NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DE SAINT-GERMAIN

Note sur le problème de mécanique proposé à l'agrégation en 1889

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 118-123

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__118_1>

NOTE SUR LE PROBLÈME DE MÉCANIQUE PROPOSÉ A L'AGRÉGATION EN 1889;

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. DE SAINT-GERMAIN
A M. ROUCHÉ.

Puisque vous voulez bien penser que je pourrai intéresser quelques lecteurs des *Nouvelles Annales* en leur indiquant une solution du problème de Mécanique proposé à l'agrégation en 1889, je vais le faire brièvement, la question étant facile.

Soient :

OX_1, OY_1, OZ trois axes de coordonnées rectangulaires;

S une surface définie par l'équation

$$z = e^{x_1+y_1};$$

D une droite dont les équations sont $x_1 = y_1 = z$.

Le système des axes OX_1, OY_1, OZ et de S tourne avec une vitesse constante ω autour de la droite D supposée fixe. Il s'agit de déterminer le mouvement relatif d'un point M, ayant une masse égale à l'unité, assujetti à rester sur S et sollicité par une force connue F : pression sur la surface. Étudier le cas où F est la résultante de deux forces, l'une égale à ω^2MO et dirigée suivant MO, l'autre égale à $3\omega^2$MH, dirigée suivant la perpendiculaire MH abaissée du point M sur un plan mené par l'origine normale à D. A l'instant initial, le mobile se trouve sur OZ avec une vitesse dont les projections sur OX_1 et sur OY_1 sont $-\frac{2\omega}{\sqrt{3}}$ et $\frac{2\omega}{\sqrt{3}}$.

La surface S étant un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la bissectrice de l'angle formé par OY_1 et le prolongement OX'_1 de OX_1, il est naturel de prendre pour axes coordonnés mobiles l'axe donné OZ et les bissectrices OX, OY des angles X_1OY_1, $Y_1OX'_1$. L'équation de S devient

$$z = e^{x\sqrt{2}}. \tag{1}$$

Quant aux équations du mouvement relatif du point M sur cette surface, on sait les former immédiatement : ce sont celles qui représenteraient le mouvement absolu du mobile s'il était libre, mais sollicité par quatre forces : 1° la force donnée F; 2° une force N, normale à S et représentant l'action de cette surface; 3° la force d'inertie d'entraînement; 4° la force centrifuge composée. Les composantes des deux dernières sont données par les formules de Rivals et de Coriolis, et les équations cherchées sont de la forme bien connue

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{X} + \mathrm{N}\cos a$$
$$+ m\left[\omega^2 x - p(px + qy + rz) + y\frac{dr}{dt} - z\frac{dq}{dt}\right]$$
$$+ 2m\left(r\frac{dy}{dt} - q\frac{dz}{dt}\right),$$

....

Dans le problème proposé, m est égal à 1, et les composantes de la rotation d'entraînement sont, on le voit sans peine,

$$p = \frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \qquad q = 0, \qquad r = \frac{\omega}{\sqrt{3}};$$

les cosinus directeurs de la réaction N, supposée positive quand elle fait un angle aigu avec OZ, peuvent se mettre sous la forme

$$\cos a = -\frac{z\sqrt{2}}{\sqrt{1+2z^2}}, \qquad \cos b = 0, \qquad \cos c = \frac{1}{\sqrt{1+2z^2}};$$

les composantes X, Y, Z de F sont connues et l'on a, pour les équations du mouvement relatif,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \mathrm{X} - \frac{\mathrm{N}z\sqrt{2}}{\sqrt{1+2z^2}} + \omega^2\frac{x - z\sqrt{2}}{3} + \frac{2\omega}{\sqrt{3}}\frac{dy}{dt},\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \mathrm{Y} + \omega^2 y + \frac{2\omega}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}\frac{dz}{dt} - \frac{dx}{dt}\right),\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \mathrm{Z} + \frac{\mathrm{N}}{\sqrt{1+2z^2}} + \omega^2\sqrt{2}\,\frac{z\sqrt{2} - x}{3} - \frac{2\omega}{\sqrt{3}}\frac{dy}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Ces équations donnent la solution du problème général : les deux équations qui résultent de l'élimination de N et l'équation (1) permettent de déterminer x, y, z en fonction du temps; la première ou la troisième des équations (2) fait ensuite connaître la réaction N, égale et opposée à la pression supportée par S.

Dans le cas particulier proposé, les composantes X, Y, Z de F sont respectivement, après de simples réductions,

$$-\omega^2(3x+z\sqrt{2}), \qquad -\omega^2 y, \qquad -\omega^2(x\sqrt{2}+2z),$$

et l'on trouve, pour les équations du mouvement relatif du point M,

$$(3) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -4\omega^2\frac{2x+z\sqrt{2}}{3} + \frac{2\omega}{\sqrt{3}}\frac{dy}{dt} - \frac{\mathrm{N}z\sqrt{2}}{\sqrt{1+2z^2}},$$

$$(4) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2\omega}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}\frac{dz}{dt} - \frac{dx}{dt}\right),$$

$$(5) \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -4\omega^2\frac{x\sqrt{2}+z}{3} - \frac{2\omega\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{dy}{dt} + \frac{\mathrm{N}}{\sqrt{1+2z^2}}.$$

A l'instant initial, on a

$$x = y = 0, \qquad z = 1,$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0, \qquad \frac{dy}{dt} = v_0 = \frac{2\omega\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Cela posé, l'équation (4) peut s'intégrer une fois et donne, eu égard à ces conditions initiales,

$$(6) \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{2\omega}{\sqrt{3}}(z\sqrt{2} - x).$$

En ajoutant membre à membre les équations (3), (4), (5), après les avoir multipliées respectivement par $2\,dx$, $2\,dy$, $2\,dz$, on a l'équation des forces vives sous la forme

$$d.v^2 = -\tfrac{8}{3}\omega^2(x\sqrt{2}+z)(dx\sqrt{2}+dz);$$

l'intégrale première est, eu égard aux conditions initiales,

$$v^2 = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} = 4\,\omega^2 - \frac{4}{3}\,\omega^2\left(x\sqrt{2} + z\right)^2.$$

Si l'on remplace $\frac{dy}{dt}$ par sa valeur (6), puis z et $\frac{dz}{dt}$ par leurs valeurs en fonction de x et $\frac{dx}{dt}$, on pourra tirer de cette équation

$$(7) \qquad \frac{dx^2}{dt^2} = 4\,\omega^2\,\frac{1 - x^2 - e^{2x\sqrt{2}}}{1 + 2\,e^{2x\sqrt{2}}};$$

on en déduirait l'expression de t en fonction de x à l'aide d'une quadrature qu'on ne peut réduire aux fonctions élémentaires.

L'élimination de dt entre les équations (6) et (7) donne l'équation de la projection de la trajectoire sur le plan des xy

$$\frac{dy}{dx} = \pm\,\frac{\left(\sqrt{2}\,e^{x\sqrt{2}} - x\right)\sqrt{1 + 2\,e^{2x\sqrt{2}}}}{\sqrt{3}\,\sqrt{1 - x^2 - e^{2x\sqrt{2}}}};$$

le second membre n'est réel que si x est compris entre les valeurs o et α qui annulent le dénominateur (la méthode de Newton donne bien facilement $-0,96702$ pour valeur approchée de α); le numérateur ne s'annule jamais. De ces résultats et de l'examen des équations (6) et (7), on conclut aisément que la trajectoire ondule sur la surface S entre deux génératrices qu'elle va toucher alternativement; x et z sont des fonctions périodiques du temps; y croît indéfiniment.

En différentiant l'équation (7) par rapport au temps, on en déduit la valeur de $\frac{d^2x}{dt^2}$ qui, avec la valeur (6) de

$\frac{dy}{dt}$, permet de tirer N de l'équation (3); on peut mettre sa valeur sous la forme

$$N = 4\omega^2 z(3 - x\sqrt{2} - 2x^2 - 2xz^2\sqrt{2})(1 + 2z^2)^{-\frac{3}{2}};$$

la réaction de la surface reste constamment positive.