NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

C.-R.-J. KALLENBERG VAN DEN BOSCH

Solution de la question 1591

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 159-160

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__159_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 1391

(voir 2e série, t. IX, p. 20);

PAR M. C.-R.-J. KALLENBERG VAN DEN BOSCH,

Ingénieur civil à Breda (Hollande).

Soient A, B, C *les pieds des trois normales à une parabole menées par un point* P *de son plan. Par le sommet* O *de la courbe, on fait passer trois cercles respectivement tangents à la parabole en* A, B, C. *Ces cercles coupent la courbe en trois autres points* A′, B′, C′. *Démontrer que les normales en* A′, B′, C′ *à la parabole sont concourantes.* (LEMAIRE.)

Les cordes d'intersection d'une parabole et d'un cercle étant, en général, deux à deux également inclinées sur l'axe de la parabole, on reconnaît aisément que, dans le cas où le cercle est tangent à la parabole, les cordes qui se rencontrent au point de contact, telles que AO et AA′, font des angles égaux avec l'axe, ainsi que la troisième corde OA′ et la tangente commune en A.

Dès lors, si l'on prend l'axe de la parabole et la tangente au sommet pour axes des coordonnées, et que l'on nomme y_1, y_2, y_3 les ordonnées des points A, B, C et

y'_1, y'_2, y'_3 celles des points A′, B′, C′, on trouve, immédiatement,

$$y'_1 = -2y_1, \qquad y'_2 = -2y_2 \qquad \text{et} \qquad y'_3 = -2y_3.$$

Les ordonnées y_1, y_2, y_3 sont données par les racines de l'équation

$$y^3 - 2p(\xi - p)y - 2p^2\eta = 0,$$

si ξ et η représentent les coordonnées du point P.

On tire de là

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &= 0, \\ y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 &= -2p(\xi - p), \\ y_1y_2y_3 &= 2p^2\eta \end{aligned}\right.$$

et, en multipliant ces équations respectivement par -2, 4 et -8, on obtient, en vertu des relations entre y_1, y_2, y_3 et y'_1, y'_2, y'_3,

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} y'_1 + y'_2 + y'_3 &= 0, \\ y'_1y'_2 + y'_1y'_3 + y'_2y'_3 &= -8p(\xi - p) \\ &= -2p[(4\xi - 3p) - p], \\ y'_1y'_2y'_3 &= -16p^2\eta = 2p^2(-8\eta). \end{aligned}\right.$$

En comparant ces valeurs avec celles de (1), on voit que les normales aux points A′, B′, C′ concourent au point P′, dont les coordonnées sont

$$\xi' = 4\xi - 3p \qquad \text{et} \qquad \eta' = -8\eta.$$

Le cercle mené par les points A, B, C, qui passe en même temps par le sommet O, a pour centre le point

$$\alpha = \frac{\xi + p}{2}, \qquad \beta = \frac{\eta}{4};$$

le centre du cercle, qui passe par A′, B′, C′ et par le sommet, a donc pour coordonnées

$$\alpha' = \frac{\xi' + p}{2} = 2\xi - p \qquad \text{et} \qquad \beta' = \frac{\eta'}{4} = -2\eta.$$