HUSQUIN DE RHÉVILLE

Sur la courbure d'une podaire

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 140-143

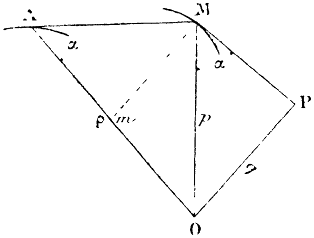
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__140_1>

SUR LA COURBURE D'UNE PODAIRE;

PAR M. HUSQUIN DE RHÉVILLE,
Élève de l'École centrale.

1. Soit M (*fig.* 1) la projection d'un point fixe O sur la tangente en A à une courbe fixe : menons la tan-

Fig. 1.



gente MP au lieu du point M et projetons sur cette droite le point O en P.

Nous désignerons par α l'angle OAM ou son égal OMP.

En posant

$$OA = \rho, \qquad OM = p, \qquad OP = q,$$

le rayon de courbure en A est

$$R = \rho \frac{d\rho}{dp},$$

et le rayon de courbure de la podaire en M est

$$r = p \frac{dp}{dq}.$$

En différentiant l'égalité $p^2 = q\rho$, on obtient

$$dq = \frac{2p\,dp - q\,d\rho}{\rho}.$$

L'élimination de dq donne

$$r = \frac{p\rho\,dp}{2p\,dp - q\,d\rho},$$

et, en remarquant que $\frac{q}{p} = \sin\alpha$, on trouve la formule

$$r = \frac{\rho^2}{2\rho - R\sin\alpha},$$

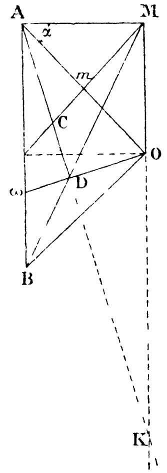
qui se trouve démontrée dans le *Traité d'Analyse* de M. Laurent (t. II, p. 126) par une méthode plus pénible, bien que plus naturelle.

II. La première conséquence de cette expression du rayon de courbure de la podaire est la construction géométrique suivante du centre de courbure de cette courbe relatif au point M.

Soit ω (*fig.* 2) le centre de courbure au point A : je mène OB perpendiculaire à AO jusqu'à sa rencontre en B avec la normale Aω.

Les droites MB et $O\omega$ se coupent en D et la droite AD passe au centre C de courbure de la podaire en M.

Fig. 2.



En effet, si AD prolongée rencontre OM en K, on a

$$\frac{KM}{KO} = \frac{AB}{A\omega} = \frac{\rho}{R\sin\alpha}.$$

Le triangle MOm, coupé par la transversale ACK, donne

$$\frac{MC}{Cm} = \frac{AO}{mA}\,\frac{KM}{KO} = \frac{2\rho}{R\sin\alpha}$$

et, par suite,

$$MC = \frac{\rho^2}{2\rho - R\sin\alpha} = r.$$

Cette construction complètement linéaire est plus simple que celle donnée par M. Mannheim (*Cours de Géométrie descriptive*, p. 197), qui exige la construction d'un cercle.

III. On sait, d'après un théorème de M. du Chatenet (*Nouvelles Annales,* 1886), que si une courbe appartient à la famille $\rho^m = a^m \cos m\omega$, on a

$$\rho = (m+1) R \sin\alpha;$$

dans ces conditions, on en déduit, pour la valeur du rayon de courbure de sa podaire par rapport au pôle,

$$r = \rho \frac{m+1}{2m+1},$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\rho \sin\alpha}{r \sin\alpha} = \frac{p}{r \sin\alpha} = \frac{2m+1}{m+1};$$

on en déduit que :

La podaire de la courbe $\rho^m = a^m \cos m\omega$ *par rapport au pôle est la courbe de même famille*

$$\rho^{\frac{m}{m+1}} = a^{\frac{m}{m+1}} \cos \frac{m}{m+1}\omega.$$