E. CESARO

Remarques sur l'osculation

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 143-157

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__143_1>

REMARQUES SUR L'OSCULATION;

Par M. E. CESARO.

Soit

$$(1) \qquad F(\rho, s, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) = 0$$

l'équation intrinsèque d'une famille de courbes. On sait que ρ, ρ_1, ρ_2, ... étant les rayons de courbure successifs en un point d'une ligne, on a

$$(2) \qquad \rho_1 = \rho \frac{d\rho}{ds}, \qquad \rho_2 = \rho \frac{d\rho_1}{ds}, \qquad \rho_3 = \rho \frac{d\rho_2}{ds}, \qquad \ldots.$$

Si l'on dérive n fois de suite l'équation (1), en tenant compte des égalités (2), on obtient n relations entre les quantités

$$\rho, \quad \rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots, \quad \rho_n, \quad s, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{n-1}.$$

L'élimination de s, a_1, a_2, $\ldots$, a_{n-1}, entre (1) et les n relations obtenues donne

$$\Phi(\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots \rho_n) = 0.$$

Cette équation caractérise la famille considérée. Elle n'est, en effet, qu'une équation différentielle du $n^{\text{ième}}$ ordre, dont l'intégrale générale renferme n constantes arbitraires; mais $n-1$ de ces constantes constituent le système de paramètres qui figure dans l'équation (1), et la $n^{\text{ième}}$ est déterminée par le choix de l'origine des arcs.

Voici quelques exemples. L'équation

$$a^2\rho^2 + b^2 s^2 = a^2 b^2$$

donne, par dérivations successives,

$$a^2\rho_1 + b^2 s = 0, \qquad a^2\rho_2 + b^2\rho = 0, \qquad a^2\rho_3 + b^2\rho_1 = 0.$$

L'équation caractéristique des lignes cycloïdales est donc

$$\rho\rho_3 - \rho_1\rho_2 = 0. \tag{3}$$

Si l'on particularise ces lignes, de manière que leur équation intrinsèque ne contienne plus qu'un seul paramètre, il est clair qu'on doit obtenir une relation où ρ_3 ne figure pas. C'est ainsi que la développante de cercle, la spirale logarithmique, la cycloïde, l'hypocycloïde à trois rebroussements sont respectivement caractérisées par les équations

$$\rho_2 = 0, \qquad \rho\rho_2 - \rho_1^2 = 0, \qquad \rho + \rho_2 = 0, \qquad 9\rho + \rho_2 = 0;$$

mais, en tant qu'elles appartiennent à la famille des lignes cycloïdales, leur équation caractéristique commune est toujours (3).

On trouve, de la même manière, les équations caractéristiques suivantes :

$$\rho^2 + 2\rho_1^2 - \rho\rho_2 = 0 \qquad \text{(chaînette d'égale résistance)},$$
$$4\rho^2 + 3\rho_1^2 - 2\rho\rho_2 = 0 \qquad \text{(chaînette parabolique)},$$
$$9\rho^2 + 4\rho_1^2 - 3\rho\rho_2 = 0 \qquad \text{(parabole)},$$
$$18\rho^2 + 5\rho_1^2 - 3\rho\rho_2 = 0 \qquad \text{(hyperbole équilatère)}.$$

Ces équations sont toutes du même type

$$(4) \qquad \lambda\rho^2 + (\mu + 1)\rho_1^2 - \rho\rho_2 = 0.$$

Cela tient à ce que les équations intrinsèques des courbes considérées peuvent être mises sous la forme commune

$$s = \int \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}\left[\left(\frac{\rho}{a}\right)^{2\mu} - 1\right]}},$$

qui représente

la *chaînette d'égale résistance*.......	pour	$\lambda = 1$,	$\mu = 1$,
la *cycloïde*........................	»	$\lambda = -1$,	$\mu = -1$,
l'*hypocycloïde à trois rebroussements*.	»	$\lambda = -9$,	$\mu = -1$,
la *chaînette*........................	»	$\lambda = 2$,	$\mu = \frac{1}{2}$,
la *parabole*........................	»	$\lambda = 3$,	$\mu = \frac{1}{3}$,
l'*hyperbole équilatère*.............	»	$\lambda = 6$,	$\mu = \frac{2}{3}$,
la *cardioïde*........................	»	$\lambda = -\frac{1}{9}$,	$\mu = -1$,
la *lemniscate* de *Bernoulli*..........	»	$\lambda = \frac{2}{9}$,	$\mu = 2$

L'interprétation géométrique de l'équation (4) est aisée. Soient C, C_1, C_2, ... les centres de courbure successifs en un point M de la courbe. Si l'on partage CM dans le rapport de λ à $1 - \lambda$, et CC_1 dans le rapport de $\lambda + \lambda\mu$

à $1-(\lambda+\lambda\mu)$, et que, par le premier point de division on tire la perpendiculaire à la droite qui le joint au second point de division, cette perpendiculaire passe par C_2. On construit ainsi le troisième centre de courbure, connaissant les deux premiers centres.

Toute ligne de Ribaucour vérifie une équation de la forme (4), les coefficients λ et μ étant liés par l'égalité $\lambda\mu=1$. Il en est de même des spirales sinusoïdes, la relation nécessaire entre les coefficients étant

$$\lambda(2\mu-1)^2=\mu.$$

Enfin, si $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{H}$ sont les premiers membres des équations caractéristiques de la parabole et de l'hyperbole équilatère, il y a encore à remarquer les courbes définies par l'équation

$$\mathfrak{H}=k\mathfrak{P} \tag{5}$$

ou, ce qui revient au même, par l'équation (4) lorsqu'on pose entre les coefficients la relation $\lambda=9\mu$. L'équation (5) représente l'hyperbole équilatère, la spirale logarithmique, la ligne de Ribaucour d'indice $-\frac{1}{2}$, l'hypocycloïde à trois rebroussements, etc., pour $k=0$, 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$, ...

L'équation intrinsèque des coniques donne immédiatement

$$\rho_1^2+9\rho^2\left[1-\left(\frac{a\rho}{b^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]\left[1-\left(\frac{b\rho}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]=0,$$

c'est-à-dire

$$9\rho^2+\rho_1^2=\frac{9(a^2+b^2)\rho^{\frac{8}{3}}}{(ab)^{\frac{4}{3}}}-\frac{9\rho^{\frac{10}{3}}}{(ab)^{\frac{2}{3}}}; \tag{6}$$

d'où l'on déduit, par une première dérivation,

$$9\rho^2+\rho\rho_2=\frac{12(a^2+b^2)\rho^{\frac{8}{3}}}{(ab)^{\frac{4}{3}}}-\frac{15\rho^{\frac{10}{3}}}{(ab)^{\frac{2}{3}}},$$

a et b étant des demi-axes. Ces équations donnent

$$(7)\qquad a^2+b^2=\frac{9\mathfrak{H}\rho^4}{\mathfrak{P}^2},\qquad ab=\frac{27\rho^5}{\mathfrak{P}^{\frac{3}{2}}},$$

et l'on comprend, maintenant, pourquoi les équations caractéristiques de la parabole et de l'hyperbole équilatère sont $\mathfrak{P}=0$ et $\mathfrak{H}=0$. On voit, en outre, que la conique considérée est une ellipse ou une hyperbole suivant que $\mathfrak{P}>0$ ou $\mathfrak{P}<0$. Du reste, les équations (7) montrent que la connaissance des trois premiers rayons de courbure suffit pour la détermination intrinsèque de la conique. On trouve

$$a=\frac{3\rho^2}{\mathfrak{P}\sqrt{2}}\sqrt{\mathfrak{H}+\sqrt{\mathfrak{H}^2-36\mathfrak{P}\rho^2}},$$

$$b=\frac{3\rho^2}{\mathfrak{P}\sqrt{2}}\sqrt{\mathfrak{H}-\sqrt{\mathfrak{H}^2-36\mathfrak{P}\rho^2}}.$$

On doit remarquer que le radical inférieur est toujours réel, à cause de l'identité

$$\mathfrak{H}^2-36\mathfrak{P}\rho^2=(5\rho_1^2-3\rho\rho_2)^2+36\rho^2\rho_1^2.$$

Si l'on dérive l'une ou l'autre des égalités (7), on obtient

$$(8)\qquad 40\rho_1^3-36\rho^2\rho_1+9\rho^2\rho_3-45\rho\rho_1\rho_2=0.$$

Telle est l'équation caractéristique des coniques. On en déduit plusieurs constructions simples du quatrième centre de courbure au moyen des trois premiers centres. Il est utile de remarquer que le premier membre de l'équation (8) peut être mis sous la forme suivante

$$\mathfrak{C}=9\rho(\rho\rho_3-\rho_1\rho_2)+4\rho_1(5\mathfrak{P}-2\mathfrak{H}).$$

Si deux courbes ont un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre, le contact de leurs développées est du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre; d'où il résulte que, pour établir un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre entre deux courbes, en un point M, il suffit de faire coïncider les $n-1$ premiers centres de courbure, C, C_1, C_2, ..., C_{n-2}, d'une courbe avec les centres correspondants de l'autre. Pour l'établissement du contact, toute courbe peut donc être remplacée, aux environs de M, par une autre courbe, possédant en commun avec la première les $n-1$ premiers centres de courbure. Cette courbe auxiliaire, rapportée à la tangente et à la normale en M, a, si l'on veut, une équation de la forme

$$(9)\qquad y=\frac{\alpha}{2}x^2-\frac{\beta}{6}x^3+\frac{\gamma}{24}x^4-\ldots,$$

le second membre étant limité aux $n-1$ premiers termes. On sait que

$$\rho=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},\qquad \rho_{n+1}=\frac{1+y'^2}{y''}\frac{d\rho_n}{dx},$$

y', y'', y''', ... étant les dérivées successives de y par rapport à x. Cela posé, pour $x=0$, $y=0$, $y'=0$, on trouve successivement, en dérivant (9),

$$(10)\qquad \alpha=\frac{1}{\rho},\qquad \beta=\frac{\rho_1}{\rho^3},\qquad \gamma=\frac{3(\rho^2+\rho_1^2)-\rho\rho_2}{\rho^5},\qquad \ldots.$$

Maintenant, si l'on veut qu'il y ait contact du $n^{\text{ième}}$ ordre entre une courbe quelconque et une autre courbe, représentée, par rapport à la tangente et à la normale communes, par une équation entre x et y, il suffit de remplacer, dans cette équation, y par l'expression (9), en négligeant les puissances de x dont le degré surpasse n. On obtient une équation en x, qui doit admettre n racines nulles.

Proposons-nous, par exemple, de construire la conique osculatrice à une courbe donnée, en un point M. L'équation d'une conique touchant la courbe M est

$$y = Ax^2 + By^2 + 2Cxy. \tag{11}$$

Pour qu'il y ait osculation, il faut que le contact soit du quatrième ordre. On peut donc limiter le second membre de (9) aux trois premiers termes, et négliger ensuite, lors de la substitution de y dans (11), les puissances de x dont le degré surpasse 4. Il vient d'abord

$$\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{6}x + \frac{\gamma}{24}x^2 = A + \frac{B\alpha^2}{4}x^2 + 2C\left(\frac{\alpha}{2}x - \frac{\beta}{6}x^2\right);$$

d'où, en identifiant,

$$A = \frac{\alpha}{2}, \qquad B = \frac{3\alpha\gamma - 4\beta^2}{18\alpha^3}, \qquad C = -\frac{\beta}{6\alpha}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans (11), après y avoir remplacé α, β, γ par les expressions (10), on trouve que l'équation de la conique osculatrice est

$$(3\rho x - \rho_1 y)^2 + \mathfrak{P}y^2 = 18\rho^3 y. \tag{12}$$

Les coordonnées du centre O de cette conique sont

$$x_0 = \frac{3\rho^2\rho_1}{\mathfrak{P}}, \qquad y_0 = \frac{9\rho^3}{\mathfrak{P}}. \tag{13}$$

Si l'on observe que $3\rho x_0 = \rho_1 y_0$, on retrouve la construction du deuxième centre de courbure, indiquée par Maclaurin. La seconde égalité (13) fournit une construction simple du troisième centre de courbure. Il est facile de continuer la discussion de la conique (12). On trouve, par exemple, que l'angle φ des asymptotes et l'inclinaison ψ du grand axe sur la tangente sont donnés par les formules

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{6\rho}{\mathfrak{H}}\sqrt{-\mathfrak{P}}, \qquad \operatorname{tang}2\psi = \frac{6\rho\rho_1}{5\rho_1^2 - 3\rho\rho_2},$$

qui permettent de résoudre une foule de questions.

On détermine facilement la trajectoire du point O par les méthodes habituelles. L'application des formules connues

$$(14) \qquad \frac{\delta x}{ds} = \frac{dx}{ds} - \frac{y-\rho}{\rho}, \qquad \frac{\delta y}{ds} = \frac{dy}{ds} + \frac{x}{\rho}$$

aux coordonnées (13) donne

$$(15) \qquad \frac{\delta x_0}{ds} = \frac{\mathfrak{C}\rho_1}{\mathfrak{P}^2}, \qquad \frac{\delta y_0}{ds} = \frac{3\mathfrak{C}\rho}{\mathfrak{P}^2}.$$

On voit donc, avant tout, que le point O se déplace tangentiellement à OM. Autrement dit, le lieu des centres des coniques osculatrices à une ligne (M) est une courbe de poursuite de (M). La ligne (M) est donc, en quelque sorte, une développante de (O), mais une développante obtenue en supposant que le fil, primitivement enroulé sur (O) et dont un point décrit (M) lors du déroulement, subisse à chaque instant une extension ou une contraction convenable.

Il est clair, d'après (15), que le rapport des vitesses des points O, M est

$$(16) \qquad \frac{ds_0}{ds} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{P}^2}\sqrt{9\rho^2 + \rho_1^2},$$

l'indice o servant à distinguer tout ce qui se rapporte à la trajectoire de O. On trouve ensuite, par les méthodes habituelles,

$$(17) \qquad \rho_0 = \frac{\mathfrak{C}\rho(9\rho^2 + \rho_1^2)^{\frac{3}{2}}}{\mathfrak{P}^3}.$$

Les deux dernières relations fournissent, dans chaque cas particulier, l'équation intrinsèque de (O).

Considérons, par exemple, l'hypocycloïde à trois rebroussements, représentée, comme on sait, par l'équation

$$\rho^2 - 9s^2 = a^2,$$

a étant les $\frac{4}{3}$ du diamètre du cercle directeur. On a

$$\mathfrak{P} = 36a^2, \qquad \mathfrak{H} = 45a^2, \qquad \mathfrak{C} = -3240a^2 s.$$

Les formules (16) et (17) donnent, au signe près,

$$s_o = \frac{15s^2}{4a} - \frac{5a}{24}, \qquad \rho_o = \frac{15\rho s}{8a}.$$

On déduit de là que le lieu des centres des coniques osculatrices est représenté par l'équation

$$4\rho_o^2 + 9s_o^2 = \frac{25a^2}{64}.$$

Ce lieu est donc une hypocycloïde à six points de rebroussement : trois de ces points coïncident avec les points de rebroussement de l'hypocycloïde donnée, les trois autres leur sont diamétralement opposés sur la circonférence directrice commune.

Veut-on imposer à la conique osculatrice une condition, on ne doit plus retenir dans le second membre de (9) que deux termes, afin de laisser dans (11) un coefficient libre. On obtient ainsi

$$\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{6}x = \mathrm{A} + \mathrm{C}\alpha x,$$

d'où

$$\mathrm{A} = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2\rho}, \qquad \mathrm{C} = -\frac{\beta}{6\alpha} = -\frac{\rho_1}{6\rho^2}.$$

Par suite, l'équation (11) se transforme en (12), $\mathfrak{P}$ restant arbitraire. On aura la parabole osculatrice ou l'hyperbole équilatère osculatrice, suivant qu'on remplacera $\mathfrak{P}$ par o ou par $(9\rho^2 + \rho_1^2)$. Nous aurions pu éviter de répéter le calcul qui nous a conduit à l'équation (12), et cela, tout simplement, en éliminant ρ_2 entre cette équation et l'équation caractéristique de la conique spéciale qu'on veut considérer.

Arrêtons-nous à étudier la parabole osculatrice. On sait chercher, en partant de son équation, les coordonnées du foyer, l'équation de la directrice, etc. Cette équation est

$$2\rho_1 x + 6\rho y + 3\rho^2 = 0,$$

et sa dérivation donne

$$(\rho_2 - 3\rho)x + 4\rho_1 y + 2\rho\rho_1 = 0.$$

On tire de là $x = 0$, $y = -\frac{1}{2}\rho$; par conséquent, la directrice de la parabole osculatrice à une courbe quelconque touche son enveloppe sur la normale à la courbe. Le contact a lieu au point symétrique, par rapport à M, du milieu de MC. En appliquant aux coordonnées du point de contact les formules (14), on obtient, par des calculs connus,

$$(18) \qquad \frac{ds_o}{ds} = \frac{\sqrt{9\rho^2 + \rho_1^2}}{2\rho}, \qquad \rho_o = \frac{(9\rho^2 + \rho_1^2)^{\frac{3}{2}}}{2\mathfrak{P}}.$$

Si $\rho^2 + 9s^2 = a^2$, il vient $\rho_0 = \frac{3a}{8}$. Donc les paraboles osculatrices d'une hypocycloïde à trois rebroussements ont pour directrices les tangentes au cercle directeur. Si $\mathfrak{H} = 0$, les formules (18) donnent

$$\rho_o = \frac{1}{2}\sqrt{9\rho^2 + \rho_1^2}, \qquad s_o = \int \frac{\rho_o}{\rho}\,ds,$$

ou bien, en tenant compte de (6) et de l'équation intrinsèqne de l'hyperbole équilatère,

$$\rho_o = \frac{3}{2}\rho\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{2}{3}}, \qquad s_o = \frac{1}{2}\int \frac{\rho^{\frac{2}{3}}\,d\rho}{\sqrt{\rho^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{4}{3}}}};$$

d'où, par l'élimination de ρ,

$$s_o = \frac{1}{5}\int \frac{d\rho_o}{\sqrt{\left(\frac{2\rho_o}{3a}\right)^{\frac{4}{5}} - 1}}.$$

Par conséquent, l'enveloppe des directrices des paraboles osculatrices à une hyperbole équilatère est une des courbes définies par l'équation (4), pour les valeurs 10 et $\frac{2}{5}$ des coefficients λ et μ. C'est une spirale sinusoïde d'indice $-\frac{2}{3}$.

Quant au foyer, ses coordonnées sont

$$(19) \qquad \xi = -\frac{3\rho^2\rho_1}{2(9\rho^2+\rho_1^2)}, \qquad \eta = \frac{9\rho^3}{2(9\rho^2+\rho_1^2)}.$$

Ces valeurs nous disent que le foyer est symétrique, par rapport à la tangente, de la projection de M sur la directrice. Les formules (14), appliquées aux coordonnées (19), donnent

$$(20) \qquad \frac{\delta\xi}{ds} = \frac{(9\rho^2-\rho_1^2)\mathfrak{p}}{2(9\rho^2+\rho_1^2)^2}, \qquad \frac{\delta\eta}{ds} = \frac{6\mathfrak{p}\rho\rho_1}{2(9\rho^2+\rho_1^2)^2}.$$

Ces formules nous montrent, avant tout, que la normale au lieu du foyer passe au quart de MC, et que la tangente au même lieu divise en parties égales le segment déterminé par la directrice sur la tangente à (M), à partir de M. On trouve ensuite

$$(21) \qquad \frac{ds}{ds_o} = 2\left(\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{p}} - 1\right), \qquad \frac{\rho}{\rho_o} = 2\left(3\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{p}} - 5\right).$$

Par exemple, si $\rho^2 + 9s^2 = a^2$,

$$s_o = 2s, \qquad \rho_o = \frac{2}{5}\rho, \qquad 25\rho_o^2 + 9s_o^2 = 4a^2.$$

Donc les foyers des paraboles osculatrices d'une hypocycloïde à trois rebroussements sont situés sur l'épicycloïde ayant mêmes points de rebroussement. De même, si $\mathfrak{H} = 0$, les formules (21) donnent $s_o = \frac{1}{2}s$, $\rho_o = \frac{1}{10}\rho$, d'où l'on déduit que les foyers des paraboles osculatrices à une hyperbole équilatère se trouvent sur une des courbes définies par l'équation (4), correspondant aux valeurs $\frac{6}{25}$ et $\frac{2}{3}$ des coefficients λ et μ. Enfin toute courbe représentée par la même équation, mais correspondant aux valeurs $-\frac{3}{2}$ et $-\frac{1}{6}$ des coefficients, est telle que les foyers de ses paraboles osculatrices sont alignés sur une droite.

En remplaçant $\mathfrak{P}$ par $-(9\rho^2+\rho_1^2)$ dans (12), on obtient l'équation de l'hyperbole équilatère osculatrice

$$x^2-y^2=\frac{2\rho_1}{3\rho}xy+2\rho y.$$

Les coordonnées du centre sont $x_0=2\xi$, $y_0=-2\eta$. Ceci nous montre que le centre de l'hyperbole équilatère, osculatrice en un point M d'une courbe, est le symétrique de M par rapport à la directrice de la parabole osculatrice, en M, à la même courbe; puis, en vertu de (19) et (20),

$$\frac{dx_0}{ds}=\frac{(9\rho^2-\rho_1^2)\mathfrak{H}}{(9\rho^2+\rho_1^2)^2},\qquad \frac{\partial y_0}{ds}=-\frac{6\mathfrak{H}\rho\rho_1}{(9\rho^2+\rho_1^2)^2};$$

d'où

$$\frac{ds}{ds_0}=\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{H}}-1,\qquad \frac{\rho}{\rho_0}=3\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{H}}-1.$$

Si $\rho^2+9s^2=a^2$,

$$s_0=5s,\qquad \rho_0=\tfrac{5}{7}s,\qquad 49\rho_0^2+9s_0^2=25a^2.$$

Donc les centres des hyperboles équilatères osculatrices d'une hypocycloïde à trois rebroussements sont situés sur l'épicycloïde étoilée, qui a mêmes points de rebroussement. De même, pour $\mathfrak{P}=0$, on voit que les hyperboles équilatères osculatrices d'une parabole ont leurs centres sur la parabole symétrique de la première, par rapport à la directrice commune : résultat évident. Enfin les courbes dont les hyperboles équilatères osculatrices ont les centres sur une droite sont représentées par une équation (4), pour les valeurs $\frac{3}{2}$ et $\frac{1}{6}$ des coefficients.

Les résultats qui précèdent sont facilement extensibles à une infinité de familles de courbes, comprenant la famille des coniques d'une part, celle des lignes cycloïdales de l'autre. Chaque famille est caractérisée par un indice n, et toute courbe (M) de la famille possède dans son plan un cercle tel, que la polaire de M par rapport à ce cercle détache de la normale en M, à partir de ce point, un segment égal à $n+1$ fois le rayon de courbure. Les coniques sont caractérisées par l'indice -2, les lignes cycloïdales par l'indice 0. L'équation intrinsèque générale de ces lignes est

$$(22)\qquad s = \frac{n+1}{n-1}\int \frac{d\rho}{\sqrt{\lambda\rho^{\frac{2n}{n-1}} - \mu\rho^{\frac{2n+2}{n-1}} - 1}}.$$

On en déduit, par dérivations successives,

$$\rho^2 + \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 \rho_1^2 = \lambda\rho^{\frac{4n-2}{n-1}} - \mu\rho^{\frac{4n}{n-1}},$$

$$\rho^2 + \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 \rho\rho_2 = \frac{2n-1}{n-1}\lambda\rho^{\frac{4n-2}{n-1}} - \frac{2n}{n-1}\mu\rho^{\frac{4n}{n-1}};$$

puis

$$(23)\qquad \lambda\rho^{\frac{4n-2}{n-1}} = \frac{n+1}{(n-1)^2}\mathfrak{P}, \qquad \mu\rho^{\frac{4n}{n-1}} = \frac{n+1}{(n-1)^2}\mathfrak{H},$$

après avoir posé, pour abréger,

$$\mathfrak{P} = (n-1)^2\rho^2 + (n+1)^2\rho_1^2 + (n^2-1)(\rho_1^2 - \rho\rho_2),$$

$$\mathfrak{H} = \frac{x}{n+1}[(n-1)^2\rho^2 + (n+1)^2\rho_1^2] + (n^2-1)(\rho_1^2 - \rho\rho_2).$$

C'est ainsi qu'on détermine la courbe (22), qu'on veut mettre en contact du quatrième ordre avec une courbe quelconque.

Dans toute famille, définie par son indice, il existe une ligne de Ribaucour, caractérisée par l'équation $\mathfrak{P} = 0$, et une spirale sinusoïde, caractérisée par l'équation $\mathfrak{H} = 0$. Les coordonnées du centre du cercle directeur sont

$$(24) \qquad x_0 = \frac{(n^2-1)\rho^2\rho_1}{\mathfrak{P}}, \qquad y_0 = \frac{(n-1)^2\rho^3}{\mathfrak{P}},$$

et le rayon du cercle est

$$\frac{\rho^2}{\mathfrak{P}}\sqrt{-(n-1)(n^2-1)\mathfrak{H}}.$$

On voit que le cercle directeur se réduit à une droite pour $\mathfrak{P} = 0$, à un point pour $\mathfrak{H} = 0$. Enfin, on obtient l'équation caractéristique des courbes (22), dont l'indice est donné, en dérivant l'une ou l'autre des égalités (23). On parvient à $\mathfrak{C} = 0$, où

$$\begin{aligned}\mathfrak{C} = 2n\rho_1[(2n-1)\mathfrak{P} - 2(n+1)\mathfrak{H}]\\ -(n-1)(n^2-1)\rho(\rho\rho_3 - \rho_1\rho_2).\end{aligned}$$

Ainsi, pour $n = 0$, on retrouve l'équation caractéristique des lignes cycloïdales, et l'on voit que, dans cette famille,

$$\mathfrak{P} = \rho(\rho+\rho_2), \qquad \mathfrak{H} = \rho\rho_2 - \rho_1^2.$$

L'équation $\mathfrak{P} = 0$ caractérise les cycloïdes, qui jouent ici le même rôle que les paraboles dans la famille des coniques, et l'équation $\mathfrak{H} = 0$ caractérise les spirales logarithmiques, qui jouent le rôle des hyperboles équilatères.

Il est presque superflu de faire remarquer que toutes les propriétés démontrées plus haut pour le cas de $n = -2$ subsistent en général. Ainsi l'application des formules (14) aux coordonnées (24) donne

$$\frac{\delta x_0}{ds} = -\frac{(n+1)\mathfrak{C}\rho_1}{\mathfrak{P}^2}, \qquad \frac{\delta y_0}{ds} = -\frac{(n-1)\mathfrak{C}\rho}{\mathfrak{P}^2},$$

et l'on voit que le lieu des centres des cercles directeurs des courbes (22), osculatrices à une courbe quelconque pour une valeur déterminée de n, est toujours une ligne de poursuite de la courbe considérée. Si l'on particularise les lignes (22), de manière que $\mathfrak{H} = 0$, on trouve les formules

$$\frac{ds}{ds_0} = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{H}} - 1, \qquad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{n-1}{n+1}\,\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{H}} - 1,$$

qui servent à déterminer le lieu des pôles des spirales sinusoïdes, d'indice n, qui ont un contact du troisième ordre avec une courbe donnée. Enfin, si l'on rapproche les expressions des coordonnées du pôle de $\mathfrak{H}$ et l'équation de la directrice de $\mathfrak{P}$, on voit que, si une ligne de Ribaucour et une spirale sinusoïde de même indice ont un contact du troisième ordre, le point de contact est symétrique du pôle de la spirale par rapport à la directrice de la ligne de Ribaucour. Nous n'insistons pas sur un grand nombre d'autres résultats, que la méthode exposée dans cette Note permet d'obtenir avec la plus grande facilité.