

RAVIER

**Propriétés focales des coniques et
des quadriques**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 9
(1890), p. 233-239

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9_233_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PROPRIÉTÉS FOCALES DES CONIQUES ET DES QUADRIQUES;

PAR M. RAVIER,
Lève du lycée Condorcet

Dans tout ce qui suit, nous employons uniquement les coordonnées tangentielles . une conique est alors

une courbe de seconde classe; une quadrique, une surface de seconde classe. Nous adoptons pour définition des foyers celle de Plücker.

1. Un grand nombre de propriétés focales des coniques se déduisent du théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Trois coniques* $C = 0$, $C' = 0$, $C'' = 0$ *déterminent un réseau de coniques ayant pour équation*

$$\lambda C + \lambda' C' + \lambda'' C'' = 0.$$

Si, aux quatre tangentes communes à deux coniques $S' = 0$, $S'' = 0$ *de ce réseau, on peut inscrire une conique bitangente à une troisième conique* $S = 0$ *du réseau, aux quatre tangentes communes à* $C' = 0$ *et* $C'' = 0$ *on peut inscrire une conique bitangente à* $C = 0$.

Soient

$$\begin{aligned} S' &= \mu' C + \mu'_1 C' + \mu'_2 C'' = 0, \\ S'' &= \mu'' C + \mu''_1 C' + \mu''_2 C'' = 0 \end{aligned}$$

les deux premières coniques du réseau, et

$$S = \mu C + \mu_1 C' + \mu_2 C'' = 0$$

la dernière.

Par hypothèse, une des coniques de la forme

$$\lambda' S' + \lambda'' S'' = 0$$

est bitangente à $S = 0$; on a donc

$$\lambda S + \lambda' S' + \lambda'' S'' = p^2,$$

$p = 0$ étant l'équation d'un point. Remplaçant λS , $\lambda' S'$, $\lambda'' S''$ par leurs valeurs en fonction de C , C' , C'' , on trouve

$$\lambda C + \lambda' C' + \lambda'' C'' = p^2.$$

$\Lambda, \Lambda', \Lambda''$ étant des constantes, ce qui démontre le théorème et en outre le suivant :

THÉORÈME II. — *Le point de rencontre des tangentes communes est le même dans les deux systèmes de coniques bitangentes que désigne le théorème précédent.*

Ce point est celui qui a pour équation $p = 0$.

2. Voici quelques applications.

THÉORÈME III. — *Quand des coniques homofocales à des coniques données sont bitangentes, le quadrilatère des tangentes communes à ces coniques est circonscriptible à un cercle.*

Nous désignons par \boxed{IJ} la courbe de seconde classe constituée par les points cycliques.

Pour démontrer le théorème, on suppose, dans la proposition précédente, que $C' = 0, C'' = 0$ représentent les coniques données, que $C'' = 0$ représente \boxed{IJ} , que $S = 0, S' = 0$ représentent les homofocales considérées de ces coniques, et que \boxed{IJ} représente $S'' = 0$.

La conique inscrite dans le quadrilatère des tangentes communes à $S' = 0$ et à $S'' = 0$ est la conique $S' = 0$ elle-même; elle est bien bitangente à C . On reconnaît également sans difficulté que les autres conditions de l'énoncé sont remplies.

Le centre du cercle inscrit au quadrilatère, point qui est à la rencontre des tangentes communes à ce cercle et à $C'' = 0$ ou \boxed{IJ} , est, par suite du théorème II, le point de rencontre des tangentes communes aux homofocales des coniques données qui sont bitangentes.

Dans le cas particulier où $C' = 0, C'' = 0$ sont des

systèmes de deux points, les foyers de $S = 0$ et de $S' = 0$, le théorème subsiste, et s'énonce ainsi :

THÉORÈME IV. — *Deux coniques étant bitangentes, les foyers de l'une, joints aux foyers de l'autre, déterminent quatre droites tangentes à un cercle ayant pour centre le point de rencontre de leurs tangentes communes.*

Si l'on suppose que $S' = 0$ se réduit à un système de deux points situés sur $S = 0$, on a ce nouvel énoncé :

THÉORÈME V. — *Deux points d'une conique joints à ses foyers déterminent quatre droites tangentes à un cercle ayant pour centre le point de rencontre des tangentes en ces deux points.*

On déduit immédiatement de là que :

THÉORÈME VI. — *La tangente fait des angles égaux avec les rayons vecteurs.*

En effet, on sait (Th. V) qu'un point de la tangente est le centre d'un cercle tangent aux deux rayons vecteurs. D'ailleurs, on sait que les foyers réels sont dans la région intérieure de la conique, tandis que la tangente est dans la région extérieure. On en déduit, connaissant la forme de ces courbes, les énoncés du théorème pour le cas de l'ellipse, de l'hyperbole, de la parabole.

Corollaire I. — De ce que la tangente fait des angles égaux avec les rayons vecteurs, on déduit facilement que, dans le cas de l'ellipse, la différentielle de leur somme ; dans le cas de l'hyperbole, celle de leur différence, sont des quantités nulles. Par suite, la somme (dans une ellipse) ou la différence (dans une hyperbole) des rayons vecteurs est constante.

Corollaire II. — Considérons une ellipse, et menons les tangentes en deux points M et M' situés sur une parallèle à l'axe des foyers réels F et F'; soit O le point de rencontre des tangentes en M et M', et FD une perpendiculaire à OF. D'après le théorème V, FO et FD sont les bissectrices de l'angle MFM' et les points A et D où ces bissectrices rencontrent MM' sont conjugués harmoniques par rapport à M et à M'. Le point D appartient donc à la polaire de A; mais il est sur MM', polaire de O, il est donc le pôle de OAF et appartient à la polaire de F, c'est-à-dire à la directrice. D'ailleurs, d'après les propriétés de la bissectrice,

$$\frac{FM}{MD} = \frac{FM'}{M'D} = \frac{\frac{FM + FM'}{2}}{\frac{MD + M'D}{2}}$$

Le numérateur du dernier rapport est constant, d'après le corollaire I, son dénominateur aussi, puisqu'il représente la distance du petit axe à la directrice; le rapport $\frac{FM}{MD}$ est donc constant.

La même démonstration est applicable à l'hyperbole et à la parabole.

3. THÉORÈME VII. — *Quatre quadriques $C = 0$, $C' = 0$, $C'' = 0$, $C''' = 0$ déterminent un réseau de quadriques ayant pour équation*

$$\lambda C + \lambda' C' + \lambda'' C'' + \lambda''' C''' = 0.$$

Si, aux huit plans tangents communs à trois quadriques $S' = 0$, $S'' = 0$, $S''' = 0$ de ce réseau, on peut inscrire une quadrique inscrite à une quatrième quadrique $S = 0$ du réseau, aux huit plans tangents com-

muns à $C' = 0$, $C'' = 0$ et $C''' = 0$, on peut inscrire une quadrique inscrite à $C = 0$.

Même démonstration que pour le théorème I, et l'on en conclut le théorème suivant :

THÉORÈME VIII. — *Si deux coniques A, A' sont sur une même quadrique Q, le sommet du cône circonscrit à Q suivant A est le centre d'une sphère tangente aux huit plans tangents communs à A, à A' et à une quadrique Q' homofocale de Q,*

4. Voici quelques applications.

Remplaçons, dans l'énoncé du théorème VII,

$C = 0$ par le cercle de l'infini,

$C' = 0$ par Q,

$C'' = 0$ par A,

$C''' = 0$ par A',

S = 0 par Q',

S' = 0 par Q,

S'' = 0 par A,

S''' = 0 par A'.

et supposons que les coniques A et A' se rapprochent jusqu'à se toucher. Deux des huit plans tangents communs viendront se confondre suivant un plan passant par la tangente D commune à A et à A'; deux autres des plans tangents communs viendront également se confondre suivant un plan passant par D; de plus, le sommet du cône circonscrit à Q suivant A viendra dans le plan tangent à A passant par D. Donc :

THÉORÈME IX. — *Les plans menés par une tangente à une quadrique tangentiellement à une quadrique homofocale font des angles égaux avec le plan tangent mené par la même droite à la première quadrique.*

Il est facile d'en déduire que :

THÉORÈME X. — *Un cône circonscrit à une quadrique admet pour plan principal le plan tangent à toute homofocale à cette quadrique qui passe par son sommet.*

D'où l'on conclut que :

THÉORÈME XI. — *Les plans tangents à trois quadriques homofocales qui passent par un point forment un trièdre trirectangle et sont les plans principaux communs de tous les cônes ayant pour sommet ce point et circonscrits à une quadrique homofocale aux proposées.*

Les exemples précédents suffisent pour montrer l'importance et la fécondité des théorèmes I et VII.