NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GAMBEY

Solution de la question de mathématiques spéciales proposée au concours d'agrégation des sciences mathématiques de 1889

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 129-138

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__129_1>

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES DE 1889;

PAR M. GAMBEY,
Professeur au lycée de Rouen.

On donne un cône du second degré C *et deux quadratiques* A, A′, *inscrites dans ce cône; on considère une quadrique variable* S *inscrite dans le même cône, et touchant les quadriques données* A *et* A′ *en des points variables* α *et* α'.

1° *Démontrer que la droite* $\alpha\alpha'$ *passe par un point fixe.*

2° *Trouver le lieu de la droite d'intersection des plans tangents à la surface* S *aux points* α *et* α'.

3° *Démontrer que le lieu du pôle d'un plan fixe* P *par rapport à la surface* S *se compose de deux quadriques bitangentes.*

4° *Trouver le lieu de la droite qui passe par les points de contact de ces deux quadriques, lorsque le plan* P *se déplace, en restant parallèle à un plan tangent au cône* C.

Nous prendrons pour axes de coordonnées les axes principaux du cône donné, dont l'équation sera ainsi

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 0.$$

Celles des trois quadriques pourront s'écrire de la manière suivante :

$$
\begin{array}{ll}
\text{A} & AX^2 + BY^2 + CZ^2 - (aX + bY + cZ + d)^2 = 0, \\
\text{A}' & AX^2 + BY^2 + CZ^2 - (a_1X + b_1Y + c_1Z + d_1)^2 = 0, \\
\text{S} & AX^2 + BY^2 + CZ^2 - (lX + mY + nZ + p)^2 = 0.
\end{array}
$$

Les coefficients a, b, c, d; a_1, b_1, c_1, d_1 sont donnés; mais l, m, n, p sont variables.

Soient x, y, z les coordonnées du point α, et x', y', z' celles du point α'. Je pose, pour abréger l'écriture,

$$
(1) \quad \left\{
\begin{array}{l}
Ax^2 + By^2 + Cz^2 = V, \\
ax + by + cz + d = P, \\
a_1x' + b_1y' + c_1z' + d_1 = P'_1, \\
lx + my + nz + p = Q, \\
lx' + my' + nz' + p = Q';
\end{array}
\right.
$$

et je considère V, P, ... comme des inconnues auxiliaires. En outre, en prévision de certaines relations importantes que j'aurai à employer, je fais encore

$$
(2) \quad \left\{
\begin{array}{ll}
\dfrac{l^2}{A} + \dfrac{m^2}{B} + \dfrac{n^2}{C} - 1 = \lambda, & \dfrac{a^2}{A} + \dfrac{b^2}{B} + \dfrac{c^2}{C} - 1 = k, \\[2ex]
\dfrac{al}{A} + \dfrac{bm}{B} + \dfrac{cn}{C} = \mu, & \dfrac{a_1^2}{A} + \dfrac{b_1^2}{B} + \dfrac{c_1^2}{C} - 1 = k_1. \\[2ex]
\dfrac{a_1 l}{A} + \dfrac{b_1 m}{B} + \dfrac{c_1 n}{C} = \mu_1. &
\end{array}
\right.
$$

Cela posé, l'identification des plans tangents en α aux quadriques A et S donne

$$
x = \frac{PQ(ld - ap)}{A(dP - pQ)}, \qquad y = \frac{PQ(md - bp)}{B(dP - pQ)}, \qquad z = \frac{PQ(nd - cp)}{C(dP - pQ)}.
$$

Substituant ces valeurs de x, y, z dans celles des relations (1) qui les contiennent, on obtient les trois équations suivantes

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &V(dP-pQ)^2\\ &\quad = P^2Q^2\left[\frac{(ld-ap)^2}{A}+\frac{(md-bp)^2}{B}+\frac{(nd-cp)^2}{C}\right],\end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &(P-d)(dP-pQ)\\ &\quad = PQ\left[\frac{(ld-ap)a}{A}+\frac{(md-bp)b}{B}+\frac{(nd-cp)c}{C}\right],\\ &(Q-d)(dP-pQ)\\ &\quad = PQ\left[\frac{(ld-ap)l}{A}+\frac{(md-bp)m}{B}+\frac{(nd-cp)n}{C}\right],\end{aligned}\right.$$

auxquelles il faut joindre

$$V = P^2 = Q^2.$$

Prenons d'abord $P-Q=0$. En remplaçant V par P^2, ainsi que Q par P, dans l'équation (3), et supprimant le facteur P^4, on obtient la relation

$$\frac{(ld-ap)^2}{A}+\frac{(md-bp)^2}{B}+\frac{(nd-cp)^2}{C}-(p-d)^2=0,$$

c'est-à-dire

$$(A)\qquad d^2\lambda - 2pd(\mu-1)+p^2k=0.$$

Cette condition exprime que le plan

$$(5)\qquad lX+mY+nZ+p-(aX+bY+cZ+d)=0$$

est tangent à la quadrique A en α, à cause de $P-Q=0$.

En éliminant P et Q entre les équations (4), on retrouve l'équation (A).

Si l'on prend, au contraire, $P+Q=0$, on arrive à la condition

$$(B)\qquad d^2\lambda - 2pd(\mu+1)+p^2k=0,$$

qui exprime que le plan

$$(6)\qquad lX+mY+nZ+p+(aX+bY+cZ+d)=0$$

est tangent aussi en α à la quadrique A. Ainsi, selon que l'on prend $P - Q = 0$ ou $P + Q = 0$, le plan (5) est le plan tangent commun aux quadriques A et S en α, ou bien c'est le plan (6).

Il est évident que la considération du plan tangent en α' conduirait à des relations analogues à (A) et à (B), où a, b, c, d seraient remplacées par a_1, b_1, c_1, d_1, et que ce plan tangent est

$$(7)\quad lX + mY + nZ + p - (a_1X + b_1Y + c_1Z - d_1) = 0,$$

si l'on prend $P'_1 - Q' = 0$; ou bien

$$(8)\quad lX + mY + nZ + p - (a_1X + b_1Y + c_1Z + d_1) = 0,$$

si l'on prend $P'_1 + Q' = 0$. Les relations analogues à (A) et à (B) sont

$$(A_1)\qquad d_1^2\lambda - 2pd_1(\mu_1 - 1) + p^2k_1 = 0,$$
$$(B_1)\qquad d_1^2\lambda - 2pd_1(\mu_1 - 1) + p^2k_1 = 0.$$

Dans l'hypothèse $P - Q = 0$, les expressions de x, y, z sont

$$x = P\frac{ld - ap}{A(d-p)},\qquad y = P\frac{md - bp}{B(d-p)},\qquad z = P\frac{nd - cp}{C(d-p)}.$$

Multipliant respectivement par a, b, c et ajoutant, on détermine P, dont la valeur est donnée par la formule

$$P = \frac{d(p-d)}{d(\mu-1) - pk} = \frac{2pd(p-d)}{d^2\lambda - p^2k}.$$

La seconde forme est obtenue en éliminant μ à l'aide de la relation (A).

Il en résulte

$$x = \frac{-2pd(ld - ap)}{A(d^2\lambda - p^2k)},\qquad y = \frac{-2pd(md - bp)}{B(d^2\lambda - p^2k)},\qquad z = \frac{-2pd(nd - cp)}{C(d^2\lambda - p^2k)}.$$

Et l'on aurait de même, pour $P'_1 - Q' = 0$,

$$x' = \frac{-2pd_1(ld_1 - a_1 p)}{A(d_1^2\lambda - p^2 k_1)},$$

$$y' = \frac{-2pd_1(md_1 - b_1 p)}{B(d_1^2\lambda - p^2 k_1)},$$

$$z' = \frac{-2pd_1(nd_1 - c_1 p)}{C(d_1^2\lambda - p^2 k_1)}.$$

I. *La droite $\alpha\alpha'$ passe par un point fixe.* — Les équations

$$\frac{X - x}{x' - x} = \frac{Y - y}{y' - y} = \frac{Z - z}{z' - z}$$

de la droite $\alpha\alpha'$, transformées en y substituant les valeurs ci-dessus de x, y, z; x', y', z', peuvent s'écrire

$$\frac{AX(d^2\lambda - p^2 k) - 2pd(ld - ap)}{AX(d_1^2\lambda - p^2 k_1) + 2pd_1(ld_1 - a_1 p)}$$
$$= \frac{BY(d^2\lambda - p^2 k) + 2pd(md - bp)}{BY(d_1^2\lambda - p^2 k_1) + 2pd_1(md_1 - b_1 p)}$$
$$= \frac{CZ(d^2\lambda - p^2 k) + 2pd(nd - cp)}{CZ(d_1^2\lambda - p^2 k_1) + 2pd_1(nd_1 - c_1 p)}.$$

En désignant par ρ la valeur commune de ces trois rapports, et en se bornant au premier, on obtient aisément

$$\frac{AX}{2} = \frac{ad - \rho d_1 d_1 - \frac{l}{p}(d^2 - \rho d_1^2)}{\frac{\lambda}{p^2}(d^2 - \rho d_1^2) - (k - \rho k_1)}.$$

Les seules quantités qui dépendent encore de l, m, n, p sont $\frac{l}{p}$ et $\frac{\lambda}{p^2}$. Si on annule leur coefficient commun $d^2 - \rho d_1^2$, la valeur de X deviendra indépendante de l, m, n, p et, par conséquent, des coordonnées des points α et α'. Il suffit de prendre $\rho = \frac{d^2}{d_1^2}$, et l'on obtient

$$\frac{2dd_1(ad_1 - da_1)}{A(d^2 k_1 - kd_1^2)}, \quad Y_0 = \frac{2dd_1(bd_1 - db_1)}{B(d^2 k_1 - kd_1^2)}, \quad Z_0 = \frac{2dd_1(cd_1 - dc_1)}{C(d^2 k_1 - kd_1^2)}.$$

Or les équations tangentielles des quadriques A et A′, savoir

$$d^2\left(\frac{u^2}{A}+\frac{v^2}{B}+\frac{w^2}{C}\right)+2dr\left(\frac{au}{A}+\frac{bv}{B}+\frac{cw}{C}\right)+kr^2=0,$$

$$d_1^2\left(\frac{u^2}{A}+\frac{v^2}{B}+\frac{w^2}{C}\right)+2d_1r\left(\frac{a_1u}{A}+\frac{b_1v}{B}+\frac{c_1w}{C}\right)+k_1r^2=0,$$

donnent aisément les équations des sommets des deux cônes circonscrits à la fois à A et à A′. Ce sont

$$r=0,$$

équation de l'origine, et

$$2dd_1\left(\frac{ad_1-da_1}{A}u+\frac{bd_1-db_1}{B}v+\frac{cd_1-dc_1}{C}w\right)+d^2k_1-kd_1^2=0.$$

Les coordonnées-points de ce second sommet sont donc

$$x_0=\frac{2dd_1(ad_1-da_1)}{A(d^2k_1-kd_1^2)},$$

$$y_0=\frac{2dd_1(bd_1-db_1)}{B(d^2k_1-kd_1^2)},$$

$$z_0=\frac{2dd_1(cd_1-dc_1)}{C(d^2k_1-kd_1^2)}.$$

Ainsi l'on a

$$X_0=x_0,\qquad Y_0=y_0,\qquad Z_0=z_0,$$

et *la droite $\alpha\alpha'$ passe constamment par le sommet du second cône circonscrit à la fois aux deux quadriques* A *et* A′.

II. *Lieu des intersections des plans tangents en α et α'.* — Il suffit, pour l'obtenir, de retrancher membre à membre les équations (5) et (7), ou bien (6) et (8); puis, les équations (5) et (8), ou bien (6) et (7). On obtient ainsi deux plans, savoir

$$(a-a_1)X+(b-b_1)Y+(c-c_1)Z+d-d_1=0,$$

$$(a+a_1)X+(b+b_1)Y+(c+c_1)Z+d+d_1=0.$$

III. *Lieu du pôle d'un plan fixe par rapport aux quadriques* S. — Soit

$$(9) \qquad uX + vY + wZ - 1 = 0$$

un plan fixe, et posons

$$ux + vy + wz - 1 = H,$$

x, y, z étant les coordonnées du pôle du plan (9) par rapport à S. On aura facilement

$$Ax - lQ = pQu, \qquad By - mQ = pQv, \qquad Cz - nQ = pQw;$$

d'où

$$l = \frac{Ax - pQu}{Q}, \qquad m = \frac{By - pQv}{Q}, \qquad n = \frac{Cz - pQw}{Q},$$

et, en multipliant par x, y, z et ajoutant les résultats, on trouve d'abord

$$(10) \qquad p = \frac{V - Q^2}{HQ};$$

par suite, on a

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} l &= \frac{AHx - (V - Q^2)u}{HQ}, \\ m &= \frac{BHy - (V - Q^2)v}{HQ}, \\ n &= \frac{CHz - (V - Q^2)w}{HQ}. \end{aligned} \right.$$

La substitution de ces valeurs de l, m, n, p dans les équations (A) et (A_1), par exemple, permet de les mettre sous la forme

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} & hQ^2 - 2dHQ - hV + R^2 - P^2 = 0, \\ & h_1Q^2 - 2d_1HQ - h_1V + R_1^2 - P_1^2 = 0 \end{aligned} \right.$$

en supprimant le facteur $A - Q^2$, et en posant encore

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{(a+du)^2}{A} + \dfrac{(b+dv)^2}{B} + \dfrac{(c+dw)^2}{C} - 1 = h, \\[2ex] \dfrac{(a_1+d_1u)^2}{A} + \dfrac{(b_1+d_1v)^2}{B} + \dfrac{(c_1+d_1w)^2}{C} - 1 = h_1, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (a+du)x + (b+dv)y + (c+dw)z &= R, \\ (a_1+d_1u)x + (b_1+d_1v)y + (c_1+d_1w)z &= R_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax + by + cz + d &= P, \\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= P_1. \end{aligned}$$

L'élimination de Q entre les équations obtenues conduit à

$$(C)\quad \begin{cases} [dh_1(P+R) - d_1h(P_1+R_1)]^2 \\ \quad = 4(dh_1 - hd_1)[(dh_1 - hd_1)A + dd_1H(P+R-P_1-R_1)], \end{cases}$$

équation d'une quadrique circonscrite à la quadrique

$$(dh_1 - hd_1)A + dd_1H(P+R-P_1-R_1) = 0,$$

le plan de la courbe de contact étant

$$dh_1(P+R) - d_1h(P_1+R_1) = 0.$$

En substituant les valeurs de l, m, n, p dans les relations (B) et (B_1), on est encore conduit à la même équation (C).

Mais, si l'on associe (A) avec (B_1), ou (A_1) avec (B), on trouve l'équation d'une autre quadrique analogue à (C), savoir

$$(C')\quad \begin{cases} [dh_1(P+R) - d_1h(P_1+R_1)]^2 \\ \quad = 4(dh_1 + hd_1)[(dh_1 + hd_1)A + dd_1H(P+R+P_1+R_1)]. \end{cases}$$

Ces deux quadriques sont bitangentes.

En effet, pour trouver leur courbe d'intersection, on peut éliminer A entre (C) et (C'), et l'équation obtenue pourra tenir lieu de l'une d'elles.

On arrive ainsi à une équation qui se décompose en deux facteurs linéaires, savoir

$$\mathrm{H} = ux + vy + wz - 1 = 0$$

et

$$dh_1(\mathrm{P} + \mathrm{R}) - hd_1(\mathrm{P}_1 + \mathrm{R}_1) = 0.$$

Donc, *les quadriques* (C) *et* (C′) *se coupent suivant deux courbes planes et sont, par conséquent, bitangentes.*

IV. *Lieu de la droite des contacts des quadriques* (C) *et* (C′) *quand le plan considéré se déplace en restant parallèle à un plan tangent au cône.* — Si ρ est une indéterminée, l'équation du plan mobile peut s'écrire

$$\begin{aligned} \mathrm{A}\alpha x + \mathrm{B}\beta y + \mathrm{C}\gamma z &= \rho, \\ \mathrm{A}\alpha^2 + \mathrm{B}\beta^2 + \mathrm{C}\gamma^2 &= 0, \end{aligned}$$

avec les conditions

$$\mathrm{A}\alpha = \rho u, \qquad \mathrm{B}\beta = \rho v, \qquad \mathrm{C}\gamma = \rho w;$$

ce qui réduit les relations (13) à

$$\begin{aligned} k + \frac{2d}{\rho}(a\alpha + b\beta - c\gamma) &= h, \\ k_1 + \frac{2d_1}{\rho}(a_1\alpha - b_1\beta + c_1\gamma) &= h_1. \end{aligned}$$

Cela posé, les équations de la droite des contacts des quadriques (C) et (C′) étant

$$\mathrm{H} = 0 \qquad \text{et} \qquad dh_1(\mathrm{P} + \mathrm{R}) - hd_1(\mathrm{P}_1 + \mathrm{R}_1) = 0$$

ou plus simplement

$$\mathrm{H} = 0 \qquad \text{et} \qquad dh_1\mathrm{P} - hd_1\mathrm{P}_1 = 0.$$

il suffira d'expliciter ces équations

$$A\alpha x + B\beta y + C\gamma z = \rho,$$

$$\left[dk_1 + \frac{2dd_1}{\rho}(a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma)\right]P$$
$$- \left[d_1 k + \frac{2dd_1}{\rho}(a\alpha + b\beta + c\gamma)\right]P_1 = 0$$

et d'éliminer ρ entre elles, ce qui donne immédiatement

$$(D) \quad \left\{ \begin{array}{l} P[dk_1(A\alpha x + B\beta y + C\gamma z) + 2dd_1(a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma)] \\ \quad - P_1[d_1 k(A\alpha x + B\beta y + C\gamma z) + 2dd_1(a\alpha + b\beta + c\gamma)] = 0. \end{array} \right.$$

équation d'une autre quadrique dont quatre génératrices rectilignes sont mises en évidence.

La question est complètement résolue.