $mn\ldots r-i$ de l'équation résultante.

21. Il est facile, en s'appuyant sur ce théorème,

([1]) Dans ce cas spécial, l'une des deux figures se réduit à un point (n° 9).

d'étendre aux surfaces quelques-unes des considérations que nous avons développées plus haut pour les courbes planes. C'est ainsi, par exemple, que l'on en conclut très aisément ce théorème de Chasles :

Le centre de moyenne distance des points de contact des plans tangents menés à une surface algébrique parallèlement à un même plan est un point fixe, quel que soit ce plan.

Soit

$$f(x, y, z) = 0 \tag{15}$$

l'équation de la surface, supposée du $m^{\text{ième}}$ degré. Les points de contact des plans tangents menés à cette surface parallèlement au plan

$$ax + by + cz = 0 \tag{16}$$

ont pour coordonnées les systèmes de valeurs de x, y, z qui vérifient à la fois l'équation (15) et deux des équations

$$\frac{f'_x}{a} = \frac{f'_y}{b} = \frac{f'_z}{c}, \tag{17}$$

qui sont de degré $m - 1$.

Imaginons que l'on élimine deux des variables, y et z, par exemple, entre les équations (15) et (17). Dans l'équation de degré $m(m-1)^2$ en x, que l'on obtiendra ainsi, les coefficients des termes de degrés $m(m-1)^2$ et $m(m-1)^2 - 1$ ne dépendront que des coefficients des termes de degrés m et $m - 1$ de l'équation (15) [n° 20], ceux-ci, comme il est aisé de le voir, fournissant exclusivement les termes de degrés $m - 1$ et $m - 2$ des équations (17). Par suite, le centre de moyenne distance des points de contact des plans tangents, menés à la surface (15) parallèlement au plan (16), ne change pas, lorsque l'on remplace cette surface par toute autre admettant la même développable asymptote, et en particulier par cette développable elle-même. Mais les points de contact des plans tangents deviennent alors les points considérés comme doubles, de l'arête de rebroussement, en lesquels la tangente est parallèle au plan (16). Or le centre de moyenne distance de ces points est indépendant de l'orientation du plan, en vertu du théorème suivant, que nous allons démontrer, sur les courbes gauches algébriques.

22. *Le centre de moyenne distance des points d'une courbe gauche algébrique, en chacun desquels la tangente est parallèle à un certain plan, est un point fixe, indépendant de l'orientation du plan.*

Ce théorème se déduit aisément du théorème analogue pour les courbes planes (n° 4). Soient C la courbe gauche, (P) et (P′) deux plans quelconques, non parallèles. Projetons la courbe C sur un plan (Q) arbitraire, parallèlement à la droite d'intersection des plans (P) et (P′). Soient Γ la projection obtenue de la courbe C, D et D′ les traces respectives des plans (P) et (P′) sur (Q). Les points m de la courbe C, où la tangente est parallèle au plan (P), se projettent en des points μ de Γ où la tangente est parallèle à D. De même, les points m' de C, où la tangente est parallèle au plan (P′), se projettent en des points μ' de Γ où la tangente est parallèle à D′. Le centre de moyenne distance des points μ étant le même que celui des points μ' (n° 4), on en conclut que les centres de moyenne distance respectifs des points m et des points m' ou bien coïncident, ou bien sont sur une même parallèle à la droite d'intersection des plans (P) et (P′). Or il est facile de voir que la seconde de ces conclusions ne peut être admise. Il en résulterait, en effet, que, lorsque le plan (P) varierait, en restant parallèle à une certaine direction, le centre de moyenne distance correspondant décrirait une droite parallèle à cette direction, et, par suite, qu'à l'ensemble des directions parallèles à un même plan correspondrait, comme lieu du centre de moyenne distance, un plan parallèle à ce dernier plan. Le lieu du centre de moyenne distance correspondant à toutes les orientations possibles du plan (P) se composerait donc d'une infinité de plans, ce qui est impossible, vu que, l'orientation du plan (P) ne dépendant que de deux paramètres, le centre de moyenne distance en question, à moins d'être fixe, devrait engendrer une surface ou, tout au moins, une ligne algébrique. Donc ce centre de moyenne distance est fixe.

23. Soient

$$(18)\quad \begin{cases} u_m + tu_{m-1} + t^2 u_{m-2} + \ldots + t^m u_0 = 0, \\ v_n + tv_{n-1} + t^2 v_{n-2} + \ldots + t^n v_0 = 0, \\ w_r + tw_{r-1} + t^2 w_{r-2} + \ldots + t^r w_0 = 0 \end{cases}$$

les équations, rendues homogènes à l'aide d'une quatrième variable t, de trois surfaces algébriques, les lettres u, v, w désignant des polynômes entiers homogènes, en x, y, z d'un degré marqué par leur indice.

Supposons que l'on fasse varier, dans les équations (18), les termes qui contiennent t à un degré supérieur au premier, les autres ne changeant pas. Chacune des surfaces définies par les équations (18), par rapport à un système d'axes de coordonnées quelconque, varie alors en conservant la même développable asymptote. D'ailleurs, les sommes des x, des y et des z des points communs aux trois surfaces ne dépendant que de u_m, u_{m-1}, v_n, v_{n-1}, w_r, w_{r-1} (n° 20), on voit que le centre de moyenne distance des points d'intersection des trois surfaces restera fixe. Ainsi se trouve établi le théorème suivant, dû à Liouville [1], et tout semblable à celui que l'illustre géomètre a donné pour les courbes planes (n° 5) :

Le centre de moyenne distance des points communs à trois surfaces algébriques reste fixe, lorsque chacune de ces surfaces varie, en conservant la même développable asymptote.

24. Soit

$$f(x, y, z) = 0 \tag{19}$$

l'équation d'une surface algébrique de degré quelconque m, rapportée à un système d'axes de coordonnées rectangulaires.

Les pieds des normales menées à cette surface par un point de coordonnées $x = a$, $y = b$, $z = c$, sont à l'intersection de celle-ci avec la courbe de degré m^2, définie par les équations

$$\frac{x-a}{f'_x} = \frac{y-b}{f'_y} = \frac{z-c}{f'_z}. \tag{20}$$

Supposons que la surface (9) ne possède aucune nappe parabolique [2], et déformons-la, en lui laissant la même développable asymptote. Les termes de degrés m et $m-1$ de l'équation (19) ne subissent, dans cette hypothèse, aucun changement, et il en est manifestement de même des termes de degrés m et $m-1$ des équations

---

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1^{re} série, t. VI, p. 391.

[2] Nous supposerons de plus que la surface ne contienne pas l'*ombilicale*, c'est-à-dire la conique à l'infini commune à toutes les sphères. Il y aurait une démonstration spéciale à faire, pour étendre le théorème aux surfaces présentant cette particularité.

(20), mises sous forme entière. La courbe (20) conserve par suite les mêmes asymptotes, et l'on en conclut, en vertu du théorème démontré plus haut (n° 23), que *le centre de moyenne distance des points d'incidence des normales menées d'un même point à une surface algébrique, ne possédant pas de nappe parabolique, reste fixe, lorsque la surface se déforme, tout en conservant la même développable asymptote.*

Ce théorème ne s'applique pas à une surface ayant une ou plusieurs nappes paraboliques, c'est-à-dire tangente, en un ou plusieurs points, au plan de l'infini, parce qu'alors la courbe (20) passe par ces points et que le centre de moyenne distance considéré est rejeté à l'infini.

25. Soient, en coordonnées homogènes,

$$u_m + tu_{m-1} + t^2 u_{m-2} + \ldots + t^m u_0 = 0 \tag{21}$$

l'équation d'une surface algébrique fixe,

$$\left\{\begin{array}{l} (1+\lambda) v_n + t(v_{n-1} + \lambda w_{n-1}) \\ \quad + t^2(v_{n-2} + \lambda w_{n-2}) + \ldots + t^n(v_0 + \lambda w_0) = 0, \\ (1+\lambda) p_r + t(p_{r-1} + \lambda q_{r-1}) \\ \quad + t^2(p_{r-2} + \lambda q_{r-2}) + \ldots + t^r(p_0 + \lambda q_0) = 0 \end{array}\right. \tag{22}$$

les équations de deux faisceaux de surfaces, dépendant d'un même paramètre variable λ, et telles que les surfaces de chacun des faisceaux aient les mêmes directions asymptotiques. Dans les équations précédentes, les lettres u, v, w, p et q désignent des polynômes entiers en x, y, z, d'un degré marqué par leur indice; t est une quatrième coordonnée introduite pour l'homogénéité.

Pour chaque valeur de λ, les équations (22) définissent une courbe, intersection complète de deux surfaces qui se correspondent anharmoniquement; et les diverses courbes qu'on obtient ainsi ont les mêmes directions asymptotiques.

D'après le théorème fondamental de Liouville (n° 20), la somme des x, la somme des y et la somme des z des points de rencontre d'une quelconque des courbes (22) avec la surface (21) ne dépendent que des coefficients des termes des équations (22) compris dans v_n, p_r, $\frac{v_{n-1}+\lambda w_{n-1}}{1+\lambda}$ et $\frac{p_{r-1}+q_{r-1}}{1+\lambda}$; on sait de plus que les coefficients de ces deux derniers groupes de termes n'entrent que linéairement dans l'évaluation de ces sommes. Par suite, les coordonnées ξ, η, ζ du centre de moyenne distance des points communs à la surface (21) et à l'une quelconque des courbes (22) ont des expressions de la forme

$$(23) \qquad \xi = \frac{a\lambda + b}{\lambda + 1}, \qquad \eta = \frac{c\lambda + d}{\lambda + 1}, \qquad \zeta = \frac{e\lambda + f}{\lambda + 1},$$

a, b, c, d, e, f désignant des constantes. On en conclut que le lieu de ce centre de moyenne distance est une droite. On peut donc énoncer le théorème suivant qui est, pour l'espace, l'analogue d'un théorème démontré plus haut (n° 17) pour le plan :

Etant donnés une surface algébrique fixe et deux faisceaux de surfaces algébriques, ayant respectivement les mêmes directions asymptotiques, le lieu du centre de moyenne distance des points communs à la surface fixe et à la courbe d'intersection de deux surfaces, se correspondant anharmoniquement dans les deux faisceaux, est une ligne droite (¹).

(¹) On voit immédiatement que, si les surfaces de chacun des deux faisceaux avaient la même développable asymptote, le centre de moyenne distance, dont il est ici question, serait un point fixe (n° 23).

De la forme des relations (23) on en conclut en outre qu'*il y a correspondance anharmonique entre les courbes et les centres de moyenne distance de leurs points d'intersection avec la surface fixe.*

26. Soit

$$f(x, y, z) = 0 \tag{24}$$

l'équation d'une surface algébrique quelconque, rapportée à un système d'axes de coordonnées rectangulaires. Les normales menées à cette surface par un point dont les coordonnées sont $x = \alpha\rho$, $y = \beta\rho$, $z = \gamma\rho$, ont leurs points d'incidence respectifs à la rencontre de celle-ci avec la courbe

$$\frac{x - \alpha\lambda}{f'_x} = \frac{y - \beta\lambda}{f'_y} = \frac{z - \gamma\lambda}{f'_z}, \tag{25}$$

qui peut être considérée comme l'intersection complète des deux surfaces

$$(x - \alpha\lambda)f'_y - (y - \beta\lambda)f'_x = 0,$$
$$(x - \alpha\lambda)f'_z - (z - \gamma\lambda)f'_x = 0.$$

Or, lorsque λ varie, c'est-à-dire lorsque le point $(\alpha\lambda, \beta\lambda, \gamma\lambda)$ décrit une droite, les deux dernières équations définissent deux faisceaux de surfaces, satisfaisant aux conditions du dernier théorème démontré (nº 25). Donc, en vertu de ce théorème, on peut dire que *le centre de moyenne distance des points d'incidence des normales, menées d'un point mobile à une surface algébrique quelconque, décrit une droite, lorsque le point mobile décrit lui-même une droite.*

Il y a correspondance anharmonique entre le point mobile et le centre de moyenne distance qui s'en déduit.

Plus simplement :

Étant donnée une surface algébrique, un point variable et le centre de moyenne distance des pieds des normales menées de ce point à la courbe décrivent deux figures homographiques.

L'homographie est d'ailleurs ici, comme dans le cas analogue relatif au plan (n° 19), de l'espèce particulière désignée sous le nom d'*affinité*.

27. Je ne pousserai pas plus loin ces développements : le but que j'avais en vue, dans la présente étude, était moins de faire connaître, quelque intéressants qu'ils soient, des résultats dont plusieurs ne m'appartiennent pas, que de montrer comment, dans un ordre de questions qui semble exiger l'intervention du calcul, il est possible, sans rien sacrifier de la rigueur, de remplacer les développements analytiques par de simples raisonnements synthétiques. Des considérations de même nature m'ont servi récemment dans une Note *Sur quelques propriétés involutives des courbes algébriques* (1).

---

(1) *Rendiconti del circolo matematico di Palermo* (t. III, p. 42 à 48). Le principal théorème de cette Note a été demontré et généralisé dernièrement (p. 125 de ce Volume), par M. Émile Borel, élève à l'École Normale supérieure, qui a employé avec succès des procédés de démonstration analogues à ceux dont j'avais déjà fait usage à cette occasion, et qui font l'objet principal du présent travail.