

BARISIEN

**Concours pour les bourses de licence
(Toulouse 1888)**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 9
(1890), p. 200-203

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9_200_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**CONCOURS POUR LES BOURSES DE LICENCE
(TOULOUSE 1888).**

SOLUTION PAR M. LE CAPITAINE BARISIEN.

On donne une ellipse rapportée à ses axes et sur cette ellipse un point $M(x', y')$: former l'équation générale des coniques osculatrices à l'ellipse au point M .

Exprimer que cette équation représente une parabole ; démontrer ensuite que, par un point $P(\alpha, \beta)$ du plan, il passe quatre de ces paraboles, que les quatre points (x', y') correspondants sont situés sur deux droites parallèles et que, parmi eux, deux au plus sont réels.

Former l'équation d'une parabole passant par les quatre points (x', y') qui correspondent à un point (α, β) , et trouver le lieu décrit par ce dernier point lorsque la parabole en question passe par un point fixe du plan.

On sait que, si $U = 0$ représente la droite qui touche en un point M une conique $S = 0$,

$$S - \lambda U^2 = 0$$

est l'équation générale des coniques qui ont avec S , au point M , un contact du troisième ordre.

Dans le cas présent, cette équation est

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 - \lambda \left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1 \right)^2 = 0,$$

avec la condition

$$(2) \quad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

qui exprime que le point $M(x', y')$ appartient à l'ellipse donnée

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

En écrivant que l'équation (1) représente une parabole et tenant compte de (2), on trouve que le paramètre λ doit être égal à l'unité; en sorte que la parabole osculatrice à l'ellipse donnée au point M a pour équation

$$(3) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 - \left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1 \right)^2 = 0$$

ou, en réduisant et ayant égard à (2),

$$(4) \quad (xy' - yx')^2 + 2(b^2xx' + a^2yy' - a^2b^2) = 0.$$

Pour construire cette parabole, cherchons les coordonnées des points d'intersection de la parabole, avec la droite

$$b^2xx' + a^2yy' = 0,$$

parallèle à la tangente en M et menée par le centre O de l'ellipse donnée. On trouve, pour ces coordonnées,

$$x = \frac{ay'\sqrt{2}}{b}, \quad y = \frac{bx'\sqrt{2}}{a};$$

mais les coordonnées des points d'intersection de l'ellipse donnée avec cette même parallèle à la tangente sont

$$x = \frac{ay'}{b}, \quad y = \frac{bx'}{a}.$$

Si donc on mène le diamètre OI conjugué à OM , et si

on le prolonge jusqu'au point J tel que

$$OJ = OI\sqrt{2},$$

le point J appartiendra à la parabole osculatrice.

Cette construction indique que la parabole osculatrice est extérieure à l'ellipse.

Si la parabole osculatrice passe par un point $P(x, \beta)$ du plan, on a

$$(5) \quad (\alpha y' - \beta x')^2 + 2(b' \alpha x' + a^2 \beta y' - a^2 b^2) = 0,$$

$$(6) \quad b^2 x'^2 + a^2 y'^2 - a^2 b^2 = 0.$$

La résolution de ces deux équations doit donner quatre valeurs de x' et y' .

Ces équations, lorsqu'on y considère x' et y' comme des coordonnées courantes, représentent, l'une, l'ellipse donnée et l'autre une parabole tangente à la polaire de P à son point d'intersection avec PO.

Cette parabole et l'ellipse ayant même diamètre ont un couple de cordes communes, formé par deux droites parallèles à la polaire de P.

Si le point P est à l'extérieur de l'ellipse, il est visible que la parabole (8) ne coupe l'ellipse qu'en deux points.

Si le point P est à l'intérieur de l'ellipse, la parabole (5) est tout entière extérieure à l'ellipse; car, si l'on coupe ces deux courbes par la droite

$$b^2 \alpha x' + a^2 \beta y' = 0.$$

on trouve, en appelant, comme précédemment, I son point d'intersection avec l'ellipse et J avec la parabole,

$$OJ = OI\sqrt{2}.$$

Donc, quand le point P est à l'intérieur de l'ellipse,

les quatre points correspondants (x', y') sont imaginaires.

L'équation générale des coniques passant par les points d'intersection de (5) et (6) est

$$(\alpha y - \beta x)^2 + 2(b^2 \alpha x + a^2 \beta y - a^2 b^2) + \lambda(b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2) = 0.$$

En exprimant que cette conique est une parabole, on trouve

$$\lambda = - \left(\frac{a^2 \beta^2 + b^2 \alpha^2}{a^2 b^2} \right)$$

et, pour l'équation de cette parabole,

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a^2 \beta x + b^2 \alpha y)^2 - 2a^2 b^2 (b^2 \alpha x + a^2 \beta y) \\ - a^2 b^2 (a^2 \beta^2 + b^2 \alpha^2 - 2a^2 b^2) = 0. \end{array} \right.$$

Si cette parabole passe par un point fixe (p, q) du plan, le point (α, β) décrit le lieu dont l'équation est

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a^2 \beta p + b^2 \alpha q)^2 - a^2 b^2 (a^2 \beta^2 + b^2 \alpha^2 - 2a^2 b^2) \\ - 2a^2 b^2 (b^2 \alpha p + a^2 \beta q) = 0 \end{array} \right.$$

ou, en développant,

$$a^4 \beta^2 (p^2 - b^2) + 2a^2 b^2 p q \alpha \beta + b^4 \alpha^2 (q^2 - a^2) - 2a^2 b^2 (b^2 p \alpha + a^2 q \beta - a^2 b^2) = 0.$$

C'est une conique dont le déterminant est

$$\Delta = -a^6 b^6 \left(\frac{p^2}{b^2} + \frac{q^2}{a^2} - 1 \right);$$

la conique (8) est donc une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que le point (p, q) est intérieur ou extérieur à l'ellipse

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

ou situé sur cette courbe.
