NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

TROISIÈME SÉRIE.

1890.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

RÉDIGÉ PAR

M. CH. BRISSE,

PROFESSEUR A L'ÉCOLE CENTRALE ET AU LYCÉE CONDORCET,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

ET

M. E. ROUCHÉ,

EXAMINATEUR DE SORTIE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.
PROFESSEUR AU CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS.

**Publication fondée en 1842 par MM. Gerono et Terquem,
et continuée par MM. Gerono, Prouhet, Bourget et Brisse.**

TROISIÈME SÉRIE.

TOME NEUVIÈME.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1890

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

REMARQUES AU SUJET DU THÉORÈME DE CARNOT;

PAR M. C.-A. LAISANT,

Docteur ès Sciences.

PROPOSITIONS DIRECTES.

1. Le théorème de Carnot, relatif aux segments déterminés sur les côtés d'un polygone fermé par les intersections avec une conique, ou plus généralement avec une courbe algébrique plane d'ordre quelconque, me semble pouvoir être démontré d'une façon simple, à l'aide d'un petit nombre de remarques destinées surtout à abréger le langage et l'écriture. Par ce procédé, on arrive aisément à une généralisation, concernant l'espace, qui est peut-être nouvelle et qu'en tous cas je n'ai trouvée nulle part. Enfin, on peut établir une série de propositions corrélatives, aussi bien pour le plan que pour l'espace.

2. Considérons un segment AB, limité aux extrémités A et B, et tracé dans un plan qui contient une courbe (Γ) d'ordre n. La droite AB indéfiniment prolongée coupe la courbe en n points $P_1, P_2, \ldots, P_n$, réels ou imaginaires. Supposons-les d'abord tous réels et formons les

rapports

$$\frac{P_1 B}{P_1 A}, \quad \frac{P_2 B}{P_2 A}, \quad \ldots, \quad \frac{P_n B}{P_n A},$$

considérés en grandeurs et en signes.

Le produit de tous ces rapports sera ce que nous appellerons la *puissance du segment* AB *par rapport à la courbe* (Γ). Nous le désignerons par la notation $\mathfrak{P}_\Gamma(AB)$ et nous écrirons ainsi

$$(1) \qquad \mathfrak{P}_\Gamma(AB) = \frac{P_1 B . P_2 B \ldots P_n B}{P_1 A . P_2 A \ldots P_n A}.$$

Par suite de cette définition, il est évident que les quantités $\mathfrak{P}_\Gamma(AB)$ et $\mathfrak{P}_\Gamma(BA)$ sont inverses, puisqu'il suffit de permuter les deux lettres A, B, c'est-à-dire qu'on a

$$(2) \qquad \mathfrak{P}_\Gamma(AB) . \mathfrak{P}_\Gamma(BA) = 1.$$

3. Même lorsque les points d'intersection $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont en partie ou en totalité imaginaires, la puissance $\mathfrak{P}_\Gamma(AB)$ n'en est pas moins réelle.

Pour le démontrer, supposons qu'on ait rapporté la courbe (Γ) à un triangle de référence ABC, C étant un point quelconque, et que son équation, en coordonnées barycentriques, soit

$$(3) \qquad a\alpha^n + b\beta^n + c\gamma^n + \ldots = 0.$$

Pour obtenir les points $P_1, P_2, \ldots$, il faut, dans cette équation, faire $\gamma = 0$, ce qui donne une équation homogène en α et β :

$$(4) \qquad a\alpha^n + \ldots + b\beta^n = 0.$$

Si l'on prend un point P_k quelconque parmi eux, et si ses coordonnées sont α_k, β_k, 0, on aura

$$\frac{P_k B}{AP_k} = \frac{\alpha_k}{\beta_k} \quad \text{ou} \quad \frac{P_k B}{P_k A} = (-1)\frac{\alpha_k}{\beta_k},$$

$\frac{\alpha_k}{\beta_k}$ étant l'une des racines de l'équation

$$(5)\qquad a\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + \ldots + b = 0.$$

Mais le produit de toutes ces racines est $(-1)^n \frac{b}{a}$. Donc la puissance de AB, définie comme nous l'avons fait ci-dessus, est $(-1)^{2n} \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$, c'est-à-dire toujours réelle.

4. Si, reprenant l'équation (3) de la courbe (Γ), nous appliquons successivement au côté BC, puis au côté CA, ce qui vient d'être dit au numéro précédent pour le côté AB, nous aurons évidemment

$$(6)\qquad \mathfrak{P}_\Gamma(\text{AB}) = \frac{b}{a}, \qquad \mathfrak{P}_\Gamma(\text{BC}) = \frac{c}{b}, \qquad \mathfrak{P}_\Gamma(\text{CA}) = \frac{c}{a}$$

et, par multiplication,

$$(7)\qquad \mathfrak{P}_\Gamma(\text{AB})\,\mathfrak{P}_\Gamma(\text{BC})\,\mathfrak{P}_\Gamma(\text{CA}) = 1,$$

ce qui démontre le théorème de Carnot pour le cas d'un triangle.

5. Considérons maintenant un polygone fermé

ABCD...LA,

d'un nombre quelconque de côtés, dans le plan de la courbe (Γ). Prenons un point O arbitraire, dans le plan, et formons les triangles OAB, OBC, ..., OLA. Nous aurons, en vertu de la formule (7), et en supprimant les indices, pour plus de simplicité,

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{P}(\text{OA})\,\mathfrak{P}(\text{AB})\,\mathfrak{P}(\text{BO}) = 1, \\ \mathfrak{P}(\text{OB})\,\mathfrak{P}(\text{BC})\,\mathfrak{P}(\text{CO}) = 1, \\ \dotfill \\ \mathfrak{P}(\text{OL})\,\mathfrak{P}(\text{LA})\,\mathfrak{P}(\text{AO}) = 1. \end{array}\right.$$

Multipliant toutes ces égalités, en tenant compte de la formule (2), il nous reste

$$(9) \qquad \mathfrak{P}(AB)\,\mathfrak{P}(BC)\ldots\mathfrak{P}(LA) = 1,$$

formule qui exprime le théorème de Carnot pour un polygone plan quelconque.

6. Imaginons actuellement une surface algébrique (Σ) d'ordre n, et un segment AB qui, indéfiniment prolongé, coupe la surface (Σ) en n points. Nous définirons comme ci-dessus la puissance du segment par rapport à la surface (Σ), et il suffira, pour l'obtenir, de considérer la section de la surface par un plan quelconque passant par AB et de prendre la puissance de AB par rapport à cette courbe de section.

Si ABC...LA est un polygone gauche fermé quelconque, et si nous prenons un point O arbitraire dans l'espace, les triangles OAB, OBC, ..., OLA détermineront autant de plans qui couperont la surface (Σ) suivant des courbes de même ordre; et nous pourrons conséquemment écrire encore identiquement comme ci-dessus les équations (8), les puissances des segments étant ici prises par rapport à une surface au lieu de l'être par rapport à une courbe plane. Nous en déduirons la formule (9), c'est-à-dire que *le théorème de Carnot s'applique à un polygone fermé gauche et à une surface algébrique quelconque.*

7. Le théorème de Carnot, soit dans le plan, soit dans l'espace, conduit à un nombre considérable d'applications et à des remarques assez curieuses au sujet des conditions déterminantes d'une courbe algébrique, et auxquelles il convient de s'arrêter un instant.

Tout d'abord, si on l'applique à une droite et à un triangle, on a le théorème des transversales, et la proposition réciproque est vraie; c'est-à-dire que, si trois points sur les côtés d'un triangle satisfont à l'identité exprimée par le théorème de Carnot, ces trois points sont en ligne droite. Il en est de même pour six points (deux sur chaque côté d'un triangle). S'ils satisfont à l'identité de Carnot, ils sont situés sur une conique. Cette réciprocité tient à ce que le nombre des points considérés est précisément, dans ces deux cas, supérieur d'une unité à celui des points nécessaires pour la détermination de la ligne, savoir : 2 pour la droite, 5 pour la conique.

Il est intéressant de constater que ce sont même les deux seuls cas où le fait se produise, et où, par conséquent, la réciproque du théorème de Carnot soit vraie. Soit, en effet, une courbe d'ordre n, coupant les côtés d'un polygone de p côtés. Le nombre des points déterminants de la courbe est $\frac{n(n+3)}{2}$; celui des points de section est pn. Il faut donc qu'on ait

$$pn = \frac{n(n+3)}{2} + 1, \qquad p = \frac{n^2+3n+2}{2n}.$$

Comme p doit être entier, le numérateur doit être divisible par n. On ne peut donc avoir que $n = 1$ (droite) ou $n = 2$ (conique). Dans les deux cas, il en résulte $p = 3$ (triangle).

Par contre, le théorème de Carnot nous montre que les points qui déterminent une courbe ne peuvent pas toujours être pris arbitrairement, même lorsqu'ils sont en nombre inférieur à celui des conditions déterminantes. Ainsi une cubique se détermine par neuf points; et cependant, si nous prenons sur les côtés AB, BC, CA d'un triangle deux groupes de trois points P_1, P_2, P_3,

M_1, M_2, M_3, et deux points N_1, N_2, ce qui fait huit points, le troisième point N_3, où la courbe coupe le côté CA, sera complètement déterminé par le théorème de Carnot. Ainsi huit points seulement auront pu être choisis arbitrairement, dans les conditions indiquées.

Autre exemple : une courbe du sixième ordre coupe en dix-huit points les trois côtés d'un triangle. On ne peut donner arbitrairement que dix-sept de ces points, en vertu du théorème de Carnot; et cependant il faut vingt-sept points pour déterminer, en général, une courbe du sixième ordre. On voit combien les conditions géométriques imposées apportent de modifications.

Dans l'espace, il en est encore de même. Comme unique exemple, appliquons la proposition du n° 6 à une surface du second ordre coupant les côtés d'un quadrilatère gauche en huit points; lorsqu'on se sera donné sept de ces points, le huitième sera entièrement déterminé, bien qu'il faille neuf points, en général, pour la détermination de la surface.

Par analogie avec ce qui a été dit plus haut, cherchons les cas dans lesquels la proposition réciproque du théorème de Carnot est applicable dans l'espace. Le nombre des points nécessaires pour la détermination d'une surface du $n^{\text{ième}}$ ordre est

$$N = \frac{n}{6}(n^2 + 6n + 11).$$

Si donc une telle surface rencontre les côtés d'un polygone gauche quelconque de p côtés, ce qui fait pn points d'intersection, nous devrons avoir $pn = N + 1$; en effet, si les pn points donnés satisfont à l'identité de Carnot, comme on peut en prendre arbitrairement $pn - 1 = N$ et qu'ils suffisent à la détermination de la surface, le $(N + 1)^{\text{ième}}$ sera donc aussi sur cette surface.

Or, en résolvant en nombres entiers l'équation indéterminée

$$pn = \frac{n}{6}(n^2 + 6n + 11) + 1,$$

on trouve très facilement qu'elle n'admet que les solutions

$$n = 1, \qquad p = 4,$$
$$n = 2, \qquad p = 5,$$
$$n = 6, \qquad p = 14.$$

Ainsi, dans l'espace, la réciproque du théorème de Carnot s'applique :

1° A un quadrilatère gauche coupant un plan;

2° A un pentagone coupant une surface du second ordre;

3° A un polygone de 14 côtés coupant une surface du sixième ordre.

Pour plus de clarté, nous énoncerons explicitement cette réciproque dans ce dernier cas :

Si l'on donne 6 points sur chaque côté d'un polygone gauche de 14 côtés ABC...L, *et si l'on forme les puissances*

$$\frac{P_1B}{P_1A} \cdots \frac{P_6B}{P_6A} = \alpha_1,$$
$$\frac{Q_1C}{Q_1B} \cdots \frac{Q_6C}{Q_6B} = \alpha_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$\frac{S_1A}{S_1L} \cdots \frac{S_6A}{S_6L} = \alpha_{14}$$

au moyen de ces points; si, en outre, le produit

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{14}$$

est égal à l'unité, les 84 points considérés sont sur une même surface du sixième ordre.

8. Nous limiterons, pour abréger, les applications du théorème de Carnot à un très petit nombre d'exemples. Supposons une courbe plane d'ordre n coupant un triangle en $3n$ points; *si n est impair et égal à $2n'+1$ et si n' groupes de* 6 *points* (2 *par chaque côté*) *sont situés sur n' coniques, les trois points restants seront en ligne droite.*

Si n est pair et égal à $2(n'+1)$ et si n' groupes de 6 *points* (2 *par chaque côté*) *sont situés sur n' coniques, les six points restants sont aussi sur une même conique.*

Ces deux propositions se déduisent immédiatement de l'identité de Carnot, en ayant soin de se rappeler que, pour les coniques et les droites, la réciproque est applicable.

Dans le cas où l'on remplace la courbe par un système de trois droites $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, la première de ces deux propositions nous montre que, si B_1, C_1, C_2, A_2, A_3, B_3 sont situées sur une même conique, les trois points A_1, B_2, C_3 sont en ligne droite. C'est la propriété de l'*hexagone de Pascal,* qui s'obtient ainsi comme un simple corollaire du théorème de Carnot.

On a, en effet,

$$\frac{A_1C}{A_1B}\,\frac{B_1A}{B_1C}\,\frac{C_1B}{C_1A}=1,$$

$$\frac{A_2C}{A_2B}\,\frac{B_2A}{B_2C}\,\frac{C_2B}{C_2A}=1,$$

$$\frac{A_3C}{A_3B}\,\frac{B_3A}{B_3C}\,\frac{C_3B}{C_3A}=1$$

et, en outre,

$$\frac{B_1A}{B_1C}\,\frac{B_3A}{B_3C}\,\frac{C_1B}{C_1A}\,\frac{C_2B}{C_2A}\,\frac{A_2C}{A_2B}\,\frac{A_3C}{A_3B}=1.$$

Multipliant entre elles les trois premières égalités et divisant par la quatrième, il reste

$$\frac{A_1C}{A_1B}\,\frac{B_2A}{B_2C}\,\frac{C_3B}{C_3A} = 1,$$

ce qui montre bien que les trois points A_1, B_2, C_3 sont en ligne droite, en vertu de la proposition réciproque.

PROPOSITIONS CORRÉLATIVES.

9. Considérons un angle ACB dans un plan qui contient une courbe Γ de classe n. Par le sommet C on peut mener à la courbe n tangentes CP_1, CP_2, ..., CP_n, réelles ou imaginaires. Dans le cas où elles sont toutes réelles, formons, pour chacune d'elles, le rapport

$$\frac{\sin(BCP_k)}{\sin(P_kCA)},$$

dans lequel nous tiendrons compte du signe, d'après les conventions habituelles sur les angles. Le produit

$$(1')\quad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{P}_\Gamma(ACB) \\ \quad\text{ou} \\ \mathfrak{P}_\Gamma(\widehat{A,B}) = \dfrac{\sin(BCP_1)}{\sin(P_1CA)}\,\dfrac{\sin(BCP_2)}{\sin(P_2CA)}\cdots\dfrac{\sin(BCP_n)}{\sin(P_nCA)} \end{array}\right.$$

sera appelé *puissance de l'angle* ACB *par rapport à la courbe* Γ.

Par définition même, il est clair qu'on a

$$(2')\qquad \mathfrak{P}_\Gamma(\widehat{A,B})\,\mathfrak{P}_\Gamma(\widehat{B,A}) = 1.$$

Dans ces formules, les lettres A, B peuvent être imaginées comme représentant les côtés mêmes de l'angle ACB.

10. Lorsque les tangentes CP_1, CP_2, ..., CP_n, ou quelques-unes d'entre elles, sont imaginaires, la puis-

sance $\mathfrak{P}_\Gamma(\widehat{A, B})$ n'en reste pas moins réelle. Nous le démontrerons d'une façon tout à fait analogue à celle employée plus haut, en supposant l'équation de la courbe écrite en coordonnées tangentielles sous la forme

$$(3') \qquad au^n + bv^n + cw^n + \ldots = 0,$$

les coordonnées u, v, w d'une droite étant, par exemple, dans le système considéré, proportionnelles aux distances AA′, BB′, CC′ de cette droite aux trois sommets du triangle de référence. Si alors une droite $CP(u, v, 0)$ passe par le point C, on aura

$$\frac{u}{v} = \frac{AC \sin(ACP)}{BC \sin(BCP)} = \frac{q}{p} \frac{\sin(ACP)}{\sin(BCP)}$$

et

$$\frac{\sin(BCP)}{\sin(PCA)} = \frac{q}{p}(-1)\frac{v}{u},$$

p, q, r représentant les longueurs des côtés BC, CA, AB du triangle de référence.

Or, si nous voulons obtenir les tangentes à la courbe (Γ) menées par C, il faut faire $w = 0$ dans l'équation $(3')$ ci-dessus, ce qui donne une relation de la forme

$$(4') \qquad au^n + \ldots + bv^n = 0$$

ou

$$(5') \qquad b\left(\frac{v}{u}\right)^n + \ldots + a = 0.$$

Le produit de toutes les racines de cette équation est $(-1)^n \frac{a}{b}$. Mais, d'après ce que nous venons de voir, ce produit sera aussi

$$(-1)^n \frac{p^n}{q^n} \mathfrak{P}_\Gamma(ACB).$$

Donc $\mathfrak{P}_\Gamma(\text{ACB}) = \frac{q^n}{p^n}\frac{a}{b}$, c'est-à-dire que la puissance considérée est toujours réelle.

11. Si, reprenant l'équation tangentielle (3′) de la courbe Γ, nous appliquons ce qui précède aux trois angles du triangle de référence successivement, nous aurons

$$(6') \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{P}_\Gamma(\text{ACB}) &= \frac{q^n}{p^n}\frac{a}{b}, \\ \mathfrak{P}_\Gamma(\text{BAC}) &= \frac{r^n}{q^n}\frac{b}{c}, \\ \mathfrak{P}_\Gamma(\text{CBA}) &= \frac{p^n}{r^n}\frac{c}{a} \end{aligned} \right.$$

et, par multiplication,

$$(7') \qquad \mathfrak{P}_\Gamma(\text{ACB})\,\mathfrak{P}_\Gamma(\text{BAC})\,\mathfrak{P}_\Gamma(\text{CBA}) = 1.$$

Nous avons ainsi, pour le triangle, la proposition corrélative du théorème de Carnot :

Le produit des puissances des trois angles successifs ACB, BAC, CBA *d'un triangle, par rapport à une courbe plane de classe n, est égal à l'unité.*

12. Si nous prenons maintenant un polygone plan fermé, dont les côtés successifs soient désignés par A, B, C, ..., L, nous étendrons, comme au n° 5, à ce polygone le théorème ci-dessus, en choisissant une droite arbitraire Q, et en considérant les triangles A, B, Q, puis B, C, Q, ..., L, A, Q. Nous aurons ainsi

$$(8') \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathfrak{P}(\widehat{\text{Q, A}})\,\mathfrak{P}(\widehat{\text{A, B}})\,\mathfrak{P}(\widehat{\text{B, Q}}) = 1, \\ &\mathfrak{P}(\widehat{\text{Q, B}})\,\mathfrak{P}(\widehat{\text{B, C}})\,\mathfrak{P}(\widehat{\text{C, Q}}) = 1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ &\mathfrak{P}(\text{Q, L})\,\mathfrak{P}(\widehat{\text{L, A}})\,\mathfrak{P}(\widehat{\text{A, Q}}) = 1, \end{aligned} \right.$$

d'où, par multiplication, et en vertu de la relation (2'),

$$(9') \qquad \varphi(\widehat{A, B})\,\varphi(\widehat{B, C}) \ldots \varphi(\widehat{L, A}) = 1,$$

formule qui démontre la proposition dont il s'agit.

13. Pour essayer d'étendre à l'espace les propositions corrélatives, il est tout d'abord nécessaire d'introduire une nouvelle notion, tout à fait analogue à celle du n° 9 : celle de la *puissance d'un dièdre par rapport à un point, ou en général par rapport à une surface de classe n.*

Un dièdre étant formé par deux plans A, B, et P étant un plan arbitraire conduit par l'arête du dièdre, le rapport $\dfrac{\sin(\widehat{B, P})}{\sin(\widehat{P, B})}$ sera dit *puissance du dièdre par rapport à un point quelconque du plan* P.

Si par l'arête on mène les plans tangents $P_1, P_2, \ldots, P_n$ à la surface (Σ) de classe n, le produit

$$(10) \qquad \frac{\sin(\widehat{B, P_1})}{\sin(\widehat{P_1, A})}\,\frac{\sin(\widehat{B, P_2})}{\sin(\widehat{P_2, A})} \cdots \frac{\sin(\widehat{B, P_n})}{\sin(\widehat{P_n, A})} = \varphi_\Sigma(\widehat{A, B})$$

sera la puissance du même dièdre par rapport à la surface (Σ).

14. Soit CD l'arête du dièdre que nous avons considéré ci-dessus. Prenons deux points quelconques C, D sur cette arête, deux points A, B dans les plans A, B, respectivement, et supposons que, ABCD étant choisi comme tétraèdre de référence, nous adoptions un système de coordonnées tétraédrales tangentielles, où les coordonnées u, v, w, t d'un plan soient proportionnelles aux distances de ce plan aux quatre sommets A, B, C, D, en grandeurs et en signes.

Si nous conduisons un plan $P(u, v, o, o)$ par CD, il est extrêmement facile de voir que nous aurons

$$\frac{u}{v} = \frac{(\mathrm{ACD})}{(\mathrm{BCD})} \frac{\sin(\mathrm{A}, \mathrm{P})}{\sin(\mathrm{B}, \mathrm{P})},$$

(ACD), (BCD) représentant les aires des triangles, ou

$$\frac{\sin(\widehat{\mathrm{B}, \mathrm{P}})}{\sin(\widehat{\mathrm{P}, \mathrm{A}})} = \frac{(\mathrm{ACD})}{(\mathrm{BCD})}(-1)\frac{v}{u}.$$

En prenant l'équation d'une surface (Σ) sous la forme

$$au^n + bv^n + cw^n + dt^n + \ldots = o,$$

un calcul tout à fait analogue à celui du n° 10, et dans lequel nous ferons d'abord $t = o$, $w = o$, puis $t = o$, $u = o$, puis $t = o$, $v = o$, nous permettra, sans qu'il soit besoin d'entrer dans de plus grands détails, de démontrer cette proposition :

Le produit des puissances des trois dièdres DA, DB, DC *d'un trièdre* DABC, *par rapport à la surface* (Σ) *de classe* n, *est égal à l'unité.*

Il est à peine nécessaire de remarquer que les plans ADB, BDC, CDA du dièdre doivent être pris dans leur ordre successif, et que, d'une manière générale,

$$\mathfrak{P}_\Sigma(\widehat{\mathrm{M}, \mathrm{N}})\,\mathfrak{P}_\Sigma(\widehat{\mathrm{N}, \mathrm{M}}) = 1,$$

M, N représentant deux plans quelconques.

15. Soit un polygone gauche fermé, dont les côtés sont A, B, C, ..., L. Un côté quelconque B, par exemple, forme un plan avec le côté C qui le suit, et un autre avec le côté A qui le précède. Si nous prenons un troisième plan arbitraire Q, nous aurons donc un trièdre formé par les trois plans Q, AB, BC; et de même autant de trièdres en tout que le polygone a de côtés. Prenant les puissances des dièdres de ces trièdres par rapport à la surface (Σ) de classe n et appliquant le théorème du numéro précédent, nous aurons

$$\mathfrak{P}(Q, AB)\mathfrak{P}(AB, BC)\mathfrak{P}(BC, Q) = 1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\mathfrak{P}(Q, LA)\mathfrak{P}(LA, AB)\mathfrak{P}(AB, Q) = 1$$

et, par multiplication,

$$\mathfrak{P}(AB, BC)\mathfrak{P}(BC, CD)\dots\mathfrak{P}(LA, AB) = 1,$$

ce qu'on peut écrire plus simplement

$$\mathfrak{P}(B)\mathfrak{P}(C)\dots\mathfrak{P}(A) = 1,$$

étant bien entendu que les dièdres A, B, ... sont ceux formés dans le sens que nous avons défini plus haut. Ainsi :

Le produit des puissances des dièdres déterminés par un polygone gauche fermé, par rapport à une surface algébrique de classe quelconque, est égal à l'unité.

C'est la proposition corrélative du théorème de Carnot étendu à l'espace.

16. Le théorème corrélatif de celui de Carnot, appliqué à un triangle et à un point, donne la proposition de Jean de Ceva, dont la réciproque est vraie. De même pour six droites menées deux par deux par les trois côtés d'un triangle : si elles sont tangentes à une même conique, le produit des trois puissances est égal à 1; si ce produit est égal à 1, les six droites sont tangentes à une même conique.

Les conditions de réciprocité sont les mêmes que celles étudiées au n° 7, c'est-à-dire qu'elles se limitent aux points et aux coniques, par rapport au triangle.

Pour reprendre un exemple analogue à l'un de ceux indiqués plus haut, à une courbe de la sixième classe on peut mener par les trois sommets d'un triangle dix-huit tangentes, dont dix-sept seulement sont arbitraires, bien qu'il faille, en général, vingt-sept tangentes pour déterminer une telle courbe.

Dans l'espace, par les quatre côtés d'un quadrilatère gauche, on pourra mener huit plans tangents à une surface du second degré; et sept seulement de ces plans seront arbitraires.

D'une façon générale, la réciproque du théorème corrélatif s'applique aux plans tangents menés :

1° A un point, par les côtés d'un quadrilatère gauche;

2° A une surface du second degré, par les côtés d'un pentagone;

3° A une surface de la sixième classe, par les côtés d'un polygone de quatorze côtés.

17. Soit une courbe plane de classe n, à laquelle on peut mener $3n$ tangentes par les sommets d'un triangle: si $n = 2n' + 1$ *et si* n' *groupes de six tangentes (deux issues de chaque sommet) sont tangentes à* n' *coniques, les trois tangentes qui restent se couperont en un même point.*

Si $n = 2(n' + 1)$ *et si* n' *groupes de six tangentes (deux issues de chaque sommet) sont tangentes à* n' *coniques, les six tangentes qui restent sont tangentes à une même conique.*

Si nous remplaçons la courbe de classe n par un système de trois points A', B', C', nous arrivons au corollaire que voici :

Si les six droites $A'B$, $A'C$, $B'C$, $B'A$, $C'A$, $C'B$ *sont tangentes à une même conique, les trois droites* AA', BB', CC' *se rencontrent en un même point.*

On reconnaît la propriété de l'*hexagone de Brianchon.*

Il nous suffit de ces indications pour montrer tout le parti qu'il est possible de tirer du théorème de Carnot, et toute l'extension à laquelle se prête cette proposition remarquable.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1591. Soient A, B, C les pieds des trois normales à une parabole menées par un point P de son plan. Par le sommet de la courbe on fait passer trois cercles respectivement tangents à la parabole en A, B, C. Ces cercles coupent la courbe en trois autres points A', B', C'. Démontrer que les normales en A', B', C' à la parabole sont concourantes. (LEMAIRE.)

1592. D'un point M du plan d'une ellipse, on abaisse les quatre normales dont les pieds sont A_1, A_2, A_3, A_4. Chaque normale, telle que A_1M rencontre le grand axe en P_1 et le petit axe en Q_1. Démontrer les relations

$$\frac{MA_1}{A_1P_1} + \frac{MA_2}{A_2P_2} + \frac{MA_3}{A_3P_3} + \frac{MA_4}{A_4P_4} = \text{const.},$$

$$\frac{MA_1}{A_1Q_1} + \frac{MA_2}{A_2Q_2} + \frac{MA_3}{A_3Q_3} + \frac{MA_4}{A_4Q_4} = \text{const.}$$

(E. BARISIEN.)

PRINCIPES GÉNÉRAUX SUR LE CHOIX DES UNITÉS

Extrait du Chapitre XIII des *Leçons sur la théorie mathématique de l'Électricité;*

PAR M. JOSEPH BERTRAND,
de l'Académie française,
Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences (1).

1. Une unité est toujours arbitraire. Ce principe semble rendre la théorie facile en la supprimant ; il en fait, au contraire, toute la difficulté. Le droit de choisir permet d'imposer des conditions qui deviennent obligatoires, mais restent arbitraires ; de là naissent des problèmes toujours faciles et des contradictions qui n'ont d'importance que si l'on oublie leur origine.

Donnons immédiatement quelques exemples.

Prenons pour unité de longueur le chemin parcouru par la lumière pendant l'unité de temps, l'unité de longueur sera proportionnelle à l'unité de temps. On pourra dire et l'on dira, en adoptant une forme de langage très usitée : *une longueur est un temps*.

(1) Nous croyons être agréable et utile à nos lecteurs en leur offrant cet extrait d'un Livre, dont la lecture est si attrayante, que son auteur semble l'avoir écrit d'un trait de plume et comme en se jouant, malgré les difficultés réelles que le sujet comporte et qui se trouvent élucidées avec cet art incomparable dont M. Bertrand possède le secret. Les cinq premiers Chapitres ont trait à l'attraction des sphères, au potentiel, au théorème de Green, aux lignes de force ; ils forment une sorte d'introduction aux huit Chapitres suivants, qui sont consacrés à l'Électricité statique, aux aimants, aux courants, aux actions électromagnétiques et électrodynamiques, à la théorie de l'Induction et aux machines électromagnétiques. Enfin l'Ouvrage se termine par la théorie des Unités, dont la partie générale fait l'objet du présent extrait. E. R.

Prenons, en second lieu, pour unité de longueur l'espace parcouru pendant l'unité de temps par un corps pesant qui tombe verticalement dans le vide sans vitesse initiale. L'unité de longueur sera proportionnelle au carré de l'unité de temps, et l'on dira, en adoptant le même langage : *une longueur est le carré d'un temps.*

Prenons, par un troisième choix, non moins légitime que les deux premiers, pour unité de longueur le grand axe de l'orbite d'une planète tournant autour du Soleil, placé à son foyer, et dont la révolution s'accomplit dans l'unité de temps. D'après la troisième loi de Kepler, le carré du temps de la révolution étant proportionnel au cube du grand axe de l'orbite, on pourra dire, en adoptant toujours le même langage : *une longueur est la puissance* $\frac{2}{3}$ *d'un temps.*

Adoptons enfin pour unité de longueur la longueur d'onde lumineuse correspondant à une raie donnée du spectre. La mesure d'une longueur deviendra un nombre absolu dans lequel rien ne reste arbitraire, l'unité de longueur étant indépendante de l'unité de temps comme de toute autre. On pourra dire alors : *une longueur est un nombre abstrait;* et, comme un angle, rapport de deux longueurs, est aussi mesuré par un nombre abstrait, on pourra dire, en adoptant toujours le même langage : *une longueur est un angle.* Une ligne de 3,14159 ... longueurs d'onde serait mesurée par π et égale à deux angles droits.

Si l'on se demandait, entre ces assertions contradictoires, quelle est la véritable : une longueur est-elle un temps ou le carré d'un temps ? est-il vrai qu'elle soit un angle ? une seule réponse serait à faire : une longueur n'est rien de tout cela, et personne ne peut l'ignorer. Quand on dit, par exemple : une longueur est un temps, cela signifie simplement qu'on a défini les unités de telle sorte qu'une longueur et un temps, ayant même expression numérique, conserveront des mesures égales pour tous les changements d'unité *compatibles avec la convention*. Lorsqu'une longueur est assimilée à un angle, il faut entendre que, l'unité étant définie d'une manière absolue, toute longueur est mesurée par un nombre abstrait que *les conventions faites ne permettent pas de changer*. Ce nombre est la mesure d'un certain angle qu'on acquiert le droit d'assimiler à la longueur; ils peuvent donc se remplacer dans les formules, on s'est enlevé le droit de troubler leur égalité numérique.

Si, pour des raisons qu'il n'est pas nécessaire de chercher, usant du droit donné par le principe qui domine toute la théorie : *les unités sont arbitraires,* on convient de faire varier l'unité de longueur en raison inverse de l'unité de temps, on pourra dire : dans le système d'unités défini par la convention adoptée, *une longueur est l'inverse d'un temps.*

Lorsque, après avoir adopté des conventions relatives aux unités mécaniques ou électriques, nous rencontrerons des conséquences analogues à celles qui viennent d'être indiquées et de forme non moins singulière, il n'y faudra pas attacher plus d'importance et se garder surtout de transformer en une vérité ou de chercher à comprendre une proposition qui, séparée de la convention arbitraire qui l'a fait naître, cesse d'avoir un sens.

2. Les géomètres rattachent à l'unité de longueur l'unité de surface et l'unité de volume. L'unité de surface est le carré de l'unité de longueur et l'unité de volume en est le cube. Une telle dépendance n'est nullement nécessaire. Un volume n'est pas la puissance

troisième d'une longueur. Rien n'empêche d'évaluer les longueurs en mètres et les surfaces en arpents. Les formules de la Géométrie élémentaire, sans cesser d'être parfaites, subiraient un léger changement. La surface du cercle de rayon R ne serait plus exprimée par πR^2, ni celle d'un triangle de base B et de hauteur H par $\frac{BH}{2}$. Il faudrait diviser ces expressions et celles de toutes les surfaces par le nombre des mètres carrés contenus dans un arpent.

L'indépendance des unités présente un inconvénient plus grave que celui de changer les formules auxquelles on est habitué. Il faudrait renoncer à trouver, pour la mesure de chaque surface ou de chaque volume, une formule indépendante du choix des unités laissées indépendantes. Si S représente une surface, a et b deux lignes dont elle dépend, les nombres qui servent de mesures à a et à b étant donnés, celui qui mesure S reste entièrement inconnu; il est impossible de l'exprimer en fonction de a et de b. On pourra démontrer que S est proportionnel au produit ab, qu'il est représenté par une expression de la forme Kab; mais le coefficient K dépendra du choix de l'unité de surface.

Le choix de l'unité d'angle, arbitraire au même titre que les autres, est dirigé par le respect de la même condition.

Un secteur circulaire de rayon R, dont l'angle au centre est ω, a pour mesure, dans le système adopté, $\frac{R^2\omega}{2}$. Cette formule suppose que l'angle pris pour unité est celui sous lequel on voit du centre d'un cercle un arc égal au rayon. Aucune formule ne pourrait être proposée si l'unité d'angle restait indéterminée, ou, pour mieux dire, la formule changerait avec le choix qui n'est pas encore fait. Si l'on prend pour unité d'angle l'angle droit, la surface du secteur dont l'angle est ω, dans un cercle de rayon R, est

$$\frac{\pi R^2 \omega}{4}.$$

Si l'angle pris pour unité est celui d'un degré, la surface du secteur d'angle ω a pour expression

$$\frac{\pi R^2 \omega}{360},$$

l'unité de surface, bien entendu, étant le carré construit sur l'unité de longueur. Si l'on use du droit de laisser les unités arbitraires, il faudra se borner à dire : la surface d'un secteur circulaire d'angle ω, dans un cercle de rayon R, a pour mesure

$$KR^2 \omega,$$

K étant un coefficient numérique à déterminer quand les unités seront choisies.

3. La Mécanique met en présence des longueurs, des temps, des vitesses, des forces et des masses. Pour chacune de ces grandeurs, l'unité est arbitraire. Aucune dépendance n'est nécessaire. Comme en Géométrie, cependant, et pour la même raison, il est permis et utile d'en introduire une.

Si l'on veut, en écrivant les formules de la Dynamique, ne rien supposer sur les unités, il faut pour chacune d'elles, comme dans l'expression d'une surface ou d'un volume, introduire un coefficient numérique, à déterminer ultérieurement, quand on aura choisi les unités, et à changer chaque fois qu'on voudra faire un choix nouveau.

Lorsqu'une force F agit pendant un temps T sur une masse M partant du repos, l'espace L qu'elle lui fait parcourir est représenté par

$$L = \frac{FT^2}{2M}. \tag{1}$$

Dans la démonstration de cette formule, une convention a été faite. Si, en effet, l'unité de longueur restait arbitraire lorsque les unités de temps, de force et de masse ont été choisies, le premier membre de la formule (1) pourrait recevoir telle valeur numérique que l'on voudrait, lorsque le second serait déjà complètement défini. Toute équation entre L, F, M et T serait impossible.

On a admis en effet, dans la démonstration de la formule (1), que l'unité de force, appliquée à l'unité de masse pendant l'unité de temps, lui fait acquérir l'unité de vitesse, c'est-à-dire la vitesse d'un point qui, dans l'unité de temps, parcourt l'unité de longueur. Cette condition laisse trois unités arbitraires : celles de longueur, de temps et de masse, par exemple, et permet, quand elles sont choisies, d'en déduire les deux autres.

Si l'on multiplie chacune des unités par un facteur numérique :

L'unité de longueur par α;
L'unité de temps par β;
L'unité de masse par γ;
L'unité de force par δ;
L'unité de vitesse par ε,

les multiplicateurs devront satisfaire, c'est la traduction facile des conventions, aux deux équations

$$\delta = \frac{\gamma\alpha}{\beta^2}, \qquad \varepsilon = \frac{\alpha}{\beta}. \tag{2}$$

La première de ces équations est nécessaire et suffisante pour qu'une relation de la forme (1) puisse avoir lieu, indépendamment du choix des trois unités non définies. Le coefficient numérique $\frac{1}{2}$ pourrait seul être changé sans introduire de contradiction.

4. Les conventions adoptées rendent possible la mise en équation des problèmes de Mécanique, sans qu'aucun coefficient doive varier avec le choix des unités. Est-ce à dire que ces conventions soient nécessaires et que sans elles la Science deviendrait impossible? Il n'en est nullement ainsi : la Méeanique pourrait s'enseigner très correctement sans aucune hypothèse relative aux unités; aucune dépendance n'existe entre elles. Si l'on refuse d'en établir, il en résultera, comme pour la Géométrie quand l'unité de surface reste indépendante de l'unité de longueur, la nécessité d'introduire des facteurs numériques variables avec le choix des unités, et très faciles à déterminer dans chaque cas. La formule (1), par exemple, serait remplacée par

$$L = K \frac{F}{M} T^2,$$

K étant un coefficient numérique. Si, par exemple, l'unité de masse étant celle dont le poids est 9^{gr}, on prend pour unité de longueur le kilomètre, pour unité de temps la minute et pour unité de force le kilogramme, il faudrait remplacer la formule (1) par

$$L = 1800 \frac{FT^2}{M}.$$

5. La possibilité de mettre en équation tous les problèmes de la Mécanique et, par conséquent, de les résoudre en laissant trois unités arbitraires, sans qu'aucun coefficient variable avec le choix de ces unités s'intro-

duise dans les formules, impose aux équations un caractère nécessaire que l'on peut appeler l'*homogénéité* en Mécanique. Supposons que la solution d'un problème, qu'il est inutile de définir, ait donné une relation entre une force F, une longueur L, un temps T et une masse M. Cette relation, étant mise sous la forme

$$(3) \qquad L = \varphi(F, M, T),$$

devra rester la même si les unités sont multipliées par les facteurs α, β, γ, δ, liés par la première des relations (2); la fonction φ sera telle, par conséquent, que

$$(4) \qquad \alpha L = \varphi\left(\frac{\gamma\alpha}{\beta^2} F, \gamma M, \beta T\right).$$

Cette équation, ayant lieu quels que soient α, β, γ, détermine la forme de la fonction. Le premier membre étant proportionnel à α, le second doit l'être aussi, et, comme α ne figure que dans $\frac{\gamma\alpha}{\beta^2}F$, il faut que φ soit proportionnel à F; on aura donc

$$(5) \qquad L = \frac{\gamma}{\beta^2} F \varphi_1(\gamma M, \beta T).$$

Le premier membre de (5) étant indépendant de γ et de β, le second doit l'être aussi, et φ_1, pour cela, doit être inversement proportionnel à γM et proportionnel à $\beta^2 T^2$; on doit donc avoir enfin

$$(6) \qquad L = K\frac{F}{M}T^2,$$

K désignant une constante numérique.

6. Le temps T de l'oscillation d'un pendule, pour un angle donné d'écartement, dépend de la longueur L du fil, de la masse M qui oscille et du poids de cette

masse qui est une force F. L'équation qui lie ces grandeurs étant nécessairement de la forme (6), on aura, en la résolvant par rapport à T et désignant par G un coefficient numérique égal à $\frac{1}{\sqrt{K}}$,

$$(7) \qquad T = G\sqrt{L\left(\frac{M}{F}\right)}.$$

Si l'on nomme g le poids de l'unité de masse, on obtient la formule connue

$$T = G\sqrt{\frac{L}{g}},$$

G étant un coefficient numérique déterminé pour chaque valeur de l'angle d'écartement θ, c'est-à-dire une fonction inconnue de θ.

7. Le temps de l'oscillation d'une corde vibrante dépend de sa longueur L, de sa masse M et du poids F qui la tend. Si nous admettons ce théorème comme une vérité expérimentale, la formule, devant être de la forme (6), sera

$$(8) \qquad T = G\sqrt{\frac{ML}{F}}.$$

Si ρ désigne la densité et r le rayon de la section de la corde, on a

$$M = \pi r^2 L\rho,$$

et la formule (8) devient

$$(9) \qquad T = G\sqrt{\pi}\, L r\sqrt{\frac{\rho}{F}},$$

qui exprime la loi du temps de vibration d'une corde, en ne laissant à la théorie que le coefficient numérique G à déterminer.

8. La vitesse de propagation du son dans un gaz dépend de l'élasticité et de la densité du gaz. En admettant qu'il en soit ainsi, les mêmes principes peuvent déterminer la forme de la relation.

Définissons la vitesse de propagation v par le temps T nécessaire pour parcourir une distance L. L'élasticité E de l'air peut être définie par la pression F exercée par le gaz sur la surface L^2; on aura $F = EL^2$, et il est permis de choisir cette surface ainsi que la distance à parcourir, évidemment arbitraires toutes deux, de manière à n'introduire qu'une seule longueur L. La densité D est le rapport de la masse au volume. Soit M la masse de volume L^3, L désignant toujours la même longueur; on aura

$$D = \frac{M}{L^3}.$$

La formule qui exprime la vitesse du son ayant lieu entre une longueur, une force et une masse, elle est nécessairement de la forme (6), et l'on peut écrire

$$(10) \qquad F = K\frac{ML}{T^2}.$$

En remplaçant la force F par EL^2, la masse M par DL^3, on aura

$$(11) \qquad EL^2 = K\frac{DL^4}{T^2}$$

ou

$$T = L\sqrt{K\frac{D}{E}}.$$

Le temps T est donc proportionnel à la distance L; le mouvement est *nécessairement* uniforme, et l'on a, en nommant v la vitesse, égale à $\frac{L}{T}$,

$$v = \sqrt{\frac{E}{D}\frac{1}{K}},$$

K étant un coefficient numérique.

Il est évident que, si la vitesse dépend d'autres données, du rapport des deux caloriques spécifiques par exemple, la démonstration n'est plus valable.

9. Les formules de la Mécanique peuvent être démontrées et tous les problèmes résolus en laissant trois unités arbitraires. Le droit de les laisser arbitraires implique celui d'établir entre elles telle relation qu'on voudra choisir, et l'on peut profiter de cette liberté pour simplifier certaines formules sans perdre l'avantage d'employer les équations ordinaires de la Science.

On démontre, en étudiant la théorie des mouvements planétaires, qu'un point matériel parcourant, dans un temps T, la circonférence d'une ellipse dont le grand axe est $2a$, si la force qui le sollicite est dirigée vers le foyer, cette force, rapportée à l'unité de masse, a pour expression, à la distance r du foyer, $\frac{\mu}{r^2}$, et l'on a

$$\mu = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}.$$

La loi de la gravitation universelle est déduite de ces théorèmes. En désignant par F l'attraction mutuelle de deux masses m et m' concentrées en deux points dont la distance est r, cette loi est exprimée par l'équation

$$F = f\frac{mm'}{r^2};$$

f est un coefficient numérique qui dépend du choix des unités.

La présence d'un tel coefficient dans une formule générale ne doit pas plus surprendre que celle de la gravité g dans l'expression de la durée de l'oscillation du pendule; g, de même que f, dépend du choix des unités et s'introduit dans les formules parce qu'elles sont relatives à un système particulier dont les éléments n'ont rien d'arbitraire.

Pour faire disparaître ce coefficient f, il suffit de choisir les unités de manière à le réduire à l'unité. Cela peut se faire d'une infinité de manières. On prendra pour unité de masse celle qui, agissant sur une masse égale à la sienne, à une distance égale à l'unité, exerce une attraction égale à l'unité de force. Cette condition, arbitrairement imposée, réduit à deux le nombre des unités qui restent arbitraires; mais on fait usage, en l'acceptant, d'un droit qui n'est pas contestable.

La formule

$$(12) \qquad \mathrm{F} = \frac{mm'}{r^2}$$

étant imposée, il ne reste que deux unités arbitraires. Il faut supposer entre les coefficients α, β, γ, δ, définis au n° 3, la relation nouvelle

$$(13) \qquad \delta = \frac{\gamma^2}{\alpha^2}.$$

Sans cette convention, en effet, les deux membres de (12) seraient multipliés par des facteurs différents et cesseraient d'être égaux si l'on changeait les unités adoptées.

L'équation (13) équivaut, en vertu de la relation (12) qui subsiste, à

$$(14) \qquad \gamma = \frac{\alpha^3}{\beta^3}.$$

L'attraction du Soleil sur l'unité de masse d'une planète étant représentée par $\frac{\mu}{r^2}$, on a

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

Il résulte d'ailleurs de la convention adoptée que μ doit représenter la masse du Soleil. Le rapport $\frac{\mu}{a^3}$, rapport d'une masse à un volume, représente donc une densité, et par conséquent, dans le système d'unités adoptées, la densité d'un corps est l'inverse du carré d'un temps. Un angle étant un nombre abstrait, on peut dire qu'une densité est le carré d'une vitesse angulaire.

Cherchons dans ces hypothèses la densité du Soleil.

Le demi-grand axe de l'orbite terrestre est égal à 222 fois le rayon R du Soleil. Si donc on nomme D la densité cherchée, on aura

$$D = \frac{\mu}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2 \frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3\pi}{T^2}\left(\frac{a}{R}\right)^3.$$

En remplaçant $\frac{a}{R}$ par 222, le temps T de la révolution, évalué en secondes, surpasse 31 000 000, et la densité D du Soleil, en prenant la seconde pour unité de temps, est inférieure à $\frac{1}{10^7}$.

10. Lorsque, comme on a été conduit à le faire en Géométrie et en Mécanique et comme nous le ferons dans la théorie de l'Électricité, on établit une dépendance entre les unités, il importe d'indiquer par une notation convenue comment varient les unités dérivées quand on change les unités fondamentales.

Si, par exemple, on prend pour unité de surface le carré de l'unité de longueur, la première de ces unités variant proportionnellement au carré de la seconde, on écrira, pour exprimer cette dépendance,

$$[S] = [L^2].$$

On écrira, de même, en désignant les volumes par la lettre V,

$$[V] = [L^3];$$

ces notations n'ont pas, je crois, besoin d'explications.

En nommant v les vitesses, on écrirait, en adoptant les mêmes conventions,

$$[v] = \left[\frac{L}{T}\right].$$

En désignant les forces par la lettre F, les masses par M, les longueurs par L et les temps par T, on écrirait, pour représenter la relation (2) entre les unités adoptées pour ces diverses grandeurs,

$$(15) \qquad [F] = \left[\frac{ML}{T^2}\right].$$

Il ne s'agit pas, on le comprend, d'une égalité numérique entre les deux membres de l'équation dans lesquels ne figure aucune grandeur déterminée, mais de l'indication des variations simultanées que subiront les unités désignées par les lettres initiales des grandeurs correspondantes.

11. La convention faite (8) s'exprimera, d'après la notation que nous venons d'indiquer, par

$$(16) \qquad [M] = \left[\frac{L^3}{T^2}\right].$$

L'unité de longueur et l'unité de temps restent arbitraires; l'unité de masse sera déterminée quand on les aura choisies, et l'équation (15) donnera, les deux hypothèses étant associées,

$$(17) \qquad [F] = \left[\frac{L^4}{T^4}\right].$$

Une force, dans ce système, est la quatrième puissance d'une vitesse; si une force et la quatrième puissance d'une vitesse ont la même mesure numérique, l'égalité subsistera, quelque choix d'unités que l'on fasse, pourvu que les conditions, arbitrairement prescrites, il ne faut jamais l'oublier, soient respectées.

AUTRE SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL EN 1889 [1];

Par M. PAPELIER.

Je prends deux axes rectangulaires passant par le point O, dont l'un Ox est parallèle à l'axe de la parabole P. L'équation tangentielle du cercle est

$$R^2(u^2+v^2)-w^2=0.$$

[1] Voir 3e série, t. VIII, p. 288, 298, 331. Nous rappelons brièvement l'énoncé :

On donne une parabole P et un cercle dont on désigne le centre par O; soit C l'une quelconque des coniques inscrites dans le quadrilatère formé par les tangentes communes au cercle et à la parabole. On demande : 1° l'enveloppe des polaires A du point O par rapport aux coniques C; 2° l'enveloppe des tangentes δ aux coniques C telles que la normale au point de contact passe par O; 3° l'enveloppe des axes des coniques C; 4° les lieux des projections de O sur les polaires A, les tangentes δ et les axes de C.

Quant à celle de la parabole P, nous observerons que l'équation tangentielle

$$au^2 + 2buv + cv^2 + 2duw + 2evw + fw^2 = 0$$

représente une parabole dans le cas où $f = 0$; les paramètres directeurs de l'axe sont d et e; comme l'axe est parallèle à Ox, e est nul et l'équation de la parabole P s'écrit

$$au^2 + 2buv + cv^2 + 2duw = 0.$$

L'équation générale des coniques C sera alors

$$f(uvw) = \lambda[R^2(u^2+v^2) - w^2] + au^2 + 2buv + cv^2 + 2duw = 0.$$

1° Soient u, v, w les coordonnées de la polaire A du point O, par rapport à l'une des coniques C. L'équation du pôle est

$$Uf'_u + Vf'_v + Wf'_w = 0,$$

et, pour que ce pôle soit l'origine, il faut que l'on ait

$$\tfrac{1}{2}f'_u = \lambda R^2 u + au + bv + dw = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}f'_v = \lambda R^2 v + bu + cv = 0.$$

L'élimination de λ donne, pour l'équation tangentielle de l'enveloppe des droites A,

(1) $$\tfrac{1}{2}(uf'_v - vf'_u) = bu^2 + (c-a)uv - bv^2 - dvw = 0.$$

On voit immédiatement que cette enveloppe est une parabole : nous l'étudierons tout à l'heure.

2° Soient u, v, w les coordonnées d'une tangente T. On aura

(2) $$f(u, v, w) = 0.$$

Le point de contact a pour équation

$$\mathrm{U}f'_u + \mathrm{V}f'_v + \mathrm{W}f'_w = 0.$$

La droite qui le joint à l'origine a pour coefficient angulaire $\frac{f'_v}{f'_u}$; pour qu'elle soit perpendiculaire à T, il faut que

$$(3) \qquad \frac{f'_v}{f'_u} = \frac{v}{u}.$$

Éliminant λ entre (2) et (3), nous aurons l'enveloppe des droites T. Cette élimination est toute faite, puisque l'équation (3) ne renferme pas λ. L'équation (3) est donc l'équation de l'enveloppe des droites T. Or cette équation est la même que l'équation (1). Il en résulte que les droites A et T ont pour enveloppe la même parabole (1).

Nous n'avons pas utilisé la condition (1), qui exprimait que la droite T était tangente à la conique C. Il résulte de là que l'équation (1) est l'équation de l'enveloppe des droites Δ qui sont perpendiculaires à la droite joignant le point O à leur pôle.

3° Les axes des coniques C sont perpendiculaires aux droites joignant le point O à leurs pôles; elles jouissent donc des propriétés des droites Δ et, par suite, sont tangentes à la parabole (1).

En conséquence, les trois séries de droites considérées ont la même enveloppe : c'est la parabole

$$b(u^2 - v^2) + (c - a)uv - dvw = 0,$$

qui a son axe parallèle à Oy. Les tangentes issues du point O à cette parabole satisfont à

$$b(u^2 - v^2) + (c - a)uv = 0;$$

elles sont rectangulaires. Donc le point O appartient à la directrice; par suite, la directrice de cette parabole est la droite Ox. Enfin on vérifiera sans peine que le foyer de cette parabole se trouve sur la droite qui joint le point O au foyer F de la parabole P à une distance du point F égale à OF. Il suffit d'observer que les coordonnées du foyer de la parabole

$$au^2 + 2buv + cv^2 + 2duw + bevw = 0$$

sont déterminées par

$$\begin{gathered} ex + dy - b = 0, \\ 2dx - 2ey - a + c = 0, \end{gathered}$$

et de vérifier que les coordonnées du foyer de la parabole (1) sont les doubles de celles du foyer de P. La parabole (1) est donc bien déterminée géométriquement.

Remarque. — Il est aisé d'obtenir géométriquement les résultats qui précèdent.

Observons d'abord qu'étant donnés un point O et une conique C, l'enveloppe des droites Δ perpendiculaires aux droites qui joignent le point O à leur pôle est une parabole. Soit H le pôle de Δ.

Le pôle K de OH se trouve sur Δ et aussi sur la polaire A du point O, en sorte qu'on peut encore définir la droite Δ comme menée par un point de la droite A perpendiculairement à sa polaire. Nous voyons aussi que la droite A est tangente à l'enveloppe cherchée, il suffit de prendre sur A le pôle de la droite passant par O et perpendiculaire à A. En conséquence, par un point quelconque I de A passent deux tangentes à l'enveloppe, la droite A d'une part et la perpendiculaire abaissée du point I sur sa polaire d'autre part; l'enveloppe est donc une conique. Cette conique est une parabole; car, si le point I s'éloigne indéfiniment sur A, la perpendiculaire menée de ce point sur sa polaire est rejetée à l'infini.

Cette parabole est tangente aux deux axes de la conique C, ils correspondent aux points de A situés sur ces axes. Nous appellerons Q cette parabole.

Il nous faut établir que cette parabole est invariable de forme et de position, si la conique C se déplace en demeurant tangente à quatre droites tangentes à un cercle de centre O, c'est-à-dire équidistantes du point O. Il est, en effet, inutile d'introduire la parabole P, puisqu'il existe une parabole et une seule tangente à quatre droites.

On reconnaît sans peine que les tangentes issues du point O à la parabole Q sont les bissectrices des tangentes issues de O à la conique C; le point O est donc sur la directrice, le point ω, centre de la conique C, également; donc, la directrice est la droite $O\omega$. Or, quand la conique C reste tangente à ces droites, son centre décrit une droite qui passe par le point O. La droite $O\omega$ est donc la même pour toutes les coniques C.

Les tangentes issues du point O à toutes les coniques C forment deux faisceaux en involution ; elles divisent harmoniquement les rayons doubles; or, parmi ces couples de tangentes se trouvent les droites isotropes tangentes issues du point O au cercle. Les rayons doubles sont alors rectangulaires et, par suite, bissectrices de tous les couples de tangentes. Par suite, les tangentes issues du point O à la parabole Q restent les mêmes quand la conique C varie.

Enfin, cherchons à déterminer la tangente au sommet de la parabole Q : il faut mener une tangente parallèle à $O\omega$. Par le point D, je mène OL perpendiculaire à $O\omega$, et du pôle N de OL, j'abaisse NR perpendiculaire sur OL; NR est la tangente au sommet. Quand la conique C varie, le pôle N de la droite fixe OL décrit une droite qui est perpendiculaire à OL, puisqu'elle passe par le pôle de OL relativement au cercle de centre O. Cette droite est la droite NR. Cette droite est donc la même pour toutes les coniques C.

En conséquence, quand la conique C varie, la directrice, la tangente au sommet, les deux tangentes issues du point O restent les mêmes dans la parabole Q. Cette parabole reste donc toujours la même.

Elle est indépendante du rayon du cercle. Considérons la parabole P qui est tangente aux quatre droites, et étudions la parabole Q considérée comme enveloppe des droites Δ dans la parabole P. La directrice de Q sera la droite Ox parallèle à l'axe de P; sa tangente au sommet sera l'axe de P. Soit F le foyer de P. La bissectrice de l'angle FOx est aussi bissectrice des tangentes menées de O à P; cette bissectrice qui coupe l'axe de P en U est donc tangente à Q; par suite, le foyer F′ de Q se trouvera à l'intersection de OF et de la perpendiculaire UF′ à OU. On voit sans peine que

$$FF' = FU = OF,$$

et nous retombons sur les résultats trouvés analytiquement.

4° Tout revient à trouver la podaire du point O par rapport à la parabole Q. Comme le point O est sur la directrice, cette podaire est une strophoïde dont l'équation s'obtient en remplaçant dans l'équation tangentielle de Q, u, v, w respectivement par x, y, $-(x^2-y^2)$; on a

$$b(x^2-y^2)+(c-a)xy+dy(x^2+y^2)=0.$$

REMARQUES GÉOMÉTRIQUES SUR LA MÊME QUESTION [1];

PAR M. G. LEINEKUGEL.

Il était évident *a priori* que la parabole (H) était indépendante du rayon du cercle (O). Cette parabole (H) admet, en effet, comme directrice le diamètre de (P) qui passe en O; elle est de plus tangente à la polaire A de O par rapport à (P), ainsi qu'aux bissectrices des deux tangentes menées de O à (P). Cette dernière propriété de (H) résulte de ce que les polaires A de O déterminent sur ces deux droites deux divisions homographiques en involution, et d'après une propriété connue :

La droite qui joint les points homologues de deux divisions homographiques enveloppe une conique tangente aux deux droites sur lesquelles sont tracées les deux divisions (CHASLES, *Traité des sections coniques*).

De même l'hyperbole équilatère (h) des neuf points d'un quadrilatère inscrit à la fois dans un cercle (O) et dans une conique (p) fixe ne change pas quand, le centre du cercle restant fixe, son rayon varie. En effet, elle admet comme tangente au centre du cercle la perpendiculaire au diamètre de (p) qui passe en ce point; elle passe par le centre de (p) et admet comme directions asymptotiques des parallèles aux axes de (p).

---

[1] Voir 3e série, Tome VIII, p. 298.

De là il résulte immédiatement les propriétés suivantes :

THÉORÈME VIII. — *L'enveloppe des polaires d'un point O par rapport aux coniques inscrites dans les quadrilatères circonscrits à une conique (P) et aux cercles (O) de centre fixe et de rayons variables est une parabole* (H).

THÉORÈME IX. — *Les quadrilatères circonscrits à la conique* (P) *et aux cercles* (O) *déterminent par leurs points de contact avec ces cercles des quadrilatères dont les centres de gravité se déplacent sur la perpendiculaire menée de O au diamètre de* (P) *qui passe en ce point.*

THÉORÈME X. — *Les quadrilatères inscrits dans une conique fixe et dans une série de cercles concentriques ont même centre de gravité.*

THÉORÈME XI. — *Les sommets des quadrilatères circonscrits à une conique* (P) *et à des cercles* (O) *concentriques décrivent une strophoïde oblique* (T).

THÉORÈME XII. — *Les foyers de toutes les coniques inscrites dans les quadrilatères circonscrits à* (P) *et aux cercles* (O) *sont situés sur cette strophoïde* (T).

Ces deux derniers théorèmes se déduisent de ce que la strophoïde oblique trouvée dans la dernière partie de la question du concours passe par les six sommets du quadrilatère circonscrit à (O) et à (P) et qu'elle est la podaire de O par rapport à la conique (P), qui reste fixe quand le rayon de (O) varie.

THÉORÈME XIII. — *Les côtés des triangles autopolaires communs à une conique* (P) *et à des cercles* (O) *concentriques enveloppent une conique* (H), *et leurs sommets décrivent également une conique* (h).

Comme une série de cercles concentriques et de rayons variables sont des coniques bitangentes à l'infini aux deux ombilics du plan, une transformation par projection conique des théorèmes précédents conduit aux suivants qui sont plus généraux :

Théorème XIV. — *L'enveloppe des polaires d'un point quelconque* ω *par rapport aux coniques inscrites dans les quadrilatères circonscrits à une conique fixe* (P) *et aux coniques* (Ω) *bitangentes à une conique* (Ω_1) *aux points de contact des tangentes menées de* ω *à la conique* (Ω_1), *est une conique* (Σ).

Théorème corrélatif. — *Les pôles d'une droite quelconque par rapport aux coniques circonscrites aux quadrilatères inscrits dans une conique fixe* (P) *et dans des coniques* (Ω) *bitangentes à une conique* (Ω_1) *fixe aux points où la droite la rencontre, est une conique* (σ).

En particulier, les côtés des triangles autopolaires communs à la conique (P) et aux coniques (Ω) enveloppent la conique (Σ), et leurs sommets décrivent la conique (σ).

Théorème XV. — *Les sommets des quadrilatères circonscrits à une conique* (P) *et aux coniques* (Ω) *bitangentes à une conique* (Ω_1) *en deux points fixes décrivent une cubique.*

Théorème XVI. — *Étant donnés un quadrilatère circonscrit à une conique* (Ω), *on joint les points conjugués harmoniques des points de rencontre* α, β, γ *de la polaire* L *d'un point* ω *du plan a avec les diago-*

nales, par rapport aux segments déterminés par cette conique sur les diagonales de ce quadrilatère au point ω; *et par les conjugués harmoniques des mêmes points par rapport aux diagonales on mène des droites rencontrant la droite* L *aux points où les trois droites issues de* ω *la rencontrent.*

Par les sommets du triangle ainsi obtenu, on mène des droites rencontrant L *aux points où les droites qui joignent le point* ω *arbitrairement choisi aux points conjugués harmoniques des points d'intersection de* L *avec les côtés du nouveau triangle rencontrent* L; *on obtient ainsi trois droites concourantes sur la droite conjuguée de la polaire du point* ω *par rapport à la conique* (Ω).

Ce théorème résulte du théorème II, en remarquant que, par suite de la transformation par projection conique, le centre du cercle se projette en un point quelconque ω du plan. Les perpendiculaires aux milieux des diagonales donnent dans la projection des droites menées par les points α', β', γ' (conjuguées harmoniques des points α, β, γ de rencontre de la polaire L de $\bar{\omega}$ avec les diagonales, par rapport à ces diagonales) et rencontrant la droite L aux points où les droites qui joignent le point ω aux points α'', β'', γ'' [conjugués harmoniques des points α, β, γ par rapport aux segments déterminés par (Ω) sur les diagonales] la rencontrent.

Quant à la droite de Newton qui, dans le théorème II, est par rapport au cercle la droite conjuguée de la droite de l'infini, il lui correspondra la droite conjuguée de la polaire L de ω par rapport à (Ω).

Théorème XVII. — *Le diamètre conjugué de la droite de Newton d'un quadrilatère circonscrit à une* *conique passe par le centre de gravité du quadrilatère qui a pour sommets les points de contact du premier.*

Théorème XVIII. — *Les quadrilatères inscrits dans une conique* (P) *et dans des coniques bitangentes à une conique fixe aux points où une droite* Δ *la rencontre ont tous même centre de gravité* G_Δ *harmoniquement associé à la droite* Δ.

Voici comment nous définissons le centre de gravité G_Δ harmoniquement associé à une droite Δ dans un quadrilatère ABCD quelconque.

Soient

$$a,\quad a';\quad b,\quad b' \quad \text{et} \quad c,\quad c'$$

les couples de points où Δ rencontre les côtés opposés et les diagonales intérieures.

Si l'on prend par rapport à ces mêmes côtés et ces diagonales les conjugués harmoniques de ces points, on obtient les trois couples suivants

$$a_1,\quad a'_1;\quad b_1\quad b'_1 \quad \text{et} \quad c_1,\quad c'_1;$$

les droites a_1, a'_1, b_1, b'_1, c_1, c'_1 sont concourantes en un point G_Δ intimement lié à la droite Δ. Il devient le centre de gravité du quadrilatère quand la droite Δ passe à l'infini, de sorte que nous en déduisons :

Les quadrilatères inscrits dans une conique P *et dans des coniques homothétiques et concentriques ont tous même centre de gravité.*

Théorème XIX. — *Étant donnés un quadrilatère circonscrit à une conique* (Σ) *et une droite* Δ, *il existe une conique* (Σ_1) *passant par les quatre sommets du quadrilatère formé en joignant les sommets du premier aux points où leurs polaires respectives rencontrent* Δ *et par les points de rencontre de* Δ *et de* (Σ).

Si l'on considère cette conique (Σ_1) *et les deux coniques* (Σ_2), (Σ_3) *qui passent par ces deux mêmes points et qui sont l'une circonscrite au triangle formé par les trois diagonales, l'autre au triangle formé en joignant les points conjugués harmoniques, par rapport aux diagonales, des points de rencontre* (α, β, γ) *de* Δ *avec ces droites aux points d'intersection des droites qui joignent le pôle de* Δ, *par rapport à* (Σ), *aux conjugués harmoniques des points* α, β, γ, *par rapport aux segments déterminés par* (Σ) *sur ces diagonales, avec la droite* Δ, *on obtient trois coniques* (Σ_1), (Σ_2), (Σ_3) *se coupant en un même point.*

NOTE DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE;

PAR M. H.-P. DU MOTEL,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Nous nous proposons de résoudre, à l'aide de la règle et du compas, la question suivante :

Mener un plan tangent à l'hyperboloïde réglé par une droite donnée (ou construire une droite s'appuyant sur quatre autres).

Nous savons qu'il suffit de déterminer les points de rencontre de la droite avec l'hyperboloïde.

Nous supposons l'hyperboloïde défini par trois génératrices de même système.

Commençons par rendre une de ces génératrices verticale par des changements de plan. Puis, dans ce système, déterminons les génératrices qui ont leur projection horizontale parallèle à celle de la droite donnée.

Pour plus de netteté dans l'épure et dans le langage, nous traçons en traits pleins les génératrices d'un système, en traits mixtes celles de l'autre. Nous désignons deux génératrices parallèles par la même lettre, sans indice pour la génératrice trait plein, avec l'indice 1 pour la génératrice trait mixte.

Soient alors :

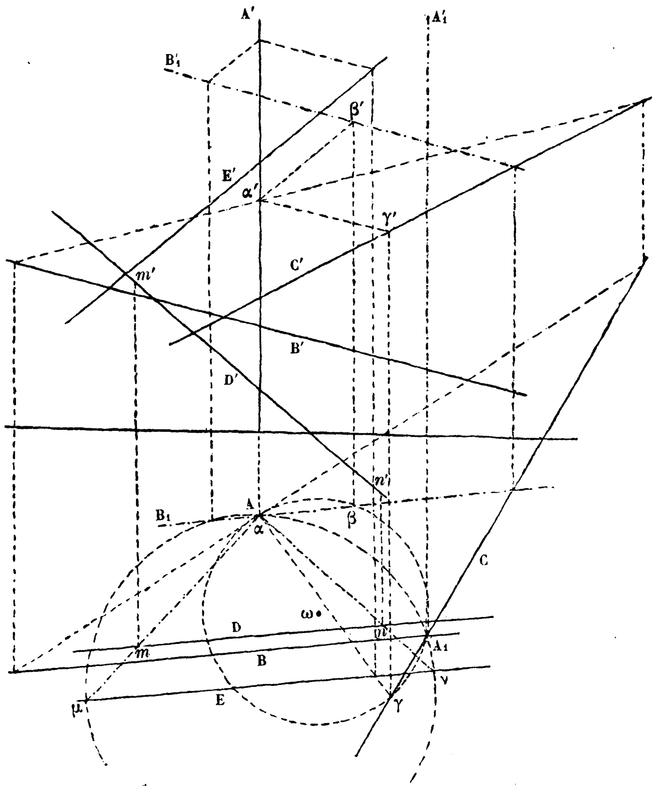
DD' la droite donnée ;
AA' et $A_1 A'_1$ les génératrices verticales de l'hyperboloïde; BB' et $B_1 B'_1$ les génératrices dont la projection horizontale est parallèle à D ;
CC' une autre génératrice.

Par la droite DD' menons une quadrique, dont la définition sera complétée par les génératrices AA' et BB'. Les trois génératrices choisies étant parallèles à un même plan, cette surface auxiliaire sera un paraboloïde. Il a en commun avec l'hyperboloïde deux genératrices de même système AA' et BB'; il le coupe donc en outre suivant deux génératrices de l'autre système, dont les points de rencontre avec DD' sont les points cherchés. Pour trouver ces deux génératrices, nous chercherons leur point de rencontre avec une autre génératrice trait plein EE' du paraboloïde, convenablement choisie : ce qui revient à remplacer DD' par EE' dans le problème.

Nous choisirons EE' de la manière suivante :

Soit un cylindre vertical ayant pour base dans le plan horizontal un cercle quelconque ω passant par A et A_1. Il coupe l'hyperboloïde suivant ses deux génératrices verticales et une seconde courbe plane Σ projetée horizontalement suivant le cercle considéré, et dont le plan $\alpha\beta\gamma\alpha'\beta'\gamma'$ est facile à déterminer. Or ce plan coupe le plan vertical B_1 suivant une droite $\alpha\beta\alpha'\beta'$ et il existe sur notre paraboloïde auxiliaire une génératrice trait plein parallèle à cette droite. C'est cette génératrice, facile à construire, que nous prenons pour EE'.

Alors, pour trouver les rencontres de EE' avec l'hyperboloïde, nous menons par cette droite un plan auxi-



liaire parallèle au plan $\alpha\beta\gamma\,\alpha'\beta'\gamma'$. Il coupe la surface suivant une conique homothétique de Σ, et dont, par suite, la projection horizontale est aussi un cercle. Du reste, ce cercle passe par le point A et A_1. Il suffit donc d'en déterminer un troisième point, et pour cela de prendre l'intersection du plan auxiliaire avec une génératrice quelconque de l'hyperboloïde, $B_1 B'_1$ par exemple. Ce cercle coupe E en deux points, μ et ν. Il suffit de joindre $A\mu$ et $A\nu$ qui coupent D aux projections horizontales, m et n, des points cherchés.

(Pour ne pas embrouiller l'épure, nous n'avons pas reproduit les constructions qui servent à trouver la droite EE', une fois sa direction connue.)

QUESTION PROPOSÉE.

1593. Si l'on appelle O et R le centre et le rayon du cercle circonscrit à un triangle ABC, I et r le centre et le rayon du cercle inscrit, H l'orthocentre, a, b, c les côtés, $2p$ le périmètre et S la surface du triangle OIH :

1° On a (avec $a > b > c$)

$$S = 2R^2 \sin\frac{A-C}{2}\sin\frac{A-C}{2}\sin\frac{A-B}{2},$$

$$S = \frac{(b-c)(a-c)(a-b)}{8r},$$

$$16S^2 = -p^4 + 2(2R^2 + 10Rr - r^2)p^2 - r(4R+r)^3;$$

2° Si I' et r' sont le centre et le rayon du cercle ex-inscrit dans l'angle intérieur A et S' la surface du triangle OI'H, on a aussi

$$S' = 2R^2 \sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{A-C}{2}\cos\frac{A-B}{2},$$

$$S' = \frac{(b-c)(a+c)(a+b)}{8r'},$$

$$S + S' = R^2 \sin(B-C);$$

3° La condition

$$p^4 - 2(R^2 + 10Rr - r^2)p^2 + r(4R+r)^3 \leqq 0$$

exprime que le triangle ABC est possible avec ses éléments p, R, r. (R. SONDAT.)

SUR QUELQUES PERFECTIONNEMENTS DONT SERAIT SUSCEPTIBLE L'EXPOSITION DE LA THÉORIE DES QUANTITÉS NÉGATIVES.

Extrait de *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques* (en préparation);

PAR M. CH. MÉRAY,
Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon,

AVEC LA COLLABORATION DE M. CH. RIQUIER,
Professeur à la Faculté des Sciences de Caen.

Une confusion trop prématurée et trop absolue faite entre les signes *opératoires* de l'addition et de la soustraction et les signes *constitutionnels* des quantités positives et négatives, faite encore entre les quantités positives et leurs valeurs numériques, rend les principes de cette théorie à peu près inintelligibles pour les commençants. Ses applications à la spécification mathématique des grandeurs convenables dans deux sens contraires, et la pratique du calcul algébrique, finissent sans doute par leur apprendre le maniement de ces quantités; mais ils parviennent bien rarement à se rendre un compte parfaitement raisonné de ce qu'ils font ainsi.

En procédant comme ci-après, il semble qu'on réussirait à éviter toute obscurité et qu'on gagnerait par surcroît l'avantage de ne pas s'écarter du domaine de l'Algèbre pure.

. . . .

15. De même que la substitution des nombres fractionnaires aux nombres entiers rend toutes les divisions possibles et permet même de changer une multiplication en une division ou inversement, celle des nouvelles quantités fictives dont nous allons parler aux nombres fractionnaires absolus ajoute à ce double avantage celui de supprimer les soustractions impossibles et de per-

mettre aussi de remplacer à volonté une soustraction par une addition ou bien une addition par une soustraction.

Nous appellerons provisoirement *qualifiées* des quantités absolues (14) conventionnellement pourvues de certaines qualités factices les rendant aptes à subir les opérations également factices qui vont être successivement définies.

A chaque quantité absolue a non $=$ o correspondront *deux* quantités qualifiées dites l'une *positive*, l'autre *négative* dont nous appellerons ce nombre a la *valeur absolue* (quelquefois *numérique*) et que provisoirement nous noterons par $\overrightarrow{a}$, $\overleftarrow{a}$ respectivement.

A la quantité absolue o correspondra *une seule* quantité qualifiée dite *neutre* et de *valeur absolue nulle*, que nous représenterons par $\overleftrightarrow{o}$.

Deux quantités qualifiées dont les valeurs absolues sont égales entre elles, mais non à o, seront dites *égales* si leurs noms sont identiques, *opposées* s'ils sont différents.

Deux quantités neutres seront dites *indéfiniment égales* ou *opposées*.

16. L'*addition* de plusieurs quantités qualifiées données consiste à faire la somme des valeurs absolues, de celles qui sont positives, celle des valeurs absolues des négatives, et à qualifier du nom de la plus grande de ces deux sommes son excès sur la plus petite (on néglige naturellement les quantités neutres). Quand cet excès est nul, par exemple quand il s'agit d'additionner deux quantités qualifiées opposées, on prend $\overleftrightarrow{o}$ pour résultat.

Par exemple, en conservant pour toutes nos opérations factices les signes opératoires employés dans le calcul des quantités absolues, on aura

$$\overrightarrow{3} + \overleftarrow{7} + \overleftarrow{2} + \overleftrightarrow{0} + \overrightarrow{10} + \overleftrightarrow{0} = \overrightarrow{4},$$

$$\overleftrightarrow{0} + \overleftarrow{5} + \overrightarrow{2} = \overleftarrow{3},$$

$$\left(\overrightarrow{\frac{3}{4}}\right) + \left(\overleftarrow{\frac{3}{4}}\right) = \overleftrightarrow{0}.$$

Une somme de plusieurs quantités qualifiées reste la même si l'on modifie arbitrairement l'ordre de succession de ses termes, si l'on y introduit ou qu'on en ôte un nombre quelconque de parties neutres.

17. *Deux quantités qualifiées quelconques étant données, on peut toujours en trouver une troisième et une seule dont l'addition à la seconde reproduise la première.* Pour exécuter cette *soustraction,* il suffit d'ajouter à la première quantité l'opposée de la seconde (15). Le résultat est la *différence* de ces quantités considérées dans l'ordre indiqué.

Exemples :

$$\overrightarrow{5} - \overleftarrow{6} = \overrightarrow{5} + \overrightarrow{6} = \overrightarrow{11},$$

$$\overleftarrow{7} - \overleftarrow{3} = \overleftarrow{7} + \overrightarrow{3} = \overleftarrow{4},$$

$$\left(\overrightarrow{\frac{5}{3}}\right) - \left(\overrightarrow{\frac{5}{3}}\right) = \left(\overleftarrow{\frac{5}{3}}\right) - \left(\overleftarrow{\frac{5}{3}}\right) = \left(\overrightarrow{\frac{5}{3}}\right) + \left(\overleftarrow{\frac{5}{3}}\right) = 0.$$

18. *Deux quantités qualifiées, quand elles sont égales entre elles, ont leur différence neutre et réciproquement.*

Quand elles sont inégales, elles ont une différence positive ou négative. On dit, selon l'un ou l'autre de ces deux cas, que la première est *supérieure* ou *inférieure* à la seconde.

Par exemple,

$$\overrightarrow{7} > \left(\overrightarrow{\tfrac{1}{2}}\right) > \overleftrightarrow{0} > \overleftarrow{11} > \overleftarrow{15}$$

ou bien encore

$$\overleftarrow{15} < \overleftarrow{11} < \overleftrightarrow{0} < \left(\overrightarrow{\tfrac{1}{2}}\right) < \overrightarrow{7}.$$

En particulier, *la quantité neutre* $\overleftrightarrow{0}$ *est supérieure à toute quantité négative, inférieure au contraire à toute quantité positive.*

19. *Des quantités qualifiées données étant combinées dans un certain ordre par voie d'additions et soustractions consécutives, le même résultat final est encore obtenu si, à l'addition ou à la soustraction d'une quelconque de ces quantités, on substitue respectivement la soustraction ou l'addition de la quantité opposée.*

Par exemple,

$$\begin{aligned} \overleftarrow{5} - \overleftarrow{11} + \overrightarrow{6} - \overleftarrow{3} &= \overleftarrow{5} + \overrightarrow{11} + \overrightarrow{6} - \overleftarrow{3} \\ = \overleftarrow{5} - \overleftarrow{11} - \overleftarrow{6} + \overrightarrow{3} &= \ldots \\ = \overleftarrow{5} + \overrightarrow{11} + \overrightarrow{6} + \overrightarrow{3} &= \overrightarrow{15}. \end{aligned}$$

En particulier, cette observation permet de remplacer toutes les soustractions par l'addition des quantités opposées à celles qu'il faut soustraire, c'est-à-dire de transformer toujours en une somme l'expression considérée.

Si donc, *on compose plusieurs notations simples en unissant indissolublement diverses quantités qualifiées à des signes opératoires + ou — placés devant elles; si* *l'on écrit ces notations les unes à la suite des autres en convenant de remplacer la première par* $\overrightarrow{a}$ *quand elle est* $+\overrightarrow{a}$ *ou* $-\overleftarrow{a}$, *par* $\overleftarrow{a}$ *quand elle est* $-\overrightarrow{a}$ *ou* $+\overleftarrow{a}$, *on obtient une notation composee représentant la même quantité qualifiée, quel que soit l'ordre de succession adopté pour les notations simples.*

Une pareille notation composée se nomme un *polynôme* dont les divers *termes* sont les notations simples formées ainsi par des associations artificielles de signes opératoires $+$, $-$ avec des quantités qualifiées.

La valeur d'un polynôme ne change pas non plus, si dans quelques termes on change simultanément le signe opératoire et le nom de la quantité qualifiée qu'il précède.

En écrivant ses termes par groupes quelconques, on obtient des polynômes partiels représentant des quantités dont la somme reproduit toujours la valeur du proposé.

20. Le *produit* de plusieurs quantités qualifiees est celui qui a pour valeur absolue le produit des valeurs absolues des *facteurs*, et qui est positive quand le nombre des facteurs négatifs est nul ou pair, négative quand ce nombre est impair, neutre quand quelqu'un des facteurs l'est lui-même.

Exemples :

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overleftarrow{a} \times \overleftarrow{b} = \left(\overrightarrow{ab}\right),$$

$$\overleftarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times \overleftarrow{b} = \left(\overleftarrow{ab}\right),$$

$$\overrightarrow{a} \times \overleftrightarrow{o} = \overleftarrow{a} \times \overleftrightarrow{o} = \overleftrightarrow{o}.$$

Pour qu'un pareil produit soit neutre, il faut donc et il suffit que l'un au moins de ses facteurs le soit lui-même.

21. *Le produit de deux polynômes peut s'obtenir en en formant un autre qui a pour termes les divers produits des quantités qualifiées figurant dans le premier par celles qui figurent dans le second, chacun de ces produits partiels étant précédé du signe opératoire + ou — selon que, dans les polynômes proposés, ses facteurs sont précédés de signes identiques ou différents.*

Exemple :

$$\left(+\overleftarrow{a} - \overrightarrow{a}\right)\left(-\overrightarrow{c} - \overrightarrow{d}\right) = -\left(\overleftarrow{ac}\right) - \left(\overleftarrow{ad}\right) + \left(\overrightarrow{bc}\right) + \left(\overrightarrow{bd}\right).$$

22. Le *quotient* de la *division* d'une première quantité qualifiée par une seconde sera (en cas qu'elle existe) la quantité dont le produit par celle-ci régénère la première. Sa recherche conduit aux résultats suivants :

1° Quand le *diviseur* n'est pas neutre, le quotient existe *et il est unique :* I° neutre si *le dividende* l'est; II° non neutre, si le dividende ne l'est pas, et alors positif ou négatif selon que les noms du dividende et du diviseur sont identiques ou différents; de plus, sa valeur absolue est toujours égale au quotient de celle du dividende divisée par celle du diviseur;

2° Quand le diviseur est neutre : I° la division est impossible si le dividende ne l'est pas en même temps; II° la division redevient possible, mais le quotient est absolument et entièrement indéterminé si le dividende est neutre aussi.

Exemples (b non $= 0$) :

$$\frac{\overleftrightarrow{0}}{\overrightarrow{b}} = \frac{\overleftrightarrow{0}}{\overleftarrow{b}} = \overleftrightarrow{0},$$

$$\frac{\overrightarrow{a}}{\overrightarrow{b}} = \frac{\overleftarrow{a}}{\overleftarrow{b}} = \left(\overrightarrow{\frac{a}{b}}\right),$$

$$\frac{\overrightarrow{a}}{\overleftarrow{b}} = \frac{\overleftarrow{a}}{\overrightarrow{b}} = \left(\frac{\overleftarrow{a}}{b}\right),$$

$$\frac{\overleftrightarrow{0}}{\overleftrightarrow{0}} = \text{telle quantité qualifiée qu'on voudra.}$$

Comme on a

$$\overrightarrow{a} \times \overleftarrow{1} = \frac{\overrightarrow{a}}{\overleftarrow{1}} = \overleftarrow{a},$$

$$\overleftarrow{a} \times \overleftarrow{1} = \frac{\overleftarrow{a}}{\overleftarrow{1}} = \overrightarrow{a},$$

le changement d'une quantité qualifiée en son opposée équivaut à sa multiplication ou à sa division par $\overleftarrow{1}$.

23. *Dans un monôme, expression composée ne comportant que des multiplications et des divisions, la substitution, à un facteur ou diviseur, de la quantité qualifiée qui lui est opposée change seulement le nom du résultat, sans changer sa valeur absolue.*

En combinant cette remarque avec celle du n° 19, on aperçoit que *dans toute expression impliquant seulement l'exécution d'additions, soustractions, multiplications et divisions de quantités qualifiées, on peut où l'on voudra remplacer l'un par l'autre les signes opératoires* +, —, *à condition de changer en même temps d'une manière convenable les noms de quelques-unes de ces quantités.*

En particulier, *on peut ainsi n'y laisser subsister que des signes* + ; *cela même se fait de plusieurs manières.*

Exemple :

$$\frac{\overleftarrow{3} - \overrightarrow{4}}{\overrightarrow{1} - \overrightarrow{8}} - \frac{\overleftarrow{7} - \overleftarrow{1}}{\overrightarrow{5} \,.\, \overrightarrow{4} - \overleftarrow{10} \,.\, \overleftarrow{10}}$$

$$= \frac{\overleftarrow{3} + \overleftarrow{4}}{\overrightarrow{1} + \overleftarrow{8}} + \frac{\overrightarrow{7} + \overleftarrow{1}}{\overrightarrow{5} \,.\, \overrightarrow{4} - \overrightarrow{10} \,.\, \overleftarrow{10}}$$

$$= \frac{\overrightarrow{3} + \overrightarrow{4}}{\overleftarrow{1} + \overrightarrow{8}} + \frac{\overleftarrow{7} + \overrightarrow{1}}{\overleftarrow{5} \,.\, \overrightarrow{4} + \overrightarrow{10} \,.\, \overrightarrow{10}} = \ldots.$$

24. *Si* R *est le résultat d'opérations, additions et multiplications, soustractions et divisions (ces deux dernières sortes d'opérations étant naturellement supposées possibles) exécutées sur les quantités absolues*

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad \text{o},$$

la quantité positive $\overrightarrow{\mathrm{R}}$ $\left(\textit{ou neutre } \overleftrightarrow{\text{o}} \textit{ si } \mathrm{R} = \text{o}\right)$ *est aussi le résultat des opérations homonymes dans la théorie des quantités qualifiées qu'on exécuterait parallèlement sur les quantités positives ou neutres*

$$\overrightarrow{a}, \quad \overrightarrow{b}, \quad \overrightarrow{c}, \quad \ldots, \quad \overleftrightarrow{\text{o}}.$$

Cette proposition évidente autorise la substitution systématique, aux nombres absolus définis dans le paragraphe précédent, des quantités positives dont ils sont les valeurs numériques. Et sa combinaison avec la possibilité constante de toutes les soustractions qualifiées, d'une part (17), avec les observations des nos 19 et 23, d'autre part, assure à la substitution dont il s'agit les deux avantages annoncés au n° 15.

Moyennant la substitution ultérieure de quelques quantités négatives à des quantités positives, on reste notamment maître *de ne laisser subsister dans une* *expression donnée que ceux des signes opératoires + ou — qui facilitent le mieux la conception, la généralisation et l'énonciation des résultats obtenus dans la question où elle se présente.* C'est en procédant ainsi qu'on est arrivé, par exemple, à cet énoncé simple et lumineux de la règle de multiplication de deux polynômes quelconques :

Le produit est la somme des produits partiels des termes du multiplicande et du multiplicateur transformés de manière à ne plus contenir l'un et l'autre que des signes opératoires +.

25. Le plus souvent (mais pas toujours) on a intérêt à ne laisser partout que le signe opératoire +; le mécanisme *habituel* de cette transformation d'un polynôme à termes absolus en une somme de quantités qualifiées consiste donc à substituer une quantité positive à chaque nombre absolu qui est précédé du signe + et une quantité négative, précédée du même signe +, à chaque notation complexe constituée par un nombre absolu précédé du signe — et par le signe — lui-même.

Mais s'il demeure bien sous-entendu que le polynôme qualifié ne contiendra jamais que des signes +, on peut se contenter de retenir que des nombres absolus a, b, ... doivent être remplacés par les quantités positives $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, ... et des notations telles que $-a$, $-b$, ... par les quantités négatives $\overleftarrow{a}$, $\overleftarrow{b}$, ... Cette manière de voir les choses conduit à juger équivalentes les notations

$$\overrightarrow{a},\quad \overrightarrow{b},\quad \ldots,\quad \overleftarrow{a},\quad \overleftarrow{b},\quad \ldots$$

d'une part,

$$a,\quad b,\quad \ldots,\quad -a,\quad -b,\quad \ldots$$

d'autre part, et, d'autre part encore, par extension,

$$+a, \quad +b, \quad \ldots, \quad -a, \quad -b, \quad \ldots.$$

L'usage courant est conforme à ce dernier point de vue : on trouve commode de confondre les quantités positives avec leurs valeurs absolues, sauf à écrire devant les notations de celles-ci, quand on tient à mieux affirmer qu'on les a transformées par la pensée en des quantités positives, le signe opératoire + *changé tacitement en signe qualificatif*, et à représenter une quantité négative par la notation de sa valeur absolue précédée du signe opératoire — *pris de même dans un sens nouveau qui est purement qualificatif*. C'est ainsi qu'on est ramené à dire que *les quantités positives ont le signe + et les quantités négatives le signe —*, bien qu'il ne s'agisse pas nécessairement d'additions ou de soustractions à exécuter.

Enfin le théorème du n° 24 conduit encore à identifier la quantité neutre $\overleftrightarrow{0}$ avec le zéro naturel.

. . . .

Mais, en réalité, un nombre n'est pas une quantité positive; et, pour la notation habituelle des quantités négatives, le signe — n'est détourné de son sens opératoire que par une convention tacite. On ne verra plus les quantités négatives à travers un nuage en ne l'oubliant pas, en se souvenant aussi qu'il y a, *non une théorie des quantités négatives, mais bien une théorie des quantités factices tant positives que négatives.*

Ce mode d'exposition peut, à ce qu'il semble, se passer d'illustrations empruntées à la considération des grandeurs concrètes *dirigées;* c'est au début des diverses théories où les grandeurs se rencontrent qu'il convient le mieux d'expliquer l'application des quantités positives et négatives à leur représentation analytique.

RÉALISATION ET USAGE DES FORMES IMAGINAIRES EN GÉOMÉTRIE.

CONFÉRENCES DONNÉES PAR M. MAXIMILIEN MARIE
au Collège Stanislas, à Sainte-Barbe, à l'École Sainte-Geneviève
et à l'École Monge.

---

1. *Est-il possible de faire réprésenter un point du plan des axes par une solution*

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$
$$y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1},$$

d'une équation

$$f(x, y) = 0,$$

sous la condition que le point représentatif de cette solution, dont les coordonnées x_1 et y_1 seraient des fonctions de α, β, α', β', conserve une position invariable dans le plan, quelque transformation que l'on fasse subir aux axes et, par suite, à la solution considérée?

Et d'abord, si x_1 doit être fourni par la formule

$$x_1 = \varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta'),$$

il faudra que y_1 le soit par

$$y_1 = \varphi(\alpha', \beta', \alpha, \beta);$$

sans quoi l'échange des deux axes des x et des y ne laisserait pas le point (x_1, y_1) à la même place.

Supposons donc que les formules

$$x_1 = \varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') \quad \text{et} \quad y_1 = \varphi(\alpha', \beta', \alpha, \beta)$$

remplissent la condition exigée.

Si l'on transporte l'origine sur l'axe des x à une distance a de l'ancienne, les formules de transformation seront

$$x' = x - a$$
$$y' = y,$$

de sorte que la solution

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \qquad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

deviendra

$$x' = \alpha - a + \beta\sqrt{-1}, \qquad y' = \alpha' + \beta'\sqrt{-1};$$

le point (x'_1, y'_1) deviendrait donc

$$x'_1 = \varphi(\alpha - a, \beta, \alpha', \beta'),$$
$$y'_1 = \varphi(\alpha', \beta', \alpha - a, \beta);$$

pour qu'il ait conservé la même situation, il faudra que ses coordonnées x'_1, y'_1 soient liées à x_1, y_1 par les formules de transformation, c'est-à-dire que l'on ait

$$\varphi(\alpha - a, \beta, \alpha', \beta') = \varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') - a$$

et

$$\varphi(\alpha' - \beta', \alpha - a, \beta) = \varphi(\alpha', \beta', \alpha, \beta),$$

quels que soient α, β, α', β' et a.

Ces conditions exigent évidemment, d'abord, que α n'entre pas dans la fonction φ relative à y_1 ni, par conséquent, α' dans la fonction φ relative à x_1; en second lieu, que la fonction φ relative à x_1 ne contienne α qu'au premier degré, sans coefficient, et de même, que la fonction φ relative à y_1 ne contienne α' qu'au premier degré, sans coefficient.

Ainsi la transformation considérée conduit à conclure que x_1 et y_1 doivent respectivement affecter les formes

$$x_1 = \alpha + \psi(\beta, \beta')$$
$$y_1 = \alpha' + \psi(\beta', \beta).$$

Considérons maintenant la transformation dans laquelle l'axe des y aurait simplement tourné autour de l'origine, de manière à faire avec l'axe des x, resté fixe, l'angle supplémentaire de celui qu'il faisait auparavant.

Les formules de transformation seront

$$y' = y \qquad \text{et} \qquad x' = x + 2\cos\theta\, y;$$

la solution $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, $y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$ deviendra donc

$$y' = \alpha' + \beta'\sqrt{-1},$$
$$x' = \alpha + \beta\sqrt{-1} + 2\cos\theta(\alpha' + \beta'\sqrt{-1}).$$

Le point représentatif de la solution transformée serait donc

$$x'_1 = \alpha + 2\alpha'\cos\theta + \psi(\beta + 2\beta'\cos\theta, \beta')$$
$$y'_1 = \alpha' + \psi(\beta', \beta + 2\beta'\cos\theta);$$

mais, pour que le point représenté soit resté le même, il faudra que ses coordonnées x'_1, y'_1 et x_1, y_1 soient liées par les formules de transformation, c'est-à-dire que

$$y'_1 = y_1 \qquad \text{et} \qquad x'_1 = x_1 + 2y_1\cos\theta$$

ou que

$$\alpha' + \psi(\beta', \beta + 2\beta'\cos\theta) = \alpha' + \psi(\beta', \beta)$$

et

$$\alpha + 2\alpha'\cos\theta + \psi(\beta + 2\beta'\cos\theta, \beta')$$
$$= \alpha + \psi(\beta, \beta') + 2\cos\theta[\alpha' + \psi(\beta', \beta)].$$

La première condition montre que la fonction ψ relative à y_1 ne doit pas contenir β et, par suite, que la fonction ψ relative à x_1 ne doit pas non plus contenir β'.

En conséquence, il faudra réduire x_1 et y_1 à

$$x_1 = \alpha + \chi(\beta) \qquad \text{et} \qquad y_1 = \alpha' + \chi(\beta').$$

Mais alors la condition

$$x'_1 = x_1 + 2y_1\cos\theta$$

se réduit à

$$\alpha + 2\alpha' \cos\theta + \psi(\beta + 2\beta' \cos\theta)$$
$$= \alpha + \psi(\beta) + 2\cos\theta[\alpha' + \psi(\beta')]$$

ou

$$\psi(\beta + 2\beta' \cos\theta) = \psi(\beta) + 2\cos\theta\,\psi(\beta'),$$

ce qui exige que ψ soit du premier degré et sans constante.

En résumé, on est amené à faire obligatoirement

$$x_1 = \alpha + k\beta, \qquad y_1 = \alpha' + k\beta'.$$

Il est, du reste, facile de vérifier que, dans ces conditions, le point représentatif d'une solution

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \qquad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

restera toujours le même, quelque transformation des coordonnées qui intervienne.

En effet, si les formules de transformation sont

$$x' = a + mx + ny,$$
$$y' = b + px + qy,$$

la solution transformée de

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$
$$y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

sera

$$x' = a + m\alpha + n\alpha' + (m\beta + n\beta')\sqrt{-1},$$
$$y' = b + p\alpha + q\alpha' + (p\beta + q\beta')\sqrt{-1};$$

les points représentatifs de ces deux solutions seront donc

$$x_1 = \alpha + k\beta, \qquad y_1 = \alpha' + k\beta'$$

et

$$x'_1 = a + m\alpha + n\alpha' + k(m\beta + n\beta') = a + mx_1 + ny_1,$$
$$y'_1 = b + p\alpha + q\alpha' + k(p\beta + q\beta') = b + px_1 + qy_1,$$

les coordonnées anciennes et nouvelles de ces deux points seront donc liées entre elles par les formules de transformation : les deux points coïncideront donc.

Il n'y aurait aucun avantage à donner à k une valeur différente de 1; nous ferons donc toujours

$$x_1 = \alpha + \beta, \qquad y_1 = \alpha' + \beta'.$$

2. Les solutions imaginaires $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, $y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$ d'une équation à deux variables $f(x, y) = 0$ présentent une double indétermination, c'est-à-dire que les quatre variables α, β, α', β' ne sont liées entre elles que par deux conditions, celles dans lesquelles se décompose

$$f(\alpha + \beta\sqrt{-1}, \alpha' + \beta'\sqrt{-1}) = 0.$$

Il en résulte que les points (x_1, y_1) représentatifs de toutes les solutions imaginaires d'une équation $f(x, y) = 0$ formeront plaque sur le Tableau.

Sur la surface recouverte par ces points (x_1, y_1), on pourra tracer une infinité de courbes : l'une d'elles sera définie par une équation complémentaire

$$\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0.$$

La théorie donnera les moyens de les étudier toutes; mais la classe de celles dont les points correspondraient à des solutions qui pussent être rendues réelles, en même temps, par rapport à l'une des variables, x par exemple, par une transformation convenable des coordonnées, présentera un intérêt tout particulier, parce que ces courbes auront des rapports beaucoup plus intimes que toutes les autres avec la courbe réelle représentée par la même équation $f(x, y) = 0$; en effet, dans un système convenable de coordonnées, les ordonnées de l'une de ces courbes et de la courbe réelle seront respectivement représentées par deux fonctions conjointes de l'abscisse commune

$$y = \varphi(x) \pm \sqrt{\psi(x)}$$

et

$$y = \varphi(x) \pm \sqrt{-\psi(x)},$$

analogie algébrique d'où résulteront une infinité d'analogies géométriques, qui permettront d'instituer une *Géométrie comparée*.

Les lieux courbes contenus dans le lieu plan $f(x,y)=0$ qui sont définis par la condition précédente sont désignés sous le nom de *conjuguées* du lieu réel $f(x,y)=0$.

Cherchons la condition complémentaire qu'il faudra joindre à l'équation $f(x,y)=0$ pour définir une des conjuguées de ce lieu, c'est-à-dire cherchons le caractère commun de toutes les solutions imaginaires de l'équation d'un lieu, qui pourraient devenir en même temps réelles par rapport à l'abscisse, à la suite d'une transformation convenable de coordonnées.

Soient

$$x = \frac{x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \alpha')}{\sin\theta}$$

et

$$y = \frac{x' \sin\alpha + y' \sin\alpha'}{\sin\theta}$$

les formules d'une transformation; on en tire

$$[x \sin\alpha' - y \sin(\theta - \alpha')] \sin\theta$$
$$= x'[\sin\alpha' \sin(\theta - \alpha) - \sin\alpha \sin(\theta - \alpha')].$$

Si donc on veut que les x' soient réels, il faudra que x et y soient tels que

$$x \sin\alpha' - y \sin(\theta - \alpha')$$

soit réel, c'est-à-dire, si $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ et $y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$, que

$$\beta \sin \alpha' - \beta' \sin(\theta - \alpha') = 0$$

ou que

$$\frac{\beta'}{\beta} = \frac{\sin \alpha'}{\sin(\theta - \alpha')},$$

condition indépendante, comme on le voit, de l'équation du lieu considéré.

Ainsi, l'on pourra rendre en même temps réelles, par rapport à l'abscisse nouvelle, les solutions de toutes les équations à deux variables où $\frac{\beta'}{\beta}$ aurait une même valeur C.

La constante $C = \frac{\beta'}{\beta}$ qui définit une conjuguée d'un lieu $f(x, y) = 0$ est ce que nous nommerons la *caractéristique* de cette conjuguée.

On voit que cette caractéristique

$$C = \frac{\sin \alpha'}{\sin(\theta - \alpha')}$$

est le coefficient angulaire de la direction qu'il faudrait donner au nouvel axe des y pour rendre en même temps réelles les abscisses nouvelles de tous les points de la conjuguée.

Ainsi l'équation de la conjuguée C d'un lieu

$$f(x, y) = 0$$

résulterait de l'élimination de α, β, α' et β' entre les équations

$$f(\alpha + \beta\sqrt{-1}, \alpha' + \beta'\sqrt{-1}) = 0,$$

$$\frac{\beta'}{\beta} = C$$

et

$$x_1 = \alpha + \beta, \qquad y_1 = \alpha' + \beta';$$

mais on ne se servira jamais de cette équation d'une conjuguée en coordonnées réelles. Cette équation serait de degré $m(m-1)$ ou de degré m^2 suivant que l'équation $f(x, y)=0$, de degré m, aurait tous ses coefficients réels ou en aurait d'imaginaires; mais la conjuguée elle-même sera bien plus facile à étudier dans l'équation $f(x, y)=0$, qui la représente en coordonnées imaginaires, que dans celle qui la représenterait en coordonnées réelles.

Les conjuguées d'un lieu de degré m présentent, en effet, comme on le verra, tant au point de vue algébrique qu'au point de vue géométrique, tous les caractères des courbes de degré m.

Nous démontrerons d'ailleurs, et c'est, en définitive, le but que nous nous proposons, que toute question quelconque, résolue déjà pour le lieu réel $f(x, y)=0$, l'est par cela même, au moyen des mêmes formules, pour une quelconque de ses conjuguées, moyennant une interprétation toujours très simple.

Cordes réelles d'une conjuguée. — Une équation $y=Cx+d$, dans laquelle d peut prendre toutes les valeurs réelles, n'est capable que de solutions du système C; en effet, si l'on y fait $x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$ et $y=\alpha'+\beta'\sqrt{-1}$, il vient

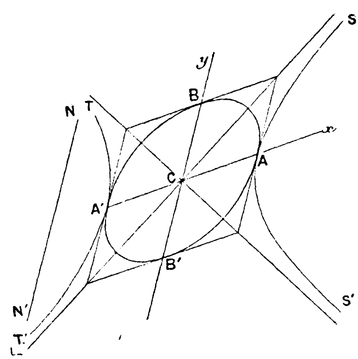
$$\alpha'=C\alpha+d \qquad \text{et} \qquad \beta'=C\beta;$$

on voit donc qu'on pourrait directement construire la conjuguée C d'un lieu $f(x, y)=0$, en recherchant toutes les solutions communes à l'équation $f(x, y)=0$ et à l'équation $y=Cx+d$, dans laquelle on ferait varier d de $-\infty$ à $+\infty$; au reste le point $x_1=\alpha+\beta$, $y_1=\alpha'+\beta'$, qui représenterait une de ces solutions, appartiendrait à la sécante considérée $y=Cx+d$, car les deux équations précédentes donnent

$$\alpha'+\beta'=C(\alpha+\beta)+d.$$

3. *Conjuguées des coniques.* — Soit C (*fig.* 1) une ellipse quelconque, cherchons la conjuguée de cette

Fig. 1.



ellipse dont les cordes réelles sont parallèles à la droite NN′: pour cela rapportons la courbe au diamètre parallèle à NN′, pris pour axe des y, et à son conjugué, pris pour axe des x; l'équation de l'ellipse prendra la forme

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - 1 = 0;$$

si l'on donne à x des valeurs non comprises entre $-a'$ et $+a'$, l'ordonnée du lieu sera imaginaire et représentée par

$$y = \frac{b'}{a'}\sqrt{x'^2 - a'^2}\sqrt{-1},$$

les coordonnées réalisées du point correspondant seront

$$x_1 = x \qquad \text{et} \qquad y_1 = \frac{b'}{a'}\sqrt{x_1^2 - a'^2};$$

elles seront donc liées entre elles par la relation

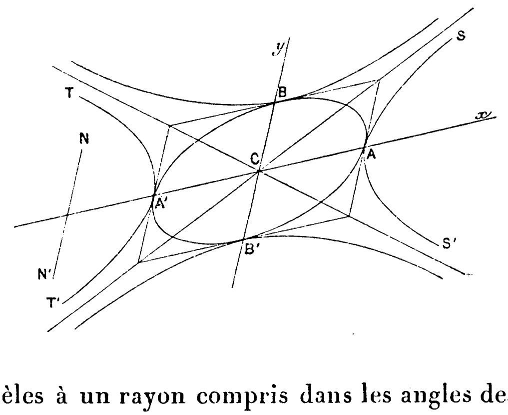
$$\frac{x_1^2}{a'^2} - \frac{y_1^2}{b'^2} - 1 = 0;$$

la conjuguée lieu de ces points sera donc l'hyperbole $SAS'TA'T'$ ayant pour diamètre non transverse le diamètre de l'ellipse parallèle aux cordes réelles de cette même conjuguée, et pour diamètre transverse le diamètre conjugué du premier.

Ainsi les conjuguées d'une ellipse sont toutes les hyperboles qui ont avec elle un système de diamètres conjugués commun; elles recouvrent tout le plan, sauf l'intérieur de l'ellipse, et cette ellipse est l'enveloppe de ses conjuguées. Nous savions déjà qu'il en est de même de toutes les courbes : une courbe quelconque est l'enveloppe de ses conjuguées, ou d'une partie de ses conjuguées.

Considérons maintenant une hyperbole (*fig.* 2) : les

Fig. 2.



parallèles à un rayon compris dans les angles des deux asymptotes qui comprennent eux-mêmes la courbe réelle rencontreraient tous cette courbe en deux points réels; ainsi les cordes réelles des conjuguées d'une hyperbole sont parallèles aux diamètres non transverses de cette courbe; en d'autres termes, quels que soient les axes auxquels une hyperbole soit rapportée, la caractéristique $C = \frac{\beta'}{\beta}$ d'une conjuguée ne peut varier qu'entre les valeurs extrêmes des coefficients angulaires des diamètres non transverses de la courbe. C'est un fait général en ce sens que, si une courbe de degré m est toujours coupée en m points réels par toutes les droites parallèles aux rayons d'un secteur, la courbe n'a pas de conjuguée dont la caractéristique soit comprise entre les coefficients angulaires des rayons extrêmes de ce secteur, et ces rayons extrêmes ont généralement des directions asymptotiques, parce que, généralement, on peut mener à la courbe plus de tangentes inclinées à une asymptote, dans un sens, qu'on n'en peut mener qui soient inclinées dans le sens contraire. Au reste, cela ne veut pas dire qu'une courbe n'ait jamais de conjuguées dont les cordes réelles aient des directions parallèlement auxquelles on ne pourrait pas lui mener de tangentes.

Supposons que nous voulions connaître la conjuguée de l'hyperbole SAS'TA'T', dont les cordes réelles seraient parallèles à une droite NN' parallèle à un diamètre BB' non transverse de cette hyperbole; prenons pour axe des y ce diamètre BB' et son conjugué AA' pour axe des x, l'équation de l'hyperbole prendra la forme

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} - 1 = 0,$$

et si l'on donne à x des valeurs comprises entre $-a'$ et $+a'$, y sera imaginaire et représenté par

$$y = \frac{b'}{a'}\sqrt{a'^2 - x^2}\sqrt{-1},$$

les coordonnées réalisées du point correspondant seront

$$x_1 = x \qquad \text{et} \qquad y_1 = \frac{b'}{a'}\sqrt{a'^2 - x_1^2};$$

elles seront donc liées entre elles par la relation

$$\frac{x_1^2}{a'^2} + \frac{y_1^2}{b'^2} - 1 = 0\,;$$

la conjuguée lieu de ces points sera donc l'ellipse B A B′ A′, ayant pour diamètres les deux diamètres de l'hyperbole considérée, qui seraient parallèles, l'un aux cordes réelles de la conjuguée, et l'autre au diamètre conjugué du premier.

Ainsi, les conjuguées d'une hyperbole sont toutes les ellipses qui ont avec elle un système de diamètres conjugués commun. Elles ont deux enveloppes, l'une réelle, c'est l'hyperbole proposée, l'autre imaginaire, qui est l'hyperbole de mêmes axes, mais changés de réels en imaginaires, et réciproquement. Cette seconde enveloppe est ordinairement désignée sous le nom d'*hyperbole conjuguée de la première;* mais nous l'appellerons plutôt *supplémentaire de la proposée,* parce que, lorsque les conjuguées d'une courbe ont deux enveloppes, l'enveloppe imaginaire présente toujours tous les caractères d'une véritable supplémentaire de la courbe elle-même ou de l'enveloppe réelle.

Les deux enveloppes ont ici les mêmes asymptotes, c'est un fait qui sera généralisé.

Les conjuguées d'une hyperbole recouvrent toute la portion du plan comprise entre cette hyperbole et sa supplémentaire, et aucune ne peut pénétrer dans l'intérieur de la concavité de l'une ou de l'autre des deux hyperboles.

Les points de l'enveloppe imaginaire, ou de l'hyperbole supplémentaire, seraient fournis par les solutions imaginaires sans parties réelles de l'équation de l'hyperbole proposée, rapportée à deux de ses diamètres conjugués quelconques a et b.

En effet, si dans l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

on fait

$$x = \beta\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad y = \beta'\sqrt{-1},$$

il vient

$$\frac{\beta^2}{a^2} - \frac{\beta'^2}{b^2} + 1 = 0;$$

les coordonnées réalisées du point correspondant sont

$$x_1 = \beta, \quad y_1 = \beta',$$

et elles sont liées par l'équation

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} + 1 = 0,$$

qui représente bien l'hyperbole supplémentaire.

Le coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$ du lieu $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, en un point de l'enveloppe imaginaire, se réduit ici à $\frac{d\beta'}{d\beta}$ et est, par conséquent, réel. Nous verrons bientôt que c'est le caractère général de l'enveloppe imaginaire des conjuguées d'un lieu quelconque.

Lorsque la caractéristique d'une conjuguée d'une hyperbole tend vers le coefficient angulaire d'une des asymptotes, la conjuguée correspondante s'aplatit indéfiniment et, à la limite, se confond avec l'asymptote elle-même, qu'elle recouvre deux fois. Nous verrons plus tard que le fait est général et même que les conjuguées d'une courbe de degré quelconque tendent, dans une de leurs parties, à devenir des ellipses, lorsque leur caractéristique tend vers le coefficient angulaire d'une asymptote réelle.

On verrait, comme précédemment, que les conjuguées d'une parabole sont des paraboles égales à la proposée et opposées à elle par un diamètre commun et une tangente commune.

Les conjuguées d'une ellipse imaginaire

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

sont toutes les hyperboles qui ont avec l'ellipse réelle correspondante

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

un système de diamètres conjugués commun. Seulement, c'est alors le diamètre transverse de la conjuguée qui est parallèle à ses cordes réelles.

L'enveloppe imaginaire de ces conjuguées est l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Elle est fournie par les solutions imaginaires, sans parties réelles, de l'équation du lieu lui-même,

$$\frac{x_2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

c'est-à-dire par les solutions de la forme

$$x = \beta\sqrt{-1}, \qquad y = \beta'\sqrt{-1},$$

réalisées par

$$x_1 = \beta, \qquad y_1 = \beta'.$$

En un quelconque des points de cette enveloppe imaginaire, le coefficient angulaire $\frac{dy}{du}$ du lieu est réel.

Les conjuguées de l'ellipse évanouissante

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

sont naturellement réduites à leurs asymptotes, c'est-à-dire sont des droites. Les conjuguées dont les cordes réelles sont parallèles à une droite donnée sont les diagonales du parallélogramme construit sur les deux diamètres conjugués d'une ellipse homothétique à l'ellipse évanouissante, dont l'un serait parallèle aux cordes réelles de cette conjuguée.

4. *Des éléments d'un lieu en un de ses points et de l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu.* — Le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ en un point x, y d'un lieu

$$f(X, Y) = 0$$

est

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)};$$

ce rapport n'a qu'une valeur, quel que soit dx, c'est-à-dire que si l'on donne à x l'accroissement

$$dx = d\alpha + d\beta\sqrt{-1},$$

l'accroissement correspondant de y,

$$dy = d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1},$$

sera toujours lié à l'accroissement de x par la même relation

$$d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}(d\alpha + d\beta\sqrt{-1}),$$

quels que soient $d\alpha$ et $d\beta$ l'un par rapport à l'autre.

Soit $m + n\sqrt{-1}$ la valeur du coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ au point x, y, les accroissements correspondants de x et de y seront donc liés l'un à l'autre par la relation

$$d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1} = (m + n\sqrt{-1})(d\alpha + d\beta\sqrt{-1})$$

qui se décompose en deux

$$d\alpha' = m\,d\alpha - n\,d\beta,$$

et

$$d\beta' = m\,d\beta + n\,d\alpha.$$

Soient, suivant notre notation habituelle, x_1 et y_1 les coordonnées du point représentatif de la solution, x, y, $x_1 + dx_1$ et $y_1 + dy_1$ celles d'un point infiniment voisin, de sorte que

$$dx_1 = d\alpha + d\beta \quad \text{et} \quad dy_1 = d\alpha' + d\beta';$$

les deux équations précédentes donnent

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{d\alpha' + d\beta'}{d\alpha + d\beta} = \frac{(m+n)\,d\alpha + (m-n)\,d\beta}{d\alpha + d\beta}$$

ou

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{m + n + (m + n)\dfrac{d\beta}{d\alpha}}{1 + \dfrac{d\beta}{d\alpha}}.$$

$\frac{dy_1}{dx_1}$ pourra donc prendre habituellement une infinité de valeurs, qui dépendront de $\frac{d\beta}{d\alpha}$; c'est-à-dire qu'autour du point x_1, y_1, qui correspond à la solution x, y de l'équation $f(X, Y) = 0$, le lieu en présentera généralement une infinité d'autres, placées dans toutes les directions, ce qui est tout naturel, puisque ce lieu constitue une surface. Les lignes droites qui joindraient le point $[x_1, y_1]$ aux points $[x_1 + dx_1, y_1 + dy_1]$ constituent les éléments du lieu au point $[x_1, y_1]$.

Pour que tous ces éléments se confondissent géométriquement, il faudrait que $\frac{dy_1}{dx_1}$ fut indépendant de $\frac{d\beta}{d\alpha}$, ce qui exigerait que

$$\frac{m+n}{1} = \frac{m-n}{1}$$

ou que $n = 0$.

Ainsi, aux points d'un lieu où $\frac{dy}{dx}$ est réel, tous les éléments de ce lieu se confondent, c'est-à-dire que toutes les courbes, lieux de points $[x_1, y_1]$, qui y passent, s'y touchent.

C'est là la propriété caractéristique de la limite, réelle ou imaginaire, de la portion du plan recouverte par tous les points imaginaires réalisés d'un lieu quelconque ; les deux enveloppes réelle et imaginaire des conjuguées d'un lieu quelconque seront donc fournies simultanément par la condition commune :

$$\frac{dy}{dx} \text{ est réel.}$$

Nous allons donner deux exemples d'une telle recherche. Soit d'abord le lieu

$$y^3 - a^2 y + a^2 x = 0,$$
$$\frac{dy}{dx} = - \frac{a^2}{3y^2 - a^2};$$

pour que $\frac{dy}{dx}$ soit réel, il faut que y soit de la forme $\beta'\sqrt{-1}$; alors x sera de la forme $\beta\sqrt{-1}$. D'ailleurs, ces valeurs de x et y devant satisfaire à l'équation du lieu, on aura

$$-\beta'^3 - a^2\beta' + a^2\beta = 0 :$$

l'équation de l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu est donc

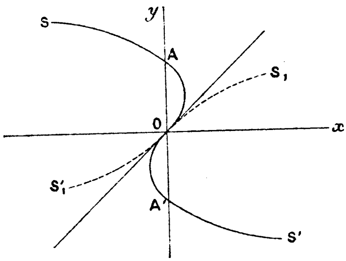
$$y^3 + a^2 y - a^2 x = 0.$$

La courbe réelle, ou l'enveloppe réelle des conjuguées du lieu, est SAOA'S' (*fig.* 3), et l'enveloppe imaginaire est $S_1OS'_1$. Ces deux enveloppes se touchent à l'origine, qui est pour elles deux un point d'inflexion, et elles sont réciproques.

Nous verrons plus tard qu'il en est toujours ainsi :

les deux enveloppes sont toujours réciproques l'une de l'autre, c'est-à-dire que chacune d'elles est l'enveloppe

Fig. 3.



imaginaire des conjuguées de l'autre, et les deux courbes ont les mêmes points d'inflexion, où d'ailleurs elles se tournent leurs convexités.

Considérons, comme second exemple, le lieu représenté par l'équation

$$(x-a-b\sqrt{-1})^2+(y-a'-b'\sqrt{-1})^2=(r+r'\sqrt{-1})^2,$$

qui se présentera de lui-même dans la théorie des courbures et auquel nous donnons le nom de *cercle imaginaire.*

Soient $x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$ et $y=\alpha'+\beta'\sqrt{-1}$ les coordonnées imaginaires d'un point du lieu, α, β, α' et β' satisferont aux deux conditions

$$(1)\qquad (\alpha-a)^2-(\beta-b)^2+(\alpha'-a')^2-(\beta'-b')^2=r^2-r'^2$$

et

$$(2)\qquad (\alpha-a)(\beta-b)+(\alpha'-a')(\beta'-b')=rr';$$

le coefficient différentiel $\dfrac{dy}{dx}$ aura pour valeur en ce point

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x-a-b\sqrt{-1}}{y-a'-b'\sqrt{-1}}=\frac{\alpha-a+(\beta-b)\sqrt{-1}}{\alpha'-a'+(\beta'-b')\sqrt{-1}},$$

et, pour qu'il soit réel, il faudra que

$$(3)\qquad \frac{\alpha - a}{\alpha' - a'} = \frac{\beta - b}{\beta' - b'}.$$

L'équation (3) donne

$$\beta - b = \frac{\alpha - a}{\alpha' - a'}(\beta' - b');$$

en substituant dans les deux autres, il vient

$$(1\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} &(\alpha - a)^2 - \frac{(\alpha - a)^2}{(\alpha' - a')^2}(\beta' - b')^2 \\ &\qquad + (\alpha' - a')^2 - (\beta' - b')^2 = r^2 - r'^2 \end{aligned}\right.$$

ou

$$(1\ ter)\qquad \left\{\begin{aligned} &(\alpha - a)^2 + (\alpha' - a')^2 \\ &\qquad - (\beta' - b')^2 \frac{(\alpha - a)^2 + (\alpha' - a')^2}{(\alpha' - a')^2} = r^2 - r'^2 \end{aligned}\right.$$

et

$$(2\ bis)\qquad \left[\frac{(\alpha - a)^2}{\alpha' - a'} + (\alpha' - a')\right](\beta' - b') = rr'$$

ou

$$(2\ ter)\qquad (\beta' - b') = \frac{rr'(\alpha' - a')}{(\alpha - a)^2 + (\alpha' - a')^2};$$

éliminant maintenant $\beta' - b'$, il vient

$$(4)\qquad (\alpha - a)^2 + (\alpha' - a')^2 - \frac{r^2 r'^2}{(\alpha - a)^2 + (\alpha' - a')^2} = r^2 - r'^2,$$

c'est-à-dire

$$(4\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} &[(\alpha - a)^2 + (\alpha' - a')^2]^2 \\ &\qquad - (r^2 - r'^2)[(\alpha - a)^2 + (\alpha' - a')^2] - r^2 r'^2 = 0, \end{aligned}\right.$$

équation qui donne

$$(4\ ter)\qquad \left\{\begin{aligned} &(\alpha^2 - a)^2 + (\alpha' - a')^2 \\ &\qquad = \frac{r^2 - r'^2 \pm \sqrt{(r^2 - r'^2)^2 + 4r^2 r'^2}}{2} = r^2 \quad \text{ou} \quad -r'^2; \end{aligned}\right.$$

mais $(\alpha - a)^2 + (\alpha' - a')^2$ ne saurait être négatif; par conséquent, en définitive, la solution est

$$(4\ quater) \qquad (\alpha - a)^2 + (\alpha' - a')^2 = r^2,$$

c'est-à-dire que α et α' sont les coordonnées d'un point de la circonférence

$$(5) \qquad (x - a)^2 + (y - a')^2 = r^2.$$

L'équation (1) donne, par suite,

$$(6) \qquad (\beta - b)^2 + (\beta' - b')^2 = r'^2,$$

et, par conséquent, β et β' sont les coordonnées d'un point du cercle

$$(x - b)^2 + (y - b')^2 = r'^2;$$

mais l'équation (3)

$$\frac{\alpha - a}{\alpha' - a'} = \frac{\beta - b}{\beta' - b'}$$

montre que les rayons des deux circonférences (5) et (6), qui contiendront respectivement les points (α, α') et (β, β') seront parallèles.

Il en résulte que l'enveloppe imaginaire du lieu proposé est la circonférence du cercle

$$(x - a - b)^2 + (y - a' - b')^2 = (r + r')^2.$$

En effet, soient, par rapport aux axes Ox et Oy (*fig.* 4), C et C′ les points dont les coordonnées sont a et a' pour le premier, b et b' pour le second; CA et CB, deux rayons parallèles des deux circonférences décrites de C et de C′ comme centres, avec r et r' pour rayons; les projections de CA et de C′B sur Ox seront respectivement

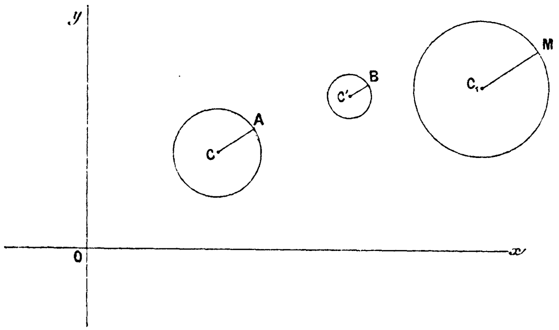
$$\alpha - a \quad \text{et} \quad \beta - b.$$

et leurs projections sur Oy seront

$$\alpha' - a' \quad \text{et} \quad \beta' - b';$$

en conséquence, si l'on construit le point C_1, dont les coordonnées soient $a + b$ et $a' + b'$, et qu'autour du

Fig. 4.



point C_1 on décrive une circonférence de rayon $r + r'$, cette circonférence sera le lieu cherché.

En effet, les coordonnées d'un point M de cette circonférence seront

$$x_1 = a + b + \alpha - a + \beta - b = \alpha + \beta$$

et

$$y_1 = a' + b' + \alpha' - a' + \beta' - b' = \alpha' + \beta'.$$

5. *De la ligne droite.* — Les conjuguées d'une ellipse étant toutes les hyperboles qui ont avec elle un système de diamètres conjugués commun, les conjuguées d'une ellipse évanouissante, telle que le lieu représenté par l'équation

$$(y - mx - p)^2 + (nx + q)^2 = 0,$$

seront des hyperboles réduites à leurs asymptotes; chacune de ces conjuguées sera composée des diagonales de l'un des parallélogrammes construits sur deux diamètres conjugués d'une ellipse homothétique à la proposée, par rapport à leur centre commun, telle que

$$(y - mx - p)^2 + (nx + q)^2 = k^2.$$

Ainsi, les conjuguées du lieu

$$(y - mx - p)^2 + (nx + q)^2 = 0$$

constituent deux faisceaux de droites, émergeant l'un et l'autre du point réel

$$nx + q = 0, \qquad y - mx - p = 0,$$

où se réduit l'ellipse évanouissante.

L'un de ces faisceaux constitue le système des conjuguées du lieu

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1},$$

et l'autre, le système des conjuguées du lieu

$$y = (m - n\sqrt{-1})x + p - q\sqrt{-1}.$$

Considérons l'un de ces lieux en particulier.

On pourra toujours déterminer $m + n\sqrt{-1}$ et $p + q\sqrt{-1}$, de façon que l'équation

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1}$$

admette deux solutions imaginaires données (x', y') et (x'', y''); l'équation

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(n - n')$$

répondrait, en effet, à la question.

Si les deux points (x', y'), (x'', y'') ont été pris sur une même conjuguée C d'un lieu $f(x, y) = 0$, la droite de caractéristique C du lieu

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x')$$

sera une sécante effective, quoique représentée en coordonnées imaginaires, de la conjuguée C du lieu

$$f(x, y) = 0.$$

Si les deux points (x', y'), (x'', y'') tendent à se confondre sur la conjuguée C du lieu $f(x, y) = 0$, la même droite deviendra tangente à la même conjuguée. Enfin, si les deux points (x', y'), (x'', y'') s'éloignent à l'infini sur la même conjuguée C du même lieu $f(x, y) = 0$, la même droite deviendra asymptote à cette conjuguée.

On voit par là que la forme imaginaire sous laquelle sont représentées les droites d'un faisceau

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1}$$

ne s'opposera aucunement à la solution des questions relatives aux tangentes et aux asymptotes, aux courbes représentées elles-mêmes en coordonnées imaginaires.

Au contraire, il est clair qu'il fallait bien qu'une droite fût imaginairement représentée pour pouvoir entrer analytiquement en concurrence avec une courbe, représentée elle-même imaginairement.

L'important était de constater que l'équation

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1}$$

contient juste le nombre de constantes arbitraires suffisant, sans superfétation, pour permettre d'établir tel concours que l'on voudrait entre une droite du faisceau

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1}$$

et une conjuguée désignée d'un lieu donné.

Il en sera toujours de même dans toutes les recherches possibles. C'est ainsi, par exemple, que l'étude préalable des conjuguées du lieu

$$(x-a-b\sqrt{-1})^2+(y-a'-b'\sqrt{-1})^2=(r+r'\sqrt{-1})^2$$

se trouvera tout naturellement désignée pour présider aux recherches relatives aux courbures des conjuguées d'un lieu quelconque.

L'équation en coordonnées réelles de la conjuguée C du lieu

$$y=(m+n\sqrt{-1})x+p+q\sqrt{-1}$$

résulterait de l'élimination de α, β, α' et β' entre les équations

$$(\alpha'+\beta'\sqrt{-1})=(m+n\sqrt{-1})(\alpha+\beta\sqrt{-1})+p+q\sqrt{-1},$$

$$\beta'=C\beta,$$

$$x_1=\alpha+\beta \qquad \text{et} \qquad y_1=\alpha'+\beta' :$$

c'est

$$y_1=\left(m+n+\frac{2n^2}{m-n-C}\right)x_1+p+q+\frac{2qn}{m-n-C};$$

mais on ne s'en sert jamais sous cette forme compliquée, par la raison que, dans les recherches théoriques sur une conjuguée désignée d'un lieu donné, on suppose toujours qu'on ait d'abord rendu réelles les abscisses des points de cette conjuguée, par un choix convenable d'axes, et que les droites imaginaires, utiles à considérer, doivent alors, nécessairement, avoir aussi leurs abscisses réelles.

Or, si l'on suppose les β nuls, $C=\frac{\beta'}{\beta}$ est alors infini, et l'équation précédente se réduit à

$$y_1=(m+n)x_1+p+q.$$

Lorsque le coefficient angulaire $m+n\sqrt{-1}$ d'un faisceau de droites imaginaires devient réel, c'est-à-dire lorsque l'équation du faisceau se réduit à

$$y = mx + p + q\sqrt{-1},$$

toutes les conjuguées du faisceau se replient sur la même droite

$$y_1 = mx_1 + p + q;$$

on le vérifie aisément.

6. *Des tangentes aux courbes imaginaires.* — Si deux équations

$$f(X, Y) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_1(X, Y) = 0$$

ont une solution commune (x, y), et que, d'ailleurs, ces deux équations fournissent pour $\frac{dy}{dx}$, en ce point, la même valeur $m + n\sqrt{-1}$, les deux lieux admettront les mêmes éléments autour du point (x_1, y_1), qui représenterait la solution commune; ils auront autour de ce point un disque élémentaire commun dont le contour sera défini par les équations

$$dy = d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1} = (m + n\sqrt{-1})(d\alpha + d\beta\sqrt{-1})$$

ou

$$d\alpha' = m\,d\alpha - n\,d\beta$$

et

$$d\beta' = n\,d\alpha + m\,d\beta;$$

d'où

$$d\alpha' + d\beta' = (m + n)\,d\alpha + (m - n)\,d\beta,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{m + n + (m - n)\dfrac{d\beta}{d\alpha}}{1 + \dfrac{d\beta}{d\alpha}}.$$

Si l'on considère, en particulier, les deux courbes, définies séparément par les deux équations proposées $f(x, y) = 0$, $f_1(x, y) = 0$ et par une relation complémentaire commune, d'ailleurs arbitraire,

$$\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0,$$

$\dfrac{d\beta}{d\alpha}$ aura la même valeur de part et d'autre, et les deux courbes seront tangentes.

Les deux équations

$$f(X, Y) = 0$$

et

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

remplissent les deux conditions imposées, quelle que soit la solution (x, y) de $f(X, Y) = 0$, et si, au lieu d'une condition quelconque $\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0$, on introduit la condition

$$\frac{\beta'}{\beta} = C,$$

C désignant la caractéristique du point (x, y), d'une part, la courbe tracée sur le lieu $f(X, Y) = 0$ sera la conjuguée C de ce lieu; d'autre part, la courbe tracée sur le lieu

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x) = (m + n\sqrt{-1})(X - x)$$

sera la droite de caractéristique C du faisceau correspondant, et la droite sera tangente à la courbe.

Donc la tangente à la conjuguée d'un lieu $f(X, Y) = 0$, au point (x_1, y_1) de cette conjuguée qui correspond à la solution (x, y), est la conjuguée C du faisceau

$$Y - y = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}(X - x).$$

Des tangentes menées par un point extérieur réel *à un lieu représenté par une équation algébrique, et application aux courbes du second degré.* — Soient $f(X, Y) = 0$ l'équation du lieu proposé, et x_0, y_0 les coordonnées du point donné, les coordonnées x et y du point de contact inconnu seront fournies par les deux équations

$$f(x, y) = 0$$

et

$$x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z = 0,$$

z_0 représentant 1.

Les solutions de ces deux équations seront en nombre $m(m-1)$, si m est le degré de $f(x, y)$. Aux solutions réelles correspondront des tangentes réelles menées du point (x_0, y_0) au lieu réel.

Si les deux équations admettent les solutions imaginaires conjuguées

$$x = \alpha \pm \beta\sqrt{-1},$$
$$y = \alpha' \pm \beta'\sqrt{-1},$$

le faisceau de droites que représenterait l'équation

$$X f'_x + Y f'_y + f'_z = 0$$

contiendra les deux points (x, y) et (x_0, y_0), parce que les deux égalités

$$x f'_x + y f'_y + f'_z = 0$$

et

$$x_0 f'_x + y_0 f'_y + f'_z = 0$$

seront satisfaites, comme étant les deux équations mêmes du problème. D'un autre côté, le point réel (x_0, y_0) sera le centre du faisceau

$$X f'_x + Y f'_y + f'_z = 0;$$

par conséquent, toutes les droites du faisceau y passeront. La droite du faisceau qui aurait pour caractéristique celle $\frac{\beta'}{\beta}$ de la solution obtenue joindra donc effectivement le point (x_0, y_0) au point (x, y); mais les deux lieux

$$f(X, Y) = 0 \qquad \text{et} \qquad X f'_x + Y f'_y + f'_z = 0$$

contiendront les mêmes éléments autour du point représentatif de la solution $(X = x, Y = y)$. Donc, enfin, la droite de caractéristique $C = \frac{\beta'}{\beta}$ du faisceau $X f''_x + Y f''_y + f''_z = 0$ sera bien l'une des tangentes menées du point (x_0, y_0) à la conjuguée C du lieu $f(X, Y) = 0$. Comme on aura obtenu deux solutions conjuguées, on connaîtra deux tangentes menées du même point (x_0, y_0) à la même conjuguée du lieu proposé. La caractéristique C de cette conjuguée dépendra de la situation du point (x_0, y_0).

Si les deux équations

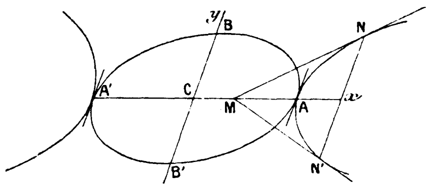
$$f(x, y) = 0 \qquad \text{et} \qquad x_0 f'_x + y_0 f'_y + f'_z = 0$$

avaient d'autres solutions imaginaires, il y correspondrait généralement des tangentes à d'autres conjuguées.

Si, en particulier, $-\frac{f'_x}{f'_y}$ était réel en l'un des points imaginaires de contact et en son conjugué, ces deux points appartiendraient à l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu $f(X, Y) = 0$, et l'on se trouverait avoir mené du point (x_0, y_0) deux tangentes à cette enveloppe.

Supposons qu'il s'agisse d'une ellipse réelle ABA'B' (*fig.* 5), et soit M le point donné (x_0, y_0), on sait que la polaire de ce point est parallèle au diamètre conjugué de OM et qu'elle est réelle; elle ne peut donc couper le lieu qu'en deux points de la conjuguée dont les cordes réelles lui sont parallèles, c'est-à-dire de la conjuguée qui touche l'ellipse aux extrémités A et A' du diamètre OM. Soit NN' cette polaire; les points de contact cherchés seront N et N', et les tangentes cherchées seront MN et MN'.

Fig. 5.



Supposons en particulier que le point donné soit l'un des foyers réels de l'ellipse et que cette courbe soit rapportée à ses axes : la polaire du point $y = 0$, $x = c$ sera $x = \frac{a^2}{c}$, elle coupera l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ aux points

$$x = \frac{a^2}{c}, \qquad y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{-\frac{a^2 b^2}{c^2}} = \pm \frac{b^2}{c}\sqrt{-1};$$

les tangentes menées au lieu en ces deux points sont les conjuguées à abscisses réelles des deux faisceaux

$$\frac{X}{c} \pm \frac{Y}{c}\sqrt{-1} - 1 = 0$$

ou

$$Y = \mp \sqrt{-1}\,X \pm c\sqrt{-1}.$$

Ces tangentes ont donc pour équations en coordonnées réelles

$$Y = \mp X \pm c,$$

elles sont rectangulaires entre elles et elles passent géométriquement par les foyers imaginaires de l'ellipse

$$x = 0 \qquad \text{et} \qquad y = \pm c;$$

d'ailleurs leurs équations en coordonnées imaginaires sont satisfaites par $x = 0$ avec $y = \pm c\sqrt{-1}$. C'est pour cela que le calcul donne les deux foyers imaginaires.

Les quatre tangentes menées à l'ellipse des deux foyers réels F et F' forment un carré dont les autres sommets sont les foyers imaginaires φ et φ'. Les tangentes menées des points φ et φ' considérés comme imaginaires coïncideraient avec les tangentes menées des points F et F' réels.

Le carré $F'\varphi F\varphi'$ est géométriquement et analytiquement inscrit à la conique.

Si l'on rapportait l'ellipse à deux de ses diamètres conjugués a' et b' et que, en supposant $a' > b'$, on prît sur le diamètre a' le point situé à une distance du centre égale à $c' = \sqrt{a'^2 - b'^2}$, on arriverait à des conclusions analogues; seulement, au lieu d'un carré inscrit dans la conique, on trouverait un parallélogramme ayant ses diagonales égales; les quatre sommets seraient des simili-foyers.

Lorsqu'on ferait varier le système des diamètres conjugués, les quatre simili-foyers décriraient un lieu sur lequel ils se réuniraient à l'origine lorsque les diamètres conjugués viendraient se confondre avec ceux qui sont égaux; à ce moment, les quatre tangentes deviendraient géométriquement indéterminées; elles seraient bien représentées, par rapport aux axes, par exemple, par l'équation complètement déterminée

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{-1}\, x,$$

mais toutes les conjuguées de ce lieu répondraient à la question, parce qu'elles contiendraient toutes le point donné (x_0, y_0), transporté à l'origine. L'ensemble de ces conjuguées serait constitué par l'ensemble des asymptotes de toutes les hyperboles conjuguées de l'ellipse.

Nous verrons bientôt qu'il en est de même pour tous les lieux algébriques : si, en cherchant les asymptotes d'une courbe $f(x, y) = 0$, on en a trouvé une imaginaire

$$y = (m + x\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1},$$

en réalité, on a trouvé un faisceau d'asymptotes à toutes les conjuguées du lieu proposé.

Si le point (x_0, y_0), par lequel on voulait mener des tangentes à un lieu $f(x, y) = 0$, était imaginaire, les $m(m-1)$ tangentes trouvées appartiendraient à des conjuguées non désignées d'avance et d'ailleurs ne passeraient généralement plus par le point (x_0, y_0) réalisé. Ce cas ne présente aucun intérêt pratique.

7. *Quelques propriétés de l'enveloppe imaginaire.* — Si l'on propose de mener à un lieu de degré m, $f(x, y) = 0$, des tangentes parallèles à une direction réelle donnée, $y = kx$, les points de contact appartiendront soit à la courbe réelle, soit à l'enveloppe imaginaire des conjuguées. Le nombre total de ces tangentes sera $m(m-1)$, puisque les équations du problème seront

$$f(x, y) = 0 \qquad \text{et} \qquad -\frac{f'_x}{f'_y} = k.$$

Il en résulte que, si l'une des enveloppes n'a que p tangentes parallèles à une direction donnée, l'autre en a $m(m-1) - p$. A ce point de vue, *les deux enveloppes sont supplémentaires.*

Si $y = mX + \varphi(m)$ est l'équation générale des tangentes à la courbe réelle représentée par une équation, $f(X, Y) = 0$, $Y = (m + n\sqrt{-1})X + \varphi(m + n\sqrt{-1})$

sera évidemment l'équation générale des tangentes à toutes les conjuguées. La solution double commune aux deux équations

$$f(X, Y) = 0 \qquad \text{et} \qquad Y = (m + n\sqrt{-1})X + \varphi(m + n\sqrt{-1})$$

représentera le point de contact et si, dans cette solution double, on a $\frac{\beta'}{\beta} = C$, la conjuguée C du faisceau

$$Y = (m + n\sqrt{-1})X + \varphi(m + n\sqrt{-1})$$

sera tangente au point en question à la conjuguée C du lieu $f(x, y) = 0$.

Aux valeurs réelles de m, pour lesquelles $\varphi(m)$ serait imaginaire, correspondront des tangentes à l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu $f(X, Y) = 0$.

Si $\varphi(m)$ peut devenir imaginaire, deux de ses valeurs deviendront momentanément égales et le point de contact des deux tangentes confondues sera alors un point d'inflexion du lieu réel.

Ces deux valeurs de $\varphi(m)$ pourront, avant d'être devenues égales, être représentées par

$$\psi(x) \pm \sqrt{\chi(m)},$$

$\chi(m)$ étant alors positif; aussitôt après, elles deviendront

$$\psi(m) \pm \sqrt{-\chi(m)}\sqrt{-1},$$

$-\chi(m)$ étant alors positif.

Les deux tangentes au lieu réel seront représentées par

$$Y = mX + \psi(m) \pm \sqrt{\chi(m)};$$

quant aux deux tangentes à l'enveloppe imaginaire, elles le seront par

$$Y = mX + \psi(m) \pm \sqrt{-\chi(m)}\sqrt{-1}.$$

Mais cette dernière opération ne représente que la seule droite

$$Y = mX + \varphi(m) \pm \sqrt{-\chi(m)}.$$

Il résulte de là que les deux enveloppes d'un même lieu sont respectivement les enveloppes de droites représentées, pour l'une, par une équation telle que

$$Y = mX + \psi(m) \pm \sqrt{\chi(m)}$$

et, pour l'autre, par l'équation correspondante

$$Y = mX + \psi(m) \pm \sqrt{-\chi(m)}.$$

Il en résulte que *les deux enveloppes d'un même lieu sont toujours réciproques l'une de l'autre,* lorsqu'elles coexistent.

Au moment où $\chi(m)$ s'annule, le point de contact appartient à la fois aux deux enveloppes et est point d'inflexion pour l'une et pour l'autre, puisque les deux tangentes, à ce moment confondues, à l'une ou à l'autre deviennent instantanément imaginaires pour l'une ou l'autre suivant qu'on fait varier m dans un sens ou dans l'autre, à partir de sa valeur singulière. Il en résulte que les *deux enveloppes ont toujours les mêmes points d'inflexion, qu'elles se touchent en ces points et qu'elles s'y tournent leurs convexités.*

Une asymptote réelle

$$y = mx + \varphi(m)$$

d'un lieu réel est toujours la réunion de deux tangentes à deux branches distinctes du lieu. Lorsque cette asymptote ne coupe le lieu qu'en deux points situés à l'infini, sa direction est généralement une direction limite pour les tangentes au lieu. Si l'on essayait de faire varier dans un sens convenable la direction de la tangente, à partir de celle de l'asymptote, les deux tangentes, un instant confondues, deviendraient imaginaires et, leur coefficient angulaire étant resté réel, les points de contact appartiendraient à l'enveloppe imaginaire.

Il en résulte que les *deux enveloppes ont généralement les mêmes asymptotes*. (*A suivre.*)

SUR LES SÉRIES RÉCURRENTES;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

1. J'ai démontré dans ma *Théorie élémentaire des séries récurrentes* (*Nouvelles Annales*, 1884, p. 65) que le terme général U_n d'une série récurrente, définie par les valeurs des p premiers termes U_0, U_1, ..., U_{p-1} et par l'échelle de récurrence

$$U_n = a_1 U_{n-1} + a_2 U_{n-2} + \ldots + a_p U_{n-p},$$

pouvait s'exprimer en fonction linéaire de p termes consécutifs de la série *fondamentale* correspondante, définie par la même échelle de récurrence

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \ldots + a_p u_{n-p},$$

avec les valeurs initiales

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad u_{p-2} = 0, \qquad u_{p-1} = 1 \text{ (}^1\text{)}.$$

En raison de l'importance de ce résultat, que j'ai eu

(1) *Loc. cit.*, p. 80.

occasion d'appliquer assez souvent depuis sa publication, je crois devoir y revenir ici à la fois pour l'établir d'une manière plus simple et le compléter, car mon premier Mémoire ne contenait pas la forme des coefficients de l'expression obtenue ([1]).

Écrivons donc les $n-p+1$ égalités consécutives

$$\begin{aligned}
U_p \quad &= a_1 U_{p-1} + a_2 U_{p-2} + \ldots + a_p U_0,\\
U_{p+1} &= a_1 U_p \quad + a_2 U_{p-1} + \ldots + a_p U_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
U_{n-1} &= a_1 U_{n-2} + a_2 U_{n-3} + \ldots + a_p U_{n-p-1},\\
U_n \quad &= a_1 U_{n-1} + a_2 U_{n-2} + \ldots + a_p U_{n-p}.
\end{aligned}$$

Multiplions la première par u_{n-1}, la deuxième par u_{n-2}, ..., l'avant-dernière par u_p, la dernière par u_{p-1}, et faisons la somme en tenant compte des égalités qui définissent la série (u). Il vient alors

$$\begin{aligned}
U_n = U_{p-1} u_n &+ U_{p-2}(u_{n+1} - a_1 u_n) + \ldots\\
&+ U_1(u_{n+p-2} - a_1 u_{n+p-3} - \ldots - a_{p-2} u_n)\\
&+ U_0(u_{n+p-1} - a_1 u_{n+p-2} - a_2 u_{n+p-3} - \ldots - a_{p-1} u_n)
\end{aligned}$$

ou

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
U_n = U_0 u_{n+p-1} &+ (U_1 - a_1 U_0) u_{n+p-2} + \ldots\\
&+ (U_{p-2} - a_1 U_{p-3} - \ldots - a_{p-2} U_0) u_{n+1}\\
&+ (U_{p-1} - a_1 U_{p-2} - \ldots - a_{p-1} U_0) u_n.
\end{aligned}\right.$$

Telle est la formule que nous avions en vue.

Pour en faire saisir toute l'importance, nous allons l'appliquer à un exemple qui se trouve dans notre premier Mémoire (n° 12), mais sans que le calcul soit achevé, et l'on va voir que la forme du résultat est intéressante.

([1]) A la vérité, il était facile d'achever le calcul que j'indiquais alors. Le résultat que je donne ici était donc implicitement contenu dans le Mémoire en question. Je n'en crois pas moins devoir le donner explicitement, surtout à cause de l'application qui suit.

2. Le problème dont il s'agit est le suivant :

Trouver (lorsqu'elle existe) la somme S *de la série*

$$U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots + \text{ad inf.},$$

en fonction de $U_0, U_1, \ldots, U_{p-1}, a_1, a_2, \ldots, a_p$ *qui sont les données de la question.*

Voyons d'abord comment la formule de Lagrange s'appliquerait à ce problème. Lagrange a démontré que

$$(2) \qquad U_n = \alpha_1 \rho_1^n + \alpha_2 \rho_2^n + \ldots + \alpha_p \rho_p^n,$$

$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ étant les racines supposées inégales de l'équation (dite *génératrice*)

$$\varphi(x) = x^p - a_1 x^{p-1} - a_2 x^{p-2} - \ldots - a_p = 0$$

et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ des coefficients qui se déterminent en faisant successivement dans (2) $n = 0, 1, 2, \ldots, p-1$, ce qui donne les p équations linéaires

$$(3) \quad U_i = \alpha_1 \rho_1^i + \alpha_2 \rho_2^i + \ldots + \alpha_p \rho_p^i \qquad (i = 0, 1, \ldots, p-1).$$

La formule (2) donne

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n} U_\nu = \alpha_1 \frac{\rho_1^{n+1} - 1}{\rho_1 - 1} + \alpha_2 \frac{\rho_2^{n+1} - 1}{\rho_2 - 1} + \ldots + \alpha_p \frac{\rho_p^{n+1} - 1}{\rho_p - 1}.$$

Si donc, toutes les racines $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ ont un module inférieur à l'unité, on a, à la limite, lorsque n croît indéfiniment,

$$S = \frac{\alpha_1}{1 - \rho_1} + \frac{\alpha_2}{1 - \rho_2} + \ldots + \frac{\alpha_p}{1 - \rho_p},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ ayant les valeurs qui résultent du système d'équations (3). On tombe ainsi sur une fonction symétrique des racines de l'équation génératrice d'une forme tellement compliquée qu'il est à peu près inutile de chercher à en calculer la valeur au moyen des coefficients de cette équation.

3. Nous allons faire voir maintenant comment notre formule (1) donne directement cette expression.

Rappelons d'abord le résultat suivant démontré dans notre Mémoire de 1884 (n° 10).

En représentant par $(\rho_1\rho_2\ldots\rho_p)^{(n)}$ ce que devient le développement de $(\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_p)^n$ lorsqu'on y remplace tous les coefficients par l'unité, nous avons fait voir que

$$u_n = (\rho_1\rho_2\ldots\rho_p)^{(n-p+1)}.$$

Partant de là et nous appuyant sur les formules (3) et (4) de notre Mémoire, qui donnent

$$\begin{aligned}(\rho_1\rho_2\ldots\rho_p)^{(0)}+(\rho_1\rho_2\ldots\rho_p)^{(1)}+\ldots+(\rho_1\rho_2\ldots\rho_p)^{(n-p+1)}\\ =(\rho_1\rho_2\ldots\rho_p\,1)^{(n-p+1)},\end{aligned}$$

et, en posant $\psi(x)=(x-1)\,\varphi(x)$,

$$\begin{aligned}&(\rho_1\rho_2\ldots\rho_p\,1)^{(n-p+1)}\\ &=\frac{\rho_1^{n+1}}{\psi'(\rho_1)}+\frac{\rho_2^{n+1}}{\psi'(\rho_2)}+\ldots+\frac{\rho_p^{n+1}}{\psi'(\rho_p)}+\frac{1}{\psi'(1)},\end{aligned}$$

nous avons obtenu la formule

$$\sum_{i=p-1}^{i=n} u_n = \frac{1}{\psi'(1)}+\sum_{h=1}^{h=p}\frac{\rho_n^{n+1}}{\psi'(\rho_n)};$$

d'où, à la limite, en supposant les modules de ρ_1, ρ_2, ..., ρ_n inférieurs à 1,

$$(4)\qquad s=\frac{1}{\psi'(1)}=\frac{1}{1-(a_1+a_2+\ldots+a_p)}.$$

Ceci rappelé, remarquons que la formule (3) donne

$$\sum_{i=0}^{i=n} \mathrm{U}_n = \mathrm{U}_0 \sum_{i=p-1}^{i=n+p-1} u_i + (\mathrm{U}_1 - a_1 \mathrm{U}_0) \sum_{i=p-1}^{i=n+p-2} u_i + \ldots$$
$$+ (\mathrm{U}_{p-1} - a_1 \mathrm{U}_{p-2} - \ldots - a_{p-1} \mathrm{U}_0) \sum_{i=p-1}^{i=n} u_i$$

et, par suite, à la limite,

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{S} = s[&\mathrm{U}_0(1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_{p-1}) \\ &+ \mathrm{U}_1(1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_{p-2}) + \ldots \\ &\qquad + \mathrm{U}_{p-2}(1 - a_1) + \mathrm{U}_{p-1}]. \end{aligned} \right.$$

Il suffit alors de porter dans (5) la valeur (4) de s pour avoir le résultat cherché. Pour l'écrire plus simplement, nous poserons

$$\begin{aligned} b_p &= 1 - (a_1 + a_2 + \ldots + a_p), \\ b_{p-1} &= 1 - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ b_2 &= 1 - (a_1 + a_2), \\ b_1 &= 1 - a_1. \end{aligned}$$

Nous aurons alors la remarquable formule

$$(6) \qquad \mathrm{S} = \frac{b_{p-1} \mathrm{U}_0 + b_{p-2} \mathrm{U}_1 + \ldots + b_1 \mathrm{U}_{p-2} + \mathrm{U}_{p-1}}{b_p}$$

ou, en posant encore $b_0 = 1$,

$$\mathrm{S} = \frac{1}{b_p} \sum_{i=0}^{i=p-1} b_{p-i} \mathrm{U}_i.$$

LE THÉORÈME DE DUPUIS ET LA CYCLIDE DE DUPIN;

Par M. E. MARCHAND.

1. *Énoncé du problème.* — Tous les géomètres connaissent la belle propriété découverte par Dupuis, ancien élève de l'École Polytechnique, mort au commencement de ce siècle :

« Quand une sphère variable ω touche constamment de la même manière trois sphères fixes A, B, C, chacun des trois points de contact décrit un petit cercle de la sphère fixe correspondante. » (*Traité de Géométrie*, par E. Rouché et Ch. de Comberousse, 5e édition, p. 267.)

Ce théorème, indépendamment de sa valeur propre, se recommande à l'attention comme ayant conduit à la solution d'une question non moins difficile qu'importante du VIIe Livre de *Géométrie*. « Les auteurs qui se sont occupés de la construction d'une sphère tangente à quatre sphères données (Gaultier de Tours, ... ; Heegmann, ... ; J.-A. Serret, ... ; etc.) ont fondé leur démonstration sur le théorème de Dupuis. Au lieu de suivre cette marche, qui rompt l'analogie avec la solution du problème correspondant de Géométrie plane, nous avons tenu à conserver complètement cette analogie et à traiter directement la question sans le secours du théorème de Dupuis, qui n'est plus alors qu'un corollaire immédiat de la solution trouvée. » (*Géométrie*, par E. Rouché et Ch. de Comberousse, p. 267.)

Toute la difficulté consiste donc à établir la célèbre construction donnée par Gergonne pour le problème d'Apollonius; cercle tangent à trois cercles donnés. Les solutions ainsi obtenues sont irréprochables au double point de vue de la rigueur et de la simplicité; mais il ne me semble pas sans intérêt de chercher à les compléter; car « en général, comme le remarque Chasles, il ne suffit pas qu'une proposition soit vraie pour qu'on puisse en faire un usage utile en Mathématiques, il faut encore connaître toutes ses dépendances avec les diverses propositions qui se rattachent au même sujet ». (*Géométrie,* par Rouché et de Comberousse, p. 233.)

Or, pour peu que l'on ait étudié les propriétés les plus simples de la cyclide de Charles Dupin [*Étude analytique sur la cyclide,* par H. Lemonnier (*Nouvelles Annales de Mathématiques,* 1870)], on reconnaît que les sphères tangentes à trois sphères fixes forment précisément l'un des modes de génération de cette surface. La cyclide particulière dont il est question ici, c'est-à-dire la surface du quatrième ordre qu'on obtiendrait en transformant le tore par rayons vecteurs réciproques, a été trouvée par Dupin comme solution d'un problème de Calcul intégral : « Déterminer toutes les surfaces dont les lignes de courbure des deux systèmes sont des cercles. » (Dupin, *Applications de Géométrie et de Méchanique,* p. 200 et suiv., 1822.) Ayant l'intention de ne m'appuyer que sur la Géométrie élémentaire, je laisserai de côté cette définition; mais, afin de montrer dès à présent l'intérêt que peuvent présenter ces recherches, je résume rapidement les propriétés évidentes qui résulteront de la considération de la cyclide.

Le lieu du centre d'une sphère variable ω, touchant constamment de la même manière trois sphères fixes de centres A, B, C, est une conique (E) dont le plan est perpendiculaire au plan ABC. La conique (G), focale de (E), passe par les trois points A, B, C; on connaît ses tangentes en A, B, C, et l'on sait de plus qu'elle est bitangente au cercle qui coupe orthogonalement les trois sphères A, B, C.

La cyclide de Dupin étant aussi l'enveloppe d'une seconde famille de sphères A, B, C, ..., dont les centres décrivent la conique (G), le théorème de Dupuis revient à dire que chaque sphère enveloppée telle que A est tangente à sa surface enveloppe en tous les points d'un cercle. Or ce résultat peut se voir géométriquement par la méthode indiquée en Géométrie descriptive, lorsqu'il s'agit de démontrer que le contour apparent d'un tore est une courbe parallèle à l'ellipse.

Le problème de Géométrie plane consistant à déterminer deux cercles ω, ω' tangents aux trois cercles A, B, C est identique à ce problème de Géométrie à trois dimensions : « Déterminer la section de la cyclide par un plan passant par les centres de trois sphères A, B, C appartenant à un même mode de génération. »

Les propriétés de la cyclide indiquent immédiatement qu'on peut remplacer les trois cercles A, B, C par trois autres cercles quelconques ayant leurs centres sur une conique déterminée (G) et coupant orthogonalement un cercle fixe, le cercle orthogonal des trois cercles A, B, C. Inversement, la figure plane relative au problème d'Apollonius permettra de se rendre compte avec précision de la génération de la cyclide de Dupin, ainsi que de sa forme extérieure; la surface se présentera comme presque aussi simple que le tore et aussi facilement accessible aux procédés de la Géométrie descriptive. On obtiendra ainsi un exemple de surface enveloppe se traitant complètement et simplement sans autre considération infinitésimale que celle du plan tangent à la sphère.

Il me reste maintenant à justifier toutes ces assertions. La méthode analytique pourrait conduire au but de la manière la plus satisfaisante, et, à ce propos, je dois avouer que l'idée première et la substance de ce travail m'ont été fournies par la théorie des coniques focales et de la cyclide de Dupin, telle que nous l'a présentée M. Darboux dans son Cours de l'École Normale, en 1875. Le mode de démonstration employé ne laisserait subsister aucun doute sur la possibilité d'arriver aux mêmes conséquences par la Géométrie pure de Poncelet et de Chasles; mais, pour éviter toute ambiguïté, je m'efforcerai de ne faire usage que des théorèmes contenus dans tous les Traités classiques de Géométrie élémentaire.

2. *Propriétés focales.* — Si l'on se reporte à la solution du problème : « Placer une ellipse, une hyperbole ou une parabole sur un cône de révolution » (*Géométrie*, par E. Rouché et de Comberousse, n° 1082), on constate aussitôt que l'on a : soit

$$SA' - SA = 2c \qquad (fig.\ 562);$$

soit

$$SA' + SA = 2c \qquad (fig.\ 563).$$

Le lieu des sommets des cônes de révolution passant par une ellipse donnée (E) est donc une hyperbole (H) dont le plan perpendiculaire à celui de l'ellipse passe par le grand axe de l'ellipse; l'hyperbole admet comme foyers les sommets de l'ellipse et comme sommets les foyers de l'ellipse. On voit sur la figure (*fig.* 562) que l'axe du cône de révolution en chaque point S est précisément la tangente à l'hyperbole (H) en ce point. Inversement, on trouverait comme lieu des sommets des cônes de révolution passant par l'hyperbole (H) l'ellipse (E), et l'axe du cône est en chaque point la tangente à l'ellipse.

Je désigne par Δ la droite d'intersection du plan Q de l'ellipse (E) avec le plan P normal à l'hyperbole au point S, et je veux démontrer que le rapport des distances de tout point M de l'ellipse au point fixe S et à la droite fixe Δ est constant et égal à $\frac{c}{a}$.

En effet, le plan P normal en S à l'hyperbole est perpendiculaire à l'axe du cône de révolution qui a pour sommet S et l'ellipse (E) pour directrice. Or, le rapport des distances de tout point de la surface d'un cône de révolution S au sommet S et à un plan P perpendiculaire à l'axe et mené par le sommet est constant et égal à $\frac{1}{\cos\beta}$, 2β étant l'angle au sommet du cône. D'autre part, les distances d'un point quelconque du plan Q de l'ellipse (E) au plan P et à l'intersection Δ des deux plans P et Q sont aussi dans un rapport constant.

Le rapport des distances d'un point de l'ellipse à S et à Δ est donc constant, et l'on aura sa valeur en le déterminant pour un point particulier, par exemple pour le sommet A (*fig.* 562).

Réciproquement, tout point S de l'espace, jouissant de la propriété que le rapport des distances d'un point quelconque M d'une ellipse (E) à ce point et à une droite fixe Δ du plan de l'ellipse soit constant, est le sommet d'un cône de révolution passant par (E). En effet, si l'on mène le plan P passant par Δ et S, le rapport des distances de tout point M de l'ellipse à P et à S sera constant, ce qui signifie que la droite SM fait un angle constant avec le plan P.

Il est dès lors tout naturel d'appeler les points tels que S des foyers de l'ellipse. Le lieu des foyers d'une ellipse (E) dans l'espace est une hyperbole (H) et, réciproquement, le lieu des foyers de l'hyperbole (H) est l'ellipse (E). Ces deux courbes associées (E), (H) forment ce qu'on appelle un *système de coniques focales*.

A chaque foyer S de la conique (E) correspond une directrice Δ située dans le plan de la conique. Toutes ces directrices sont parallèles entre elles, et le rapport $\frac{MS}{M\Delta}$ des distances à un foyer et à la directrice correspondante reste invariablement égal à l'excentricité $\frac{c}{a}$. On aura alors, en prenant deux foyers distincts,

$$\frac{MS}{M\Delta} = \frac{MS'}{M\Delta'} = \frac{c}{a} = \frac{MS \pm MS'}{M\Delta \pm M\Delta'},$$

d'où il résulte que la somme ou la différence des distances de tous les points d'une conique à deux foyers distincts reste constante. En examinant successivement tous les cas qui peuvent se présenter, on arrive à cette conclusion :

Soient F_1 et F_2 deux foyers quelconques, D_1 et D_2 les directrices correspondantes; pour tout point M de la conique situé entre D_1 et D_2, la somme des distances est constante; pour tout point M' de la conique non situé entre D_1 et D_2, la différence est constante.

Si, la conique étant une ellipse, F_1 et F_2 sont sur une même branche d'hyperbole focale, c'est toujours la différence qui est constante; si, dans les mêmes conditions, F_1 et F_2 sont sur deux branches différentes de l'hyperbole focale, ce qui est le cas des foyers ordinaires, on a toujours à prendre la somme.

Dans le cas où F_1 et F_2 sont deux foyers d'hyperboles, la différence reste constante en valeur absolue, mais son signe change quand on passe d'une branche de la courbe à l'autre.

Ces résultats se déduisent d'ailleurs immédiatement par continuité de ceux relatifs aux foyers ordinaires.

3. *Problème d'Apollonius. Cercles tangents à trois cercles donnés.* — La solution de Gergonne, que je supposerai connue, apprend (*Géométrie,* Rouché et de Comberousse, *fig.* 239) que deux cercles tangents d'un même groupe ω et ω' admettent le centre radical S de A, B, C comme centre de similitude et l'axe de similitude A'B'C' comme axe radical. La droite $\omega\omega'$ passe donc par S et est perpendiculaire à A'B'C', résultat qui sera utilisé plus loin. On voit en outre que deux cercles d'un même groupe sont en même temps réels ou imaginaires, mais il ne m'a pas semblé facile d'obtenir par cette méthode le nombre de solutions réelles correspondant à chaque système de positions relatives des trois cercles donnés A, B, C.

L'artifice employé dans le IIe Livre de *Géométrie* pour mener les tangentes communes à deux cercles me paraît très propre à donner une discussion exclusivement géométrique. Il y aurait toutefois lieu de le préciser grâce à l'emploi de cycles au lieu de cercles (*Géométrie,* Rouché et de Comberousse, p. 271). En effet, nous allons être amené à reconnaître qu'il ne serait pas vrai de dire d'une manière générale que, si un cercle d'un des groupes touche A extérieurement, et B et C intérieurement, le second cercle du même groupe touche A intérieurement, et B et C extérieurement. Au contraire, il est toujours exact de dire que la détermination de deux cercles d'un même groupe revient à « construire un cycle touchant trois cycles donnés » (*Géométrie,* Rouché et de Comberousse, p. 279). Quoi qu'il en soit, je ferai le calcul en m'appuyant sur la formule qui donne la distance tangentielle de deux cycles (*Géométrie,* Rouché et de Comberousse, p. 277). Si l'on prend pour axe des x l'axe de transformation et pour axe des y une droite perpendiculaire; si l'on désigne en outre par

R et r les rayons des deux cycles, par P et p les abscisses et par D et d les ordonnées de leurs centres, la formule en question peut s'écrire

$$T^2 = (P - p)^2 + (D - d)^2 - (R - r)^2.$$

Si donc les cycles donnés A, B, C sont représentés respectivement par (P, D, R), (P′, D′, R′), (P″, D″, R″) et le cycle inconnu ω par (p, d, r), on a, pour déterminer les trois inconnues p, d, r, les trois équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &(P - p)^2 + (D - d)^2 - (R - r)^2 = 0,\\ &(P' - p)^2 + (D' - d)^2 - (R' - r)^2 = 0,\\ &(P'' - p)^2 + (D'' - d)^2 - (R'' - r)^2 = 0.\end{aligned}\right.$$

On peut évidemment prendre $P = D = 0$, et alors, en posant $R - r = \rho$ et retranchant successivement la première équation (1) des deux autres, on est ramené à

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} p^2 + d^2 - \rho^2 &= 0,\\ P'p + D'd + (R' - R)\rho &= F,\\ P''p + D''d + (R'' - R)\rho &= G,\end{aligned}\right.$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} F &= \tfrac{1}{2}[P'^2 + D'^2 - (R' - R)^2],\\ G &= \tfrac{1}{2}[P''^2 + D''^2 - (R'' - R)^2].\end{aligned}\right.$$

Un procédé commode pour résoudre les équations (2) consiste à remarquer que ces équations ont pour conséquence

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} p & d & -\rho\sqrt{-1}\\ P' & D' & (R' - R)\sqrt{-1}\\ P'' & D'' & (R'' - R)\sqrt{-1}\end{vmatrix}^2 = \text{const}.$$

Posant, pour abréger,

$$H = \tfrac{1}{2}[(P' - P'')^2 + (D' - D'')^2 - (R' - R'')^2].$$

on trouve, par un calcul facile,

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} p & d & -\rho \\ P' & D' & R'-R \\ P'' & D'' & R''-R \end{vmatrix} = \sqrt{2FGH}.$$

Remplaçant la première des équations (2) par (5), on aperçoit immédiatement que l'on aura deux solutions réelles pour $FGH > 0$ et deux solutions imaginaires pour $FGH < 0$.

D'après la théorie des cycles, les équations (2) et (5) s'interprètent aussi bien pour R, R' ou R'' négatifs que pour R, R', R'' positifs. Mettant les signes des rayons en évidence, on voit que, A, B, C étant les centres des trois cercles, la discussion dépendra des six quantités suivantes :

$$2F = \overline{BC}^2 - (R'-R'')^2, \qquad 2F' = \overline{BC}^2 - (R'+R'')^2,$$
$$2G = \overline{CA}^2 - (R''-R)^2, \qquad 2G' = \overline{CA}^2 - (R''+R)^2,$$
$$2H = \overline{AB}^2 - (R-R')^2, \qquad 2H' = \overline{AB}^2 - (R+R')^2.$$

Les cycles ω, ω', tangents à trois cycles A, B, C de même sens, seront réels si $FGH > 0$, et imaginaires si $FGH < 0$. Les cycles ω, ω', tangents à trois cycles A, B, C dont deux, B et C, ont un même sens et le troisième, A, le sens contraire, seront réels si $FG'H' > 0$, et imaginaires si $FG'H' < 0$.

Or $F < 0$ indique que les cercles B et C sont intérieurs l'un à l'autre, $F > 0$ qu'ils sont sécants ou extérieurs, $F' < 0$ qu'ils sont intérieurs ou sécants, $F' > 0$ qu'ils sont extérieurs.

Il sera dès lors facile d'obtenir tout ce qu'on désire. Laissant de côté les cas particuliers où deux ou trois des cercles donnés sont tangents entre eux, il n'y a que trois positions relatives possibles pour deux cercles tels que B et C; ils sont intérieurs, sécants ou extérieurs. Pour trois cercles A, B, C, considérés deux à deux, le nombre de positions relatives possibles est le nombre de combinaisons avec répétition de trois objets trois à trois, c'est-à-dire $\frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$. Je désignerai les dix positions par ces abréviations faciles à comprendre :

EEE, SSS, III, EES, EEI, ESS, EII, SSI, SII, ESI.

Chacun des cas EEE, EII, SSS donne huit solutions. En effet :

1° EEE

$$F > 0, \quad G > 0, \quad H > 0, \quad F' > 0, \quad G' > 0, \quad H' > 0;$$
$$FGH > 0, \quad FG'H' > 0, \quad F'GH' > 0, \quad F'G'H > 0;$$

2° EII

$$F > 0, \quad G < 0, \quad H < 0, \quad F' > 0, \quad G' < 0, \quad H' < 0;$$

3° SSS

$$F > 0, \quad G > 0, \quad H > 0, \quad F' < 0, \quad G' < 0, \quad H' < 0.$$

Le deuxième cas EII montre très nettement qu'il n'y a pas lieu de dire que si ω touche B et C extérieurement, A intérieurement, ω' touche B et C intérieurement, A extérieurement. On pourrait d'aillenrs s'en persuader même en se bornant au premier cas EEE.

On a quatre solutions pour EES, ESS, SSI, SII, ESI :

4° EES

$$F > 0, \quad G > 0, \quad H > 0, \quad F' < 0, \quad G' > 0, \quad H' > 0;$$

5° ESS

$$F > 0, \quad G > 0, \quad H > 0, \quad F' > 0, \quad G' < 0, \quad H' < 0;$$

6° SSI

$F < 0, \quad G > 0, \quad H > 0, \quad F' < 0, \quad G' < 0, \quad H' < 0;$

7° SII

$F > 0, \quad G < 0, \quad H < 0, \quad F' < 0, \quad G' < 0, \quad H' < 0;$

8° ESI

$F > 0, \quad G > 0, \quad H < 0, \quad F' > 0, \quad G' < 0, \quad H' < 0.$

Enfin, on ne trouve aucune solution pour EEI et III :

9° EEI

$F < 0, \quad G > 0, \quad H > 0, \quad F' < 0, \quad G' > 0, \quad H' > 0;$

10° III

$F < 0, \quad G < 0, \quad H < 0, \quad F' < 0, \quad G' < 0, \quad H' < 0.$

En résumé, sur dix cas, trois donnent huit solutions; cinq en donnent quatre; deux n'en donnent aucune. Le nombre de solutions est toujours un multiple de 4.

Si l'on se reporte à la *fig.* 239 de la *Géométrie,* par Rouché et de Comberousse, et qu'on considère A, B, C comme les centres de trois sphères, il est clair que le cercle de Dupuis, relatif à la sphère A, est à l'intersection de cette sphère et du plan vertical ayant aa' comme trace horizontale. Les cercles de Dupuis seront donc réels ou imaginaires en même temps que les cercles ω et ω'. On est donc ramené à la question précédente. Sur chaque sphère A le nombre des cercles de Dupuis réels est 4 ou 2. Le Tableau de discussion précédent s'applique sans modification, les sphères A, B, C étant intérieures, sécantes ou extérieures en même temps que leurs cercles d'intersection par le plan ABC.

4. *Généralisation du cercle directeur.* — Les centres ω et ω' (voir *fig.* 239, *Géométrie,* Rouché et de Combe-

rousse) de deux cercles d'un même groupe sont toujours les foyers d'une conique, ellipse ou hyperbole suivant les cas, qui passe par les centres A, B, C des trois cercles donnés.

Pour le démontrer, on pourrait examiner successivement les dix cas énumérés dans le numéro précédent. Cette étude serait nécessaire, si l'on voulait connaître avec précision la position relative des cercles A, B, C et de la conique; elle permettrait, dans le cas de l'hyperbole, de décider si A, B et C sont ou ne sont pas sur la même branche. Mais on serait exposé à oublier certains cas particuliers, ce qui enlèverait à la démonstration la rigueur désirable.

Je m'appuierai sur ce théorème, facile à démontrer, que tous les cercles A, B, C, ... tangents à deux cycles donnés ω et ω' ont leurs centres sur une conique. Pour l'établir par le calcul, il suffirait d'éliminer r entre les deux premières équations (1) du numéro précédent; P, D, P' D', R, R' étant des constantes; p, d les coordonnées d'un point du lieu. La démonstration purement géométrique ne présente pas de difficultés. Les cercles de centres ω et ω' peuvent être extérieurs, sécants ou intérieurs; cela fait seulement trois cas dont chacun se décompose en deux nouveaux cas, suivant que l'on considère deux cycles de même sens ou de sens contraires. Dans chacun des six cas, il est facile de voir dans quelles régions du plan peuvent se trouver les centres A, B, C.

La *fig.* 239 montre aussitôt que les tangentes en A, B, C sont les perpendiculaires abaissées de ces points sur les cordes aa', bb', cc'. En effet, d'après les propriétés focales, la tangente en A doit être bissectrice de l'angle des rayons vecteurs $\omega A a$, $\omega' a' A$.

La conique, lieu du point A, se trouve ici caractérisée par une propriété qui est une généralisation évidente de celle du cercle directeur : « Le lieu des centres des cercles tangents à un cercle de centre F′ et passant par un point F est une conique dont F et F′ sont les foyers. » Si le cercle ω' se réduit à un point, le cercle ω devient le cercle directeur.

Sur la *fig.* 239 on voit que toutes les cordes de contact aa' passent par le centre de similitude S des deux cercles ω et ω' et que la tangente en A est la perpendiculaire abaissée de A sur aa'. Si ω' se réduit à un point, le point a' vient en ω', le point a est le symétrique du foyer par rapport à la tangente et l'on retrouve la construction bien connue de la tangente.

Ces considérations générales fournissent en outre l'explication du rôle théorique que joue, dans le problème d'Apollonius, le cercle orthogonal aux trois cercles A, B, C. Le cercle orthogonal rencontre le cercle A en deux points O et O′ que l'on détermine en menant des tangentes du centre radical S au cercle A. Comme A_1 est le pôle de aa'S relativement au cercle A (*fig.* 239), la droite OO′ passe par A_1. On a donc cet énoncé : Le cercle orthogonal des trois cercles A, B, C admet comme axe radical avec le cercle A une droite OO′ qui rencontre en A_1 l'axe de similitude A′B′C′ (*fig.* 239); la polaire de A_1 relativement au cercle A est la corde de contact cherchée aa'. D'autre part, on a évidemment

$$A_1O.A_1O' = \overline{A_1a}^2 = \overline{A_1a'}^2;$$

le point A_1 a même puissance par rapport au cercle orthogonal et aux deux cercles ω et ω'. Il en sera de même des points B_1 et C_1, de sorte que A′B′C′ est l'axe radical commun des cercles ω et ω' et du cercle orthogonal. Si ω et ω' se coupent en deux points réels, le cercle orthogonal passera aussi par ces deux points; ce résultat est d'ailleurs d'évidence immédiate. Chaque point de la conique ABC est centre d'un cercle tangent à la fois à ω et ω', la corde des contacts passant par S; puisque, pour des points antihomologues a et a', le produit $Sa.Sa'$ est constant, tous ces cercles coupent orthogonalement le cercle orthogonal à A, B et C; or, si ω et ω' se coupent en un point réel M, M sera le centre d'un cercle de rayon nul tangent à la fois à ω et ω' et devant couper orthogonalement le cercle orthogonal; M sera sur le cercle orthogonal, et la tangente à la conique en ce point sera précisément la tangente au cercle orthogonal, car MS est bissectrice du triangle $M\omega\omega'$, vu que le point S, centre de similitude, divise la ligne des centres $\omega\omega'$ dans le rapport des rayons. Le cercle orthogonal ne peut d'ailleurs pas rencontrer la conique ABC en d'autres points; car si le rayon R du cercle de centre A est différent de zéro, le carré du rayon du cercle orthogonal est $\overline{SA}^2 - R^2$, ce qui indique que le point A lui est extérieur.

On aurait été conduit tout naturellement à cette propriété du cercle orthogonal d'être tangent à la conique ABC aux points où il la rencontre en remarquant que la conique ABC est le lieu géométrique des points dont le rapport des distances à un cercle fixe, le cercle orthogonal, et à une droite fixe, l'axe de similitude, est constant. En effet, la distance d'un cercle A de rayon R au cercle orthogonal est R; d'autre part, la démonstration de Gergonne apprend que trois cercles quelconques A, B, C tangents aux cycles ω et ω' admettent l'axe radical de ω et ω' comme axe de similitude, et les distances de trois cercles à un axe de similitude sont proportionnelles aux rayons. Or on sait, d'après le théorème de Daudelin, que « le lieu des points A, B, C, tels que le rapport qui existe entre les tangentes menées de ces points à un cercle fixe et les distances de ces mêmes points à une droite fixe soit constant, est une section conique » (*Géométrie,* Rouché et de Comberousse, n° 1081). On retrouverait ainsi, par voie purement géométrique, des résultats dont j'aurai besoin dans la suite; mais j'ai cru devoir renoncer à cette méthode, à cause d'une difficulté inattendue que j'expliquerai plus loin (n° 8).

Pour terminer, je résume les résultats très simples qui suffiront à la définition de la cyclide. Soient ω et ω', les foyers d'une ellipse et $2a$ la longueur du grand axe. La généralisation de la notion du cercle directeur montre, d'une manière presque intuitive, que tout point de l'ellipse peut être considéré comme centre d'un cercle de rayon ρ tangent à deux cercles fixes, l'un de centre ω et de rayon k, l'autre de centre ω' et de rayon $2a-k$, k étant un nombre fixe choisi arbitrairement. Les deux foyers ayant des propriétés identiques, on pourra toujours supposer $k < 2a-k$, c'est-à-dire k inférieur à a.

Si k varie de 0 à $a-c$, les deux cercles de centres ω et ω' sont intérieurs; on doit les considérer comme cycles de sens contraires et la *fig.* 239 fait voir très nettement le résultat. Pour $k = a-c$, les deux cercles directeurs deviennent tangents. Lorsque k varie de $a-c$ à a, les deux cercles directeurs deviennent sécants; leurs points d'intersection réels sont situés sur l'ellipse et la droite qui les joint, confondue d'abord avec la tangente à l'extrémité du grand axe, se déplace parallèlement à elle-même, toujours dans le même sens, jusqu'à venir coïncider avec le petit axe. Le résultat est encore facile à apercevoir; la *fig.* 239 en montrerait un exemple très net, si l'on menait les deux cercles qui touchent, l'un B et C intérieurement et A extérieurement, l'autre B et C extérieurement et A intérieurement. Enfin, pour k négatif, les cercles directeurs sont toujours intérieurs l'un à l'autre, mais il faut les considérer comme cycles de même sens. Le cercle de rayon ρ ayant son centre en un point de l'ellipse est intérieur au grand cercle directeur, mais comprend à son intérieur le petit cercle directeur. On verra nettement la figure en imaginant trois cercles A, B, C sécants deux à deux, représentant les sections, par le plan des centres, de trois sphères se coupant en deux points réels, et en menant les cercles ω et ω' qui touchent à la fois extérieurement ou intérieurement les trois cercles donnés.

En tout il n'existe que trois cas distincts pour l'ellipse, comme on le vérifierait encore en examinant successivement les dix cas indiqués dans la discussion du problème d'Apollonius (n° 3).

6. *Cercles de Dupuis.* — La *fig.* 239 peut être examinée à un nouveau point de vue. Au lieu de cercles de centres A, B, C, ω, ω', imaginons les sphères dont ces cercles représentent les sections par le plan de la figure. Pour préciser, je me bornerai au cas où le lieu des centres A, B, C, ... est une ellipse. On a donc une ellipse ayant pour foyers ω et ω'; les foyers sont centres de deux sphères fixes de rayons k et $2a-k$; chaque point tel que A de l'ellipse est centre d'une sphère de rayon ρ tangente aux deux sphères fixes.

Cela posé, tout point de l'hyperbole focale qui coupe en ω et ω' le plan du tableau peut être regardé comme centre d'une sphère de rayon fixe, tangente à la fois à toutes les sphères de rayon ρ dont le centre est un point de l'ellipse ABC. La démonstration repose sur la propriété énoncée à la fin du n° 2. Soit M un point de l'hyperbole focale, situé par exemple sur la même branche que le foyer ω, centre du cercle directeur de rayon k. Si l'on désigne par d la distance du point M à un point quelconque A de l'ellipse, on doit avoir, 2α désignant une constante,

$$d - (\rho + k) = 2\alpha.$$

On en tire

$$d = \rho + (2\alpha + k).$$

Comme $2\alpha + k$ est une constante, le théorème est démontré. La quantité k peut être négative; comme 2α varie avec le point M, on voit que lorsque k est négatif, $2\alpha + k$ peut être négatif ou positif. Voici alors ce qui a lieu. Les trois sphères A, B, C se coupent en deux points réels P et Q situés sur l'hyperbole focale. Pour tout point M de l'hyperbole situé comme ω entre P et Q, c'est-à-dire à l'intérieur des trois sphères, la sphère fixe de centre M est intérieure à toutes les sphères A, B, C, ... Pour tout point de l'hyperbole focale non situé entre P et Q, la sphère fixe de centre M touche extérieurement toutes les sphères telles que A, B, C, ...

Le point de contact de la sphère de centre A avec la sphère de centre M est sur la droite AM. Le lieu des points de contact avec la sphère A de toutes les sphères ayant leurs centres aux divers points de l'hyperbole focale sera l'intersection de la sphère A avec le cône lieu de AM. Or on a démontré (n° 2) que le cône qui a pour sommet un point quelconque A de l'ellipse focale et pour base l'hyperbole M est de révolution et a pour axe la tangente à l'ellipse ABC en A. L'intersection avec la sphère A est donc un petit cercle dont le plan est perpendiculaire au plan de l'ellipse ABC. Comme on connaît déjà deux points a, a' (*fig.* 239) de l'intersection, il devient évident que le lieu des points de contact est le petit cercle vertical, intersection de la sphère A par le plan vertical aa'. On trouve précisément le cercle de Dupuis. Si, d'ailleurs, on se reporte au problème de la sphère tangente à quatre sphères données (*Géomé-*

trie Rouché et de Comberousse, n° 952), il est facile de constater que le centre de toute sphère de Dupuis est dans le même plan que l'hyperbole focale. En effet, les deux sphères ω et ω', tangentes aux sphères fixes A, B, C, D (*Géométrie* Rouché et de Comberousse, p. 266 et 267), admettant pour centre de similitude le centre radical des quatre sphères et pour plan radical le plan de similitude, leurs centres seront sur la perpendiculaire abaissée du centre radical sur le plan de similitude. En se reportant à la *fig.* 239, on voit que cette perpendiculaire est dans le plan vertical mené par S perpendiculairement à la droite $A'B'C'$. L'intersection du plan qui doit contenir les centres de toutes les sphères de Dupuis avec le cône de sommet A s'appuyant sur le cercle de Dupuis est, d'après ce qui précède, l'hyperbole focale. On est donc certain d'avoir obtenu, au moyen de l'hyperbole focale, toutes les sphères tangentes à la fois aux trois sphères fixes données A, B, C. (*A suivre.*)

ERRATA AUX TABLES DE LOGARITHMES DE SCHRÖN.

Page x, deuxième colonne, ligne 29, *au lieu de* 1,8954 986, *lisez* $\bar{1}$,8954 986.

THÉORÈME DE D'ALEMBERT;

PAR M. E. AMIGUES.

Soit $f(z)$ un polynôme à coefficients réels ou imaginaires. On donne à z toutes les valeurs réelles ou imaginaires, et soit z_0 la valeur pour laquelle ou l'une des valeurs pour lesquelles le module de $f(z)$ est le plus petit.

Changeons de variable, en posant

$$z = z_0 + u;$$

nous avons alors

$$f(z) = f(z_0 + u) = a_0 + b_0\sqrt{-1} + \Sigma u^p(a_p + b_p\sqrt{-1}),$$

p étant un entier positif au moins égal à 1, et $a_0 + b_0\sqrt{-1}$ représentant $f(z_0)$.

Cela posé, je dis que l'on a

$$a_0 + b_0\sqrt{-1} = 0,$$

c'est-à-dire

$$f(z_0) = 0,$$

ou qu'à défaut l'on a, pour toutes les valeurs de p,

$$a_p = 0, \qquad b_p = 0.$$

En d'autres termes, l'équation

$$f(z) = 0$$

admet une racine, à moins que le polynôme $f(z)$ ne se réduise à une constante.

Soit, en effet, $a_0 + b_0\sqrt{-1} \gtrless 0$. Le carré du module de $f(z_0)$ est $a_0^2 + b_0^2$. Nous savons que le carré M^2 du module de $f(z_0 + u)$ ne peut pas être inférieur à $a_0^2 + b_0^2$. Calculons M^2. Pour cela, posons

$$u = \rho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega),$$

afin de séparer dans $f(z_0 + u)$ la partie réelle et la partie imaginaire. On a alors

$$f(z_0 + u) = a_0 + \Sigma\rho^p(a_p \sin p\omega - b_p \cos p\omega) \\ + \sqrt{-1}\,[b_0 + \Sigma\rho^p(a_p \sin p\omega + b_p \cos p\omega)];$$

on a alors

$$M^2 = [a_0 + \Sigma\rho^p(a_p \cos p\omega - b_p \sin p\omega)]^2 \\ + [b_0 + \Sigma\rho^p(a_p \sin p\omega + b_p \cos p\omega)]^2.$$

Soit i la plus petite valeur de p, pour laquelle les coefficients a_p et b_p ne sont pas nuls tous deux. On a alors, en ordonnant M^2 par rapport aux puissances ascendantes de ρ,

$$M^2 = a_0^2 + b_0^2 + 2\rho^i(a_0 a_i \cos i\omega - a_0 b_i \sin i\omega \\ + b_0 a_i \sin i\omega + b_0 b_i \cos i\omega) + \ldots.$$

L'ensemble des termes qui suivent $a_0^2 + b_0^2$ ne peut pas être négatif. Donc le coefficient de ρ^i ne peut pas l'être. J'en conclus que ce coefficient est nul pour toute valeur de ω; car, s'il n'était pas nul pour $\omega = \omega_1$, il aurait des signes contraires pour $\omega = \omega_1$ et $\omega = \omega_1 + \frac{\pi}{i}$.

Cette identité en ω se traduit par les deux équations suivantes

$$a_0 a_i + b_0 b_i = 0,$$
$$b_0 a_i - a_0 b_i = 0,$$

qui n'ont d'autre solution que

$$a_i = 0, \qquad b_i = 0.$$

On prouvera alors que l'on a, de même,

$$a_{i+1} = 0, \qquad b_{i+1} = 0,$$

et toujours ainsi.

Remarque I. — La démonstration suppose que la valeur z_0 est finie. Or on sait que, lorsque la variable z est infinie, le module de $f(z)$ est lui-même infini.

Remarque II. — On s'est appuyé sur ce principe évident et que, en tout cas, on peut démontrer en toute rigueur : lorsqu'on a des nombres positifs en nombre fini ou infini, ou bien l'un d'eux est plus petit que tous les autres, ou bien plusieurs sont égaux entre eux et moindres que tous les autres, ou bien une infinité de ces nombres sont égaux entre eux et inférieurs à tous les autres, ou enfin on peut calculer deux nombres aussi rapprochés qu'on veut et entre lesquels sont compris les nombres les plus petits. On démontrerait ce principe comme j'ai démontré, dans mes *Leçons d'Algèbre,* le théorème suivant : *Une suite illimitée de nombres croissants qui demeurent inférieurs à un nombre donné est une suite convergente.*

NOTE SUR LE PROBLÈME DE MÉCANIQUE PROPOSÉ A L'AGRÉGATION EN 1889;

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. DE SAINT-GERMAIN A M. ROUCHÉ.

Puisque vous voulez bien penser que je pourrai intéresser quelques lecteurs des *Nouvelles Annales* en leur indiquant une solution du problème de Mécanique proposé à l'agrégation en 1889, je vais le faire brièvement, la question étant facile.

Soient :

OX_1, OY_1, OZ trois axes de coordonnées rectangulaires;

S une surface définie par l'équation

$$z = e^{x_1+y_1};$$

D une droite dont les équations sont $x_1 = y_1 = z$.

Le système des axes OX_1, OY_1, OZ et de S tourne avec une vitesse constante ω autour de la droite D supposée fixe. Il s'agit de déterminer le mouvement relatif d'un point M, ayant une masse égale à l'unité, assujetti à rester sur S et sollicité par une force connue F : pression sur la surface. Étudier le cas où F est la résultante de deux forces, l'une égale à $\omega^2 MO$ et dirigée suivant MO, l'autre égale à $3\omega^2 MH$, dirigée suivant la perpendiculaire MH abaissée du point M sur un plan mené par l'origine normale à D. A l'instant initial, le mobile se trouve sur OZ avec une vitesse dont les projections sur OX_1 et sur OY_1 sont $-\frac{2\omega}{\sqrt{3}}$ et $\frac{2\omega}{\sqrt{3}}$.

La surface S étant un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la bissectrice de l'angle formé par OY_1 et le prolongement OX'_1 de OX_1, il est naturel de prendre pour axes coordonnés mobiles l'axe donné OZ et les bissectrices OX, OY des angles X_1OY_1, $Y_1OX'_1$. L'équation de S devient

$$z = e^{x\sqrt{2}}. \tag{1}$$

Quant aux équations du mouvement relatif du point M sur cette surface, on sait les former immédiatement : ce sont celles qui représenteraient le mouvement absolu du mobile s'il était libre, mais sollicité par quatre forces : 1° la force donnée F; 2° une force N, normale à S et représentant l'action de cette surface; 3° la force d'inertie d'entraînement; 4° la force centrifuge composée. Les composantes des deux dernières sont données par les formules de Rivals et de Coriolis, et les équations cherchées sont de la forme bien connue

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \mathrm{X} + \mathrm{N}\cos a \\ &\quad + m\left[\omega^2 x - p(px+qy+rz) + y\frac{dr}{dt} - z\frac{dq}{dt}\right] \\ &\quad + 2m\left(r\frac{dy}{dt} - q\frac{dz}{dt}\right), \end{aligned}$$

. . . .

Dans le problème proposé, m est égal à 1, et les composantes de la rotation d'entraînement sont, on le voit sans peine,

$$p = \frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \qquad q = 0, \qquad r = \frac{\omega}{\sqrt{3}};$$

les cosinus directeurs de la réaction N, supposée positive quand elle fait un angle aigu avec OZ, peuvent se mettre sous la forme

$$\cos a = -\frac{z\sqrt{2}}{\sqrt{1+2z^2}}, \qquad \cos b = 0, \qquad \cos c = \frac{1}{\sqrt{1+2z^2}};$$

les composantes X, Y, Z de F sont connues et l'on a, pour les équations du mouvement relatif,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \mathrm{X} - \frac{\mathrm{N}z\sqrt{2}}{\sqrt{1+2z^2}} + \omega^2\frac{x - z\sqrt{2}}{3} + \frac{2\omega}{\sqrt{3}}\frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \mathrm{Y} + \omega^2 y + \frac{2\omega}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}\frac{dz}{dt} - \frac{dx}{dt}\right), \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \mathrm{Z} + \frac{\mathrm{N}}{\sqrt{1+2z^2}} + \omega^2\sqrt{2}\frac{z\sqrt{2} - x}{3} - \frac{2\omega}{\sqrt{3}}\frac{dy}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Ces équations donnent la solution du problème général : les deux équations qui résultent de l'élimination de N et l'équation (1) permettent de déterminer x, y, z en fonction du temps; la première ou la troisième des équations (2) fait ensuite connaître la réaction N, égale et opposée à la pression supportée par S.

Dans le cas particulier proposé, les composantes X, Y, Z de F sont respectivement, après de simples réductions,

$$-\omega^2(3x + z\sqrt{2}), \qquad -\omega^2 y, \qquad -\omega^2(x\sqrt{2} + 2z),$$

et l'on trouve, pour les équations du mouvement relatif du point M,

$$(3) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -4\omega^2\frac{2x + z\sqrt{2}}{3} + \frac{2\omega}{\sqrt{3}}\frac{dy}{dt} - \frac{Nz\sqrt{2}}{\sqrt{1+2z^2}},$$

$$(4) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2\omega}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}\frac{dz}{dt} - \frac{dx}{dt}\right),$$

$$(5) \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -4\omega^2\frac{x\sqrt{2} + z}{3} - \frac{2\omega\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{dy}{dt} + \frac{N}{\sqrt{1+2z^2}}.$$

A l'instant initial, on a

$$x = y = 0, \qquad z = 1,$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0, \qquad \frac{dy}{dt} = v_0 = \frac{2\omega\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Cela posé, l'équation (4) peut s'intégrer une fois et donne, eu égard à ces conditions initiales,

$$(6) \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{2\omega}{\sqrt{3}}(z\sqrt{2} - x).$$

En ajoutant membre à membre les équations (3), (4), (5), après les avoir multipliées respectivement par $2\,dx$, $2\,dy$, $2\,dz$, on a l'équation des forces vives sous la forme

$$d.v^2 = -\tfrac{8}{3}\omega^2(x\sqrt{2} + z)(dx\sqrt{2} + dz);$$

l'intégrale première est, eu égard aux conditions initiales,

$$v^2 = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} = 4\omega^2 - \frac{4}{3}\omega^2(x\sqrt{2} + z)^2.$$

Si l'on remplace $\frac{dy}{dt}$ par sa valeur (6), puis z et $\frac{dz}{dt}$ par leurs valeurs en fonction de x et $\frac{dx}{dt}$, on pourra tirer de cette équation

$$(7) \qquad \frac{dx^2}{dt^2} = 4\omega^2 \frac{1 - x^2 - e^{2x\sqrt{2}}}{1 + 2e^{2x\sqrt{2}}};$$

on en déduirait l'expression de t en fonction de x à l'aide d'une quadrature qu'on ne peut réduire aux fonctions élémentaires.

L'élimination de dt entre les équations (6) et (7) donne l'équation de la projection de la trajectoire sur le plan des xy

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{(\sqrt{2}e^{x\sqrt{2}} - x)\sqrt{1 + 2e^{2x\sqrt{2}}}}{\sqrt{3}\sqrt{1 - x^2 - e^{2x\sqrt{2}}}};$$

le second membre n'est réel que si x est compris entre les valeurs o et α qui annulent le dénominateur (la méthode de Newton donne bien facilement $-0,96702$ pour valeur approchée de α); le numérateur ne s'annule jamais. De ces résultats et de l'examen des équations (6) et (7), on conclut aisément que la trajectoire ondule sur la surface S entre deux génératrices qu'elle va toucher alternativement; x et z sont des fonctions périodiques du temps; y croît indéfiniment.

En différentiant l'équation (7) par rapport au temps, on en déduit la valeur de $\frac{d^2x}{dt^2}$ qui, avec la valeur (6) de

$\frac{dy}{dt}$, permet de tirer N de l'équation (3); on peut mettre sa valeur sous la forme

$$N = 4\omega^2 z(3 - x\sqrt{2} - 2x^2 - 2xz^2\sqrt{2})(1 + 2z^2)^{-\frac{3}{2}};$$

la réaction de la surface reste constamment positive.

NOTE SUR UN THÉORÈME DE M. HUMBERT ET SUR UN THÉORÈME DE M. FOURET;

PAR M. ÉMILE BOREL.

I. — SUR UN THÉORÈME DE M. HUMBERT.

Considérons deux courbes algébriques déterminées par leurs équations tangentielles

$$(1) \qquad \begin{cases} f(u, v, w) = 0, \\ \varphi(u, v, w) = 0, \end{cases}$$

et cherchons la somme V des angles que font leurs tangentes communes avec l'axe des x, les coordonnées étant supposées rectangulaires.

Pour avoir les directions des tangentes communes, éliminons w entre les équations (1); nous obtenons l'équation

$$(2) \qquad R(u, v) = 0.$$

Le résultat $R(u, v)$ étant homogène par rapport à u et v, les valeurs de $-\frac{u}{v}$, racines de l'équation (2), sont les tangentes trigonométriques des angles que font avec l'axe des x les tangentes communes aux deux courbes.

Si l'on pose

$$R(u, v) \equiv A_0 u^m + A_1 u^{m-1} v + A_2 u^{m-2} v^2 + \ldots + A_m v^m,$$

on a

$$\operatorname{tang} V = \frac{A_1 - A_3 + A_5 - A_7 + \ldots}{A_0 - A_2 + A_4 - A_6 + \ldots}.$$

On peut remarquer que, si l'on pose

$$R(1, i) = M + N i,$$

on en déduit aisément

$$\operatorname{tang} V = \frac{N}{M}.$$

Or, pour calculer $R(1, i)$, il suffit d'éliminer w entre les équations

$$(3) \qquad \begin{cases} f(1, i, w) = 0, \\ \varphi(1, i, w) = 0. \end{cases}$$

Il résulte de ce qui précède que l'angle V ne dépend que des deux équations précédentes; il ne change évidemment pas si l'on remplace les équations (1) par les suivantes

$$(4) \qquad \begin{cases} f(u, v, w) + (u^2 + v^2) f_1(u, v, w) = 0, \\ \varphi(u, v, w) + (u^2 + v^2) \varphi_1(u, v, w) = 0, \end{cases}$$

f_1 et φ_1 étant des polynômes homogènes. On obtient ainsi ce théorème, trouvé par M. Humbert, d'une manière toute différente :

La somme des angles que font avec un axe fixe les tangentes communes à deux courbes algébriques ne change pas quand on remplace ces courbes par des courbes homofocales.

En particulier, on peut les remplacer par leurs foyers réels; les tangentes communes sont alors les droites que joignent, de toutes les manières possibles, les foyers réels. La deuxième partie du problème proposé, en 1889, à l'École Polytechnique n'est qu'un cas particulier de cette dernière remarque.

II. — Sur un théorème de M. Fouret.

1. *Étant données deux courbes algébriques variables, mais rencontrant chacune les axes de coordonnées en des points déterminés ; le produit des coefficients angulaires des droites qui joignent l'origine à leurs points d'intersection est constant.*

On peut énoncer ce théorème d'une autre manière, se prêtant mieux à une transformation, en introduisant une troisième droite arbitraire passant par l'origine ; le coefficient angulaire d'une quatrième droite variable ne diffère que par un facteur constant du rapport anharmonique qu'elle forme avec les trois premières. On obtient ainsi ce nouvel énoncé :

Étant données deux courbes algébriques variables, mais rencontrant chacune les axes de coordonnées en des points déterminés, le produit des rapports anharmoniques formés par les droites joignant l'origine à leurs points d'intersection, avec les axes et une droite fixe passant par leur point de concours, est constant.

Le théorème corrélatif est le suivant :

Lorsque les tangentes, issues de deux points fixes à deux courbes algébriques variables, sont déterminées, le produit des rapports anharmoniques que forment avec ces deux points fixes et un troisième point fixe arbitraire situé sur la droite qui les joint les divers points de rencontre de leurs tangentes communes avec cette droite, est déterminé.

2. Pour démontrer directement ce dernier théorème, il suffit de se donner les équations des deux courbes variables en coordonnées tangentielles, les deux points fixes étant deux sommets du triangle de référence. Ces équations seront de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} f(u, v, w) + uv f_1(u, v, w) = 0, \\ \varphi(u, v, w) + uv\, \varphi_1(u, v, w) = 0, \end{cases}$$

les polynômes f et φ étant déterminés, f_1 et φ_1 étant variables. On a l'équation des points d'intersection de leurs tangentes communes avec la droite ($u = 0$, $v = 0$), en éliminant w entre les équations précédentes; soit

$$R(u, v) = 0$$

l'équation ainsi obtenue. Le produit des rapports anharmoniques considérés est égal, à un facteur constant près, au quotient des coefficients des plus hautes puissances de u et de v, c'est-à-dire au quotient

$$R(0, v) : R(u, 0).$$

Or on peut obtenir $R(0, v)$, en annulant u dans les équations (1) et en éliminant w entre les deux équations

$$f(0, v, w) = 0,$$
$$\varphi(0, v, w) = 0,$$

et, de même, $R(u, 0)$ peut être obtenu en éliminant w entre les deux équations

$$f(u, 0, w) = 0,$$
$$\varphi(u, 0, w) = 0;$$

ce qui prouve que $R(0, v)$ et $R(u, 0)$ sont indépendants de $f_1(u, v, w)$ et de $\varphi_1(u, v, w)$, et, par suite, le théorème est démontré.

3. Si l'on suppose que les deux points fixes sont les points cycliques, chacun des rapports anharmoniques considérés a pour logarithme l'angle de la tangente commune correspondante avec un axe fixe, à un facteur constant près. Le produit des rapports anharmoniques étant constant, la somme de leurs logarithmes est constante, et l'on retrouve ainsi ce théorème :

La somme des angles, que font avec un axe fixe les tangentes communes à deux courbes algébriques, est déterminée lorsque la position de leurs foyers est déterminée.

C'est le théorème de M. Humbert.

4. On peut généraliser le théorème de M. Fouret, en remplaçant les droites fixes par des courbes algébriques quelconques.

Considérons un faisceau linéaire de courbes

$$\varphi + \lambda\varphi_1 = 0.$$

On peut appeler *rapport anharmonique* de quatre courbes de ce faisceau, le rapport anharmonique des quatre valeurs correspondantes de λ; ce rapport est égal au rapport anharmonique des tangentes à ces quatre courbes, en l'un quelconque de leurs points communs. Cela posé, on a ce théorème :

Lorsque les points d'intersection de deux courbes algébriques variables avec deux des courbes d'un faisceau linéaire sont déterminés, le produit des rapports anharmoniques que forment avec ces deux courbes-là et une troisième courbe fixe quelconque du faisceau les diverses courbes du faisceau qui passent chacune par l'un des points d'intersection des courbes variables est aussi déterminé.

Soient, en effet,

$$(1) \qquad f + \varphi\varphi_1\psi = 0,$$
$$(2) \qquad f_1 + \varphi\varphi_1\psi_1 = 0$$

les équations des courbes variables,

$$(3) \qquad \varphi + \lambda\varphi_1 = 0$$

étant l'équation générale des courbes du faisceau; f et f_1 sont déterminés, ψ et ψ_1 sont variables.

Les rapports anharmoniques considérés sont proportionnels aux valeurs de λ, correspondant aux courbes du faisceau (3) qui passent par les points d'intersection des courbes (1) et (2). Pour former l'équation donnant ces valeurs de λ, il suffit d'éliminer x, y, z entre les équations (1), (2), (3), et le théorème énoncé revient à ceci : le produit des racines de l'équation en λ obtenue est indépendant des coefficients de ψ et de ψ_1. Il suffit de montrer que les termes extrêmes de l'équation en λ, ordonnée suivant les puissances décroissantes par exemple, ne dépendent pas de ces coefficients.

En effet, supposons, par exemple, que le terme constant de l'équation renferme un coefficient de ψ; nous pourrions résoudre par rapport à ce coefficient l'équation obtenue en égalant à zéro le terme considéré; ce qui revient à dire que, pour une valeur particulière de ce coefficient de ψ, l'équation en λ aurait une racine nulle, et, par conséquent, les trois équations

$$f + \varphi\varphi_1\psi = 0,$$
$$f_1 + \varphi\varphi_1\psi_1 = 0,$$
$$\varphi = 0$$

auraient une solution commune; il en serait de même des trois équations

$$f = 0, \qquad f_1 = 0, \qquad \varphi = 0,$$

ce qui ne peut être si l'on n'a fait aucune hypothèse sur les coefficients de f, f_1, φ.

On verrait de la même manière que le coefficient de la plus haute puissance de λ est indépendant de ψ et de ψ_1. Le théorème est donc démontré.

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES DE 1889;

PAR M. GAMBEY,
Professeur au lycée de Rouen.

On donne un cône du second degré C *et deux quadratiques* A, A', *inscrites dans ce cône; on considère une quadrique variable* S *inscrite dans le même cône, et touchant les quadriques données* A *et* A' *en des points variables* α *et* α'.

1° *Démontrer que la droite* $\alpha\alpha'$ *passe par un point fixe.*

2° *Trouver le lieu de la droite d'intersection des plans tangents à la surface* S *aux points* α *et* α'.

3° *Démontrer que le lieu du pôle d'un plan fixe* P *par rapport à la surface* S *se compose de deux quadriques bitangentes.*

4° *Trouver le lieu de la droite qui passe par les points de contact de ces deux quadriques, lorsque le plan* P *se déplace, en restant parallèle à un plan tangent au cône* C.

Nous prendrons pour axes de coordonnées les axes principaux du cône donné, dont l'équation sera ainsi

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 0.$$

Celles des trois quadriques pourront s'écrire de la manière suivante :

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{A} & AX^2+BY^2+CZ^2-(aX\ +bY\ +cZ\ +d)^2=0,\\
\mathrm{A}' & AX^2+BY^2+CZ^2-(a_1X+b_1Y+c_1Z+d_1)^2=0,\\
\mathrm{S} & AX^2+BY^2+CZ^2-(lX\ +mY+nZ+p)^2=0.
\end{array}
$$

Les coefficients a, b, c, d; a_1, b_1, c_1, d_1 sont donnés; mais l, m, n, p sont variables.

Soient x, y, z les coordonnées du point α, et x', y', z' celles du point α'. Je pose, pour abréger l'écriture,

$$
(1)\qquad \left\{
\begin{array}{l}
Ax^2+By^2+Cz^2 = V,\\
ax\ +by\ +cz\ +d=P,\\
a_1x'+b_1y'+c_1z'+d_1=P'_1,\\
lx\ +my\ +nz\ +p\ =Q,\\
lx'\ +my'+nz'\ +p\ =Q';
\end{array}\right.
$$

et je considère V, P, ... comme des inconnues auxiliaires. En outre, en prévision de certaines relations importantes que j'aurai à employer, je fais encore

$$
(2)\qquad \left\{
\begin{array}{ll}
\dfrac{l^2}{A}+\dfrac{m^2}{B}+\dfrac{n^2}{C}-1=\lambda, & \dfrac{a^2}{A}+\dfrac{b^2}{B}+\dfrac{c^2}{C}-1=k,\\[2ex]
\dfrac{al}{A}+\dfrac{bm}{B}+\dfrac{cn}{C}=\mu, & \dfrac{a_1^2}{A}+\dfrac{b_1^2}{B}+\dfrac{c_1^2}{C}-1=k_1.\\[2ex]
\dfrac{a_1l}{A}+\dfrac{b_1m}{B}+\dfrac{c_1n}{C}=\mu_1. &
\end{array}\right.
$$

Cela posé, l'identification des plans tangents en α aux quadriques A et S donne

$$
x=\frac{PQ(ld-ap)}{A(dP-pQ)},\qquad y=\frac{PQ(md-bp)}{B(dP-pQ)},\qquad z=\frac{PQ(nd-cp)}{C(dP-pQ)}.
$$

Substituant ces valeurs de x, y, z dans celles des relations (1) qui les contiennent, on obtient les trois équations suivantes

$$(3)\quad \begin{cases} V(dP - pQ)^2 \\ \quad = P^2Q^2\left[\dfrac{(ld - ap)^2}{A} + \dfrac{(md - bp)^2}{B} + \dfrac{(nd - cp)^2}{C}\right], \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} (P - d)(dP - pQ) \\ \quad = PQ\left[\dfrac{(ld - ap)a}{A} + \dfrac{(md - bp)b}{B} + \dfrac{(nd - cp)c}{C}\right], \\ (Q - d)(dP - pQ) \\ \quad = PQ\left[\dfrac{(ld - ap)l}{A} + \dfrac{(md - bp)m}{B} + \dfrac{(nd - cp)n}{C}\right], \end{cases}$$

auxquelles il faut joindre

$$V = P^2 = Q^2.$$

Prenons d'abord $P - Q = 0$. En remplaçant V par P^2, ainsi que Q par P, dans l'équation (3), et supprimant le facteur P^4, on obtient la relation

$$\frac{(ld - ap)^2}{A} + \frac{(md - bp)^2}{B} + \frac{(nd - cp)^2}{C} - (p - d)^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(\text{A})\qquad d^2\lambda - 2pd(\mu - 1) + p^2k = 0.$$

Cette condition exprime que le plan

$$(5)\qquad lX + mY + nZ + p - (aX + bY + cZ + d) = 0$$

est tangent à la quadrique A en α, à cause de $P - Q = 0$.

En éliminant P et Q entre les équations (4), on retrouve l'équation (A).

Si l'on prend, au contraire, $P + Q = 0$, on arrive à la condition

$$(\text{B})\qquad d^2\lambda - 2pd(\mu + 1) + p^2k = 0,$$

qui exprime que le plan

$$(6)\qquad lX + mY + nZ + p + (aX + bY + cZ + d) = 0$$

est tangent aussi en α à la quadrique A. Ainsi, selon que l'on prend $P - Q = 0$ ou $P + Q = 0$, le plan (5) est le plan tangent commun aux quadriques A et S en α, ou bien c'est le plan (6).

Il est évident que la considération du plan tangent en α' conduirait à des relations analogues à (A) et à (B), où a, b, c, d seraient remplacées par a_1, b_1, c_1, d_1, et que ce plan tangent est

$$(7) \quad lX + mY + nZ + p - (a_1 X + b_1 Y + c_1 Z + d_1) = 0,$$

si l'on prend $P'_1 - Q' = 0$; ou bien

$$(8) \quad lX + mY + nZ + p - (a_1 X + b_1 Y + c_1 Z + d_1) = 0,$$

si l'on prend $P'_1 + Q' = 0$. Les relations analogues à (A) et à (B) sont

$$(A_1) \qquad d_1^2 \lambda - 2pd_1(\mu_1 - 1) + p^2 k_1 = 0,$$
$$(B_1) \qquad d_1^2 \lambda - 2pd_1(\mu_1 + 1) + p^2 k_1 = 0.$$

Dans l'hypothèse $P - Q = 0$, les expressions de x, y, z sont

$$x = P\frac{ld - ap}{A(d-p)}, \qquad y = P\frac{md - bp}{B(d-p)}, \qquad z = P\frac{nd - cp}{C(d-p)}.$$

Multipliant respectivement par a, b, c et ajoutant, on détermine P, dont la valeur est donnée par la formule

$$P = \frac{d(p-d)}{d(\mu - 1) - pk} = \frac{2pd(p-d)}{d^2\lambda - p^2 k}.$$

La seconde forme est obtenue en éliminant μ à l'aide de la relation (A).

Il en résulte

$$x = \frac{-2pd(ld - ap)}{A(d^2\lambda - p^2 k)}, \quad y = \frac{-2pd(md - bp)}{B(d^2\lambda - p^2 k)}, \quad z = \frac{-2pd(nd - cp)}{C(d^2\lambda - p^2 k)}.$$

Et l'on aurait de même, pour $P'_1 - Q' = 0$,

$$x' = \frac{-2pd_1(ld_1 - a_1 p)}{A(d_1^2\lambda - p^2 k_1)},$$

$$y' = \frac{-2pd_1(md_1 - b_1 p)}{B(d_1^2\lambda - p^2 k_1)},$$

$$z' = \frac{-2pd_1(nd_1 - c_1 p)}{C(d_1^2\lambda - p^2 k_1)}.$$

I. *La droite $\alpha\alpha'$ passe par un point fixe.* — Les équations

$$\frac{X - x}{x' - x} = \frac{Y - y}{y' - y} = \frac{Z - z}{z' - z}$$

de la droite $\alpha\alpha'$, transformées en y substituant les valeurs ci-dessus de x, y, z; x', y', z', peuvent s'écrire

$$\frac{AX(d^2\lambda - p^2 k) + 2pd(ld - ap)}{AX(d_1^2\lambda - p^2 k_1) + 2pd_1(ld_1 - a_1 p)}$$
$$= \frac{BY(d^2\lambda - p^2 k) + 2pd(md - bp)}{BY(d_1^2\lambda - p^2 k_1) + 2pd_1(md_1 - b_1 p)}$$
$$= \frac{CZ(d^2\lambda - p^2 k) + 2pd(nd - cp)}{CZ(d_1^2\lambda - p^2 k_1) + 2pd_1(nd_1 - c_1 p)}.$$

En désignant par ρ la valeur commune de ces trois rapports, et en se bornant au premier, on obtient aisément

$$\frac{AX}{2} = \frac{ad - \rho d_1 d_1 - \frac{l}{p}(d^2 - \rho d_1^2)}{\frac{\lambda}{p^2}(d^2 - \rho d_1^2) - (k - \rho k_1)}.$$

Les seules quantités qui dépendent encore de l, m, n, p sont $\frac{l}{p}$ et $\frac{\lambda}{p^2}$. Si on annule leur coefficient commun $d^2 - \rho d_1^2$, la valeur de X deviendra indépendante de l, m, n, p et, par conséquent, des coordonnées des points α et α'. Il suffit de prendre $\rho = \frac{d^2}{d_1^2}$, et l'on obtient

$$X_0 = \frac{2dd_1(ad_1 - da_1)}{A(d^2 k_1 - kd_1^2)}, \quad Y_0 = \frac{2dd_1(bd_1 - db_1)}{B(d^2 k_1 - kd_1^2)}, \quad Z_0 = \frac{2dd_1(cd_1 - dc_1)}{C(d^2 k_1 - kd_1^2)}.$$

Or les équations tangentielles des quadriques A et A′, savoir

$$d^2\left(\frac{u^2}{A}+\frac{v^2}{B}+\frac{w^2}{C}\right)+2dr\left(\frac{au}{A}+\frac{bv}{B}+\frac{cw}{C}\right)+kr^2=0,$$

$$d_1^2\left(\frac{u^2}{A}+\frac{v^2}{B}+\frac{w^2}{C}\right)+2d_1r\left(\frac{a_1u}{A}+\frac{b_1v}{B}+\frac{c_1w}{C}\right)+k_1r^2=0,$$

donnent aisément les équations des sommets des deux cônes circonscrits à la fois à A et à A′. Ce sont

$$r=0,$$

équation de l'origine, et

$$2dd_1\left(\frac{ad_1-da_1}{A}u+\frac{bd_1-db_1}{B}v+\frac{cd_1-dc_1}{C}w\right)+d^2k_1-kd_1^2=0.$$

Les coordonnées-points de ce second sommet sont donc

$$x_0=\frac{2dd_1(ad_1-da_1)}{A(d^2k_1-kd_1^2)},$$

$$y_0=\frac{2dd_1(bd_1-db_1)}{B(d^2k_1-kd_1^2)},$$

$$z_0=\frac{2dd_1(cd_1-dc_1)}{C(d^2k_1-kd_1^2)}.$$

Ainsi l'on a

$$X_0=x_0,\qquad Y_0=y_0,\qquad Z_0=z_0,$$

et *la droite $\alpha\alpha'$ passe constamment par le sommet du second cône circonscrit à la fois aux deux quadriques* A *et* A′.

II. *Lieu des intersections des plans tangents en α et α'.* — Il suffit, pour l'obtenir, de retrancher membre à membre les équations (5) et (7), ou bien (6) et (8); puis, les équations (5) et (8), ou bien (6) et (7). On obtient ainsi deux plans, savoir

$$(a-a_1)X+(b-b_1)Y+(c-c_1)Z+d-d_1=0,$$

$$(a+a_1)X+(b+b_1)Y+(c+c_1)Z+d+d_1=0.$$

III. *Lieu du pôle d'un plan fixe par rapport aux quadriques* S. — Soit

$$(9)\qquad uX + vY + wZ - 1 = 0$$

un plan fixe, et posons

$$ux + vy + wz - 1 = H,$$

x, y, z étant les coordonnées du pôle du plan (9) par rapport à S. On aura facilement

$$Ax - lQ = pQu,\qquad By - mQ = pQv,\qquad Cz - nQ = pQw;$$

d'où

$$l = \frac{Ax - pQu}{Q},\qquad m = \frac{By - pQv}{Q},\qquad n = \frac{Cz - pQw}{Q},$$

et, en multipliant par x, y, z et ajoutant les résultats, on trouve d'abord

$$(10)\qquad p = \frac{V - Q^2}{HQ};$$

par suite, on a

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} l &= \frac{AHx - (V - Q^2)u}{HQ},\\ m &= \frac{BHy - (V - Q^2)v}{HQ},\\ n &= \frac{CHz - (V - Q^2)w}{HQ}.\end{aligned}\right.$$

La substitution de ces valeurs de l, m, n, p dans les équations (A) et (A_1), par exemple, permet de les mettre sous la forme

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} &hQ^2 - 2dHQ - hV + R^2 - P^2 = 0,\\ &h_1Q^2 - 2d_1HQ - h_1V + R_1^2 - P_1^2 = 0\end{aligned}\right.$$

en supprimant le facteur $V - Q^2$, et en posant encore

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{(a+du)^2}{A}+\frac{(b+dv)^2}{B}+\frac{(c+dw)^2}{C}-1=h,\\ &\frac{(a_1+d_1u)^2}{A}+\frac{(b_1+d_1v)^2}{B}+\frac{(c_1+d_1w)^2}{C}-1=h_1;\end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned} (a+du)x+(b+dv)y+(c+dw)z&=R,\\ (a_1+d_1u)x+(b_1+d_1v)y+(c_1+d_1w)z&=R_1;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax+by+cz+d&=P,\\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1&=P_1.\end{aligned}$$

L'élimination de Q entre les équations obtenues conduit à

$$(C)\quad \left\{\begin{aligned} &[dh_1(P+R)-d_1h(P_1+R_1)]^2\\ &\quad=4(dh_1-hd_1)[(dh_1-hd_1)V+dd_1H(P+R-P_1-R_1)],\end{aligned}\right.$$

équation d'une quadrique circonscrite à la quadrique

$$(dh_1-hd_1)V+dd_1H(P+R-P_1-R_1)=0,$$

le plan de la courbe de contact étant

$$dh_1(P+R)-d_1h(P_1+R_1)=0.$$

En substituant les valeurs de l, m, n, p dans les relations (B) et (B_1), on est encore conduit à la même équation (C).

Mais, si l'on associe (A) avec (B_1), ou (A_1) avec (B), on trouve l'équation d'une autre quadrique analogue à (C), savoir

$$(C')\quad \left\{\begin{aligned} &[dh_1(P+R)-d_1h(P_1+R_1)]^2\\ &\quad=4(dh_1+hd_1)[(dh_1+hd_1)V-dd_1H(P+R+P_1+R_1)].\end{aligned}\right.$$

Ces deux quadriques sont bitangentes.

En effet, pour trouver leur courbe d'intersection, on peut éliminer V entre (C) et (C'), et l'équation obtenue pourra tenir lieu de l'une d'elles.

On arrive ainsi à une équation qui se décompose en deux facteurs linéaires, savoir

$$H = ux + vy + wz - 1 = 0$$

et

$$dh_1(P + R) - hd_1(P_1 + R_1) = 0.$$

Donc, *les quadriques* (C) *et* (C′) *se coupent suivant deux courbes planes et sont, par conséquent, bitangentes.*

IV. *Lieu de la droite des contacts des quadriques* (C) *et* (C′) *quand le plan considéré se déplace en restant parallèle à un plan tangent au cône.* — Si ρ est une indéterminée, l'équation du plan mobile peut s'écrire

$$A\alpha x + B\beta y + C\gamma z = \rho,$$
$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 = 0,$$

avec les conditions

$$A\alpha = \rho u, \qquad B\beta = \rho v, \qquad C\gamma = \rho w;$$

ce qui réduit les relations (13) à

$$k + \frac{2d}{\rho}(a\alpha + b\beta + c\gamma) = h,$$
$$k_1 + \frac{2d_1}{\rho}(a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma) = h_1.$$

Cela posé, les équations de la droite des contacts des quadriques (C) et (C′) étant

$$H = 0 \qquad \text{et} \qquad dh_1(P + R) - hd_1(P_1 + R_1) = 0$$

ou plus simplement

$$H = 0 \qquad \text{et} \qquad dh_1 P - hd_1 P_1 = 0.$$

il suffira d'expliciter ces équations

$$A\alpha x + B\beta y + C\gamma z = \rho,$$

$$\left[dk_1 + \frac{2dd_1}{\rho}(a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma)\right]P$$
$$- \left[d_1 k + \frac{2dd_1}{\rho}(a\alpha + b\beta + c\gamma)\right]P_1 = 0$$

et d'éliminer ρ entre elles, ce qui donne immédiatement

$$(D)\quad \left\{ \begin{array}{l} P[dk_1(A\alpha x + B\beta y + C\gamma z) + 2dd_1(a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma)] \\ \quad - P_1[d_1 k(A\alpha x + B\beta y + C\gamma z) + 2dd_1(a\alpha + b\beta + c\gamma)] = 0, \end{array} \right.$$

équation d'une autre quadrique dont quatre génératrices rectilignes sont mises en évidence.

La question est complètement résolue.

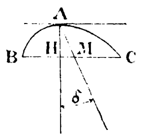
SUR L'ABERRATION DE COURBURE;

PAR M. HUSQUIN DE RHÉVILLE,

Élève de l'École Centrale.

En joignant un point A (*fig.* 1) d'une courbe plane au milieu M de la parallèle BC à la tangente en A, on

Fig. 1.



obtient une droite AM qui, si BC est infiniment rapproché de A, est appelée *axe d'aberration* de la courbe au point A (TRANSON, *Journal de Liouville*, 1841).

Le rapport $\frac{HM}{AH}$ étant en général fini, il en est de même de l'angle HAM que fait l'axe d'aberration avec la normale : cet angle δ est la *déviation de courbure* en A.

Si R et $R + dR$ sont les rayons respectifs des deux cercles (CAA) et (BAA), on a

$$\overline{CH}^2 = (2R - AH)AH,$$
$$\overline{BH}^2 = [2(R + dR) - AH]AH;$$

d'où, en retranchant membre à membre et en remarquant que $\overline{CH}^2 - \overline{BH}^2 = 2HM.BC$,

$$HM.BC = dR.AH$$

et, par suite,

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{HM}{AH} = \frac{dR}{BC} = \frac{dR}{\operatorname{arc} BC}.$$

Or l'arc BC, intercepté par quatre points B, A, A, C distants de ds, est égal à $3\,ds$; on a donc

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{1}{3}\frac{dR}{ds}.$$

Cette forme met en évidence la quantité $\frac{dR}{ds}$, analogue à la courbure $\frac{\varepsilon}{ds}$ et à laquelle le nom d'*aberration de courbure* convient mieux qu'à l'angle δ lui-même. (*Voir* Salmon, *Courbes planes*, p. 512.)

En remarquant que le rayon de courbure R' de la développée est égal à $\frac{dR}{\varepsilon}$, on en déduit $\frac{dR}{ds} = \frac{R'}{R}$, ce qui démontre la formule

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{1}{3}\frac{R'}{R},$$

due à Transon (*loc. cit.*), mais qu'il établit par une méthode fort laborieuse en généralisant une propriété des coniques.

Si l'on appelle $3a$ l'aberration de courbure $\frac{dR}{ds}$ au point A, le paramètre P de la parabole osculatrice est donné par la formule

$$P = \frac{R}{(1 + a^2)^{\frac{3}{2}}},$$

expression dont l'analogie avec celle de la courbure

$$\frac{1}{R} = \frac{q}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \left[p = \frac{dy}{dx}, \quad q = \frac{d^2 y}{dx^2}\right]$$

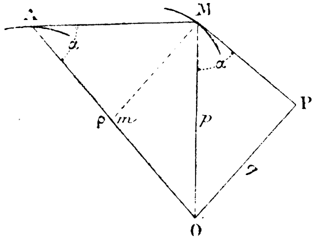
est remarquable.

SUR LA COURBURE D'UNE PODAIRE;

PAR M. HUSQUIN DE RHÉVILLE,
Élève de l'École centrale.

I. Soit M (*fig.* 1) la projection d'un point fixe O sur la tangente en A à une courbe fixe : menons la tan-

Fig. 1.



gente MP au lieu du point M et projetons sur cette droite le point O en P.

Nous désignerons par α l'angle OAM ou son égal OMP.

En posant

$$OA = \rho, \qquad OM = p, \qquad OP = q,$$

le rayon de courbure en A est

$$R = \rho \frac{d\rho}{dp},$$

et le rayon de courbure de la podaire en M est

$$r = p \frac{dp}{dq}.$$

En différentiant l'égalité $p^2 = q\rho$, on obtient

$$dq = \frac{2p\,dp - q\,d\rho}{\rho}.$$

L'élimination de dq donne

$$r = \frac{p\rho\,dp}{2p\,dp - q\,d\rho},$$

et, en remarquant que $\frac{q}{p} = \sin\alpha$, on trouve la formule

$$r = \frac{\rho^2}{2\rho - R\sin\alpha},$$

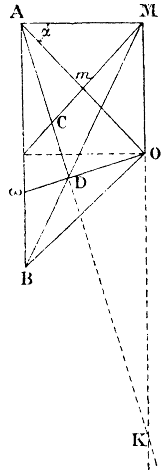
qui se trouve démontrée dans le *Traité d'Analyse* de M. Laurent (t. II, p. 126) par une méthode plus pénible, bien que plus naturelle.

II. La première conséquence de cette expression du rayon de courbure de la podaire est la construction géométrique suivante du centre de courbure de cette courbe relatif au point M.

Soit ω (*fig.* 2) le centre de courbure au point A : je mène OB perpendiculaire à AO jusqu'à sa rencontre en B avec la normale Aω.

Les droites MB et $O\omega$ se coupent en D et la droite AD passe au centre C de courbure de la podaire en M.

Fig. 2.



En effet, si AD prolongée rencontre OM en K, on a

$$\frac{KM}{KO} = \frac{AB}{A\omega} = \frac{\rho}{R\sin\alpha}.$$

Le triangle MOm, coupé par la transversale ACK, donne

$$\frac{MC}{Cm} = \frac{AO}{mA}\,\frac{KM}{KO} = \frac{2\rho}{R\sin\alpha}$$

et, par suite,

$$MC = \frac{\rho^2}{2\rho - R\sin\alpha} = r.$$

Cette construction complètement linéaire est plus simple que celle donnée par M. Mannheim (*Cours de Géométrie descriptive*, p. 197), qui exige la construction d'un cercle.

III. On sait, d'après un théorème de M. du Chatenet (*Nouvelles Annales,* 1886), que si une courbe appartient à la famille $\rho^m = a^m \cos m\omega$, on a

$$\rho = (m+1)\mathrm{R}\sin\alpha;$$

dans ces conditions, on en déduit, pour la valeur du rayon de courbure de sa podaire par rapport au pôle,

$$r = \rho\,\frac{m+1}{2m+1},$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\rho\sin\alpha}{r\sin\alpha} = \frac{p}{r\sin\alpha} = \frac{2m+1}{m+1};$$

on en déduit que :

La podaire de la courbe $\rho^m = a^m \cos m\omega$ par rapport au pôle est la courbe de même famille

$$\rho^{\frac{m}{m+1}} = a^{\frac{m}{m+1}} \cos\frac{m}{m+1}\,\omega.$$

REMARQUES SUR L'OSCULATION;

PAR M. E. CESARO.

Soit

$$(1)\qquad \mathrm{F}(\rho, s, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) = 0$$

l'équation intrinsèque d'une famille de courbes. On sait que ρ, ρ_1, ρ_2, ... étant les rayons de courbure successifs en un point d'une ligne, on a

$$(2)\qquad \rho_1 = \rho\frac{d\rho}{ds}, \qquad \rho_2 = \rho\frac{d\rho_1}{ds}, \qquad \rho_3 = \rho\frac{d\rho_2}{ds}, \qquad \ldots.$$

Si l'on dérive n fois de suite l'équation (1), en tenant compte des égalités (2), on obtient n relations entre les quantités

$$\rho, \quad \rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots, \quad \rho_n, \quad s, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{n-1}.$$

L'élimination de s, a_1, a_2, $\ldots$, a_{n-1}, entre (1) et les n relations obtenues donne

$$\Phi(\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots \rho_n) = 0.$$

Cette équation caractérise la famille considérée. Elle n'est, en effet, qu'une équation différentielle du $n^{\text{ième}}$ ordre, dont l'intégrale générale renferme n constantes arbitraires; mais $n - 1$ de ces constantes constituent le système de paramètres qui figure dans l'équation (1), et la $n^{\text{ième}}$ est déterminée par le choix de l'origine des arcs.

Voici quelques exemples. L'équation

$$a^2\rho^2 + b^2 s^2 = a^2 b^2$$

donne, par dérivations successives,

$$a^2\rho_1 + b^2 s = 0, \qquad a^2\rho_2 + b^2\rho = 0, \qquad a^2\rho_3 + b^2\rho_1 = 0.$$

L'équation caractéristique des lignes cycloïdales est donc

$$\rho\rho_3 - \rho_1\rho_2 = 0. \tag{3}$$

Si l'on particularise ces lignes, de manière que leur équation intrinsèque ne contienne plus qu'un seul paramètre, il est clair qu'on doit obtenir une relation où ρ_3 ne figure pas. C'est ainsi que la développante de cercle, la spirale logarithmique, la cycloïde, l'hypocycloïde à trois rebroussements sont respectivement caractérisées par les équations

$$\rho_2 = 0, \qquad \rho\rho_2 - \rho_1^2 = 0, \qquad \rho + \rho_2 = 0, \qquad 9\rho + \rho_2 = 0;$$

mais, en tant qu'elles appartiennent à la famille des lignes cycloïdales, leur équation caractéristique commune est toujours (3).

On trouve, de la même manière, les équations caractéristiques suivantes :

$$\rho^2 + 2\rho_1^2 - \rho\rho_2 = 0 \qquad \text{(chaînette d'égale résistance)},$$
$$4\rho^2 + 3\rho_1^2 - 2\rho\rho_2 = 0 \qquad \text{(chaînette parabolique)},$$
$$9\rho^2 + 4\rho_1^2 - 3\rho\rho_2 = 0 \qquad \text{(parabole)},$$
$$18\rho^2 + 5\rho_1^2 - 3\rho\rho_2 = 0 \qquad \text{(hyperbole équilatère)}.$$

Ces équations sont toutes du même type

$$(4) \qquad \lambda\rho^2 + (\mu + 1)\rho_1^2 - \rho\rho_2 = 0.$$

Cela tient à ce que les équations intrinsèques des courbes considérées peuvent être mises sous la forme commune

$$s = \int \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}\left[\left(\frac{\rho}{a}\right)^{2\mu} - 1\right]}},$$

qui représente

la *chaînette d'égale résistance*.......	pour	$\lambda = 1$,	$\mu = 1$,
la *cycloïde*.........................	»	$\lambda = -1$,	$\mu = -1$,
l'*hypocycloïde à trois rebroussements*.	»	$\lambda = -9$,	$\mu = -1$,
la *chaînette*........................	»	$\lambda = 2$,	$\mu = \frac{1}{2}$,
la *parabole*.........................	»	$\lambda = 3$,	$\mu = \frac{1}{3}$,
l'*hyperbole équilatère*..............	»	$\lambda = 6$,	$\mu = \frac{2}{3}$,
la *cardioïde*........................	»	$\lambda = -\frac{1}{9}$,	$\mu = -1$,
la *lemniscate* de *Bernoulli*..........	»	$\lambda = \frac{2}{9}$,	$\mu = 2$

L'interprétation géométrique de l'équation (4) est aisée. Soient C, C_1, C_2, ... les centres de courbure successifs en un point M de la courbe. Si l'on partage CM dans le rapport de λ à $1 - \lambda$, et CC_1 dans le rapport de $\lambda + \lambda\mu$

à $1 - (\lambda + \lambda\mu)$, et que, par le premier point de division on tire la perpendiculaire à la droite qui le joint au second point de division, cette perpendiculaire passe par C_2. On construit ainsi le troisième centre de courbure, connaissant les deux premiers centres.

Toute ligne de Ribaucour vérifie une équation de la forme (4), les coefficients λ et μ étant liés par l'égalité $\lambda\mu = 1$. Il en est de même des spirales sinusoïdes, la relation nécessaire entre les coefficients étant

$$\lambda(2\mu - 1)^2 = \mu.$$

Enfin, si $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{H}$ sont les premiers membres des équations caractéristiques de la parabole et de l'hyperbole équilatère, il y a encore à remarquer les courbes définies par l'équation

$$\mathfrak{H} = k\mathfrak{P} \tag{5}$$

ou, ce qui revient au même, par l'équation (4) lorsqu'on pose entre les coefficients la relation $\lambda = 9\mu$. L'équation (5) représente l'hyperbole équilatère, la spirale logarithmique, la ligne de Ribaucour d'indice $-\frac{1}{2}$, l'hypocycloïde à trois rebroussements, etc., pour $k = 0, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \ldots$.

L'équation intrinsèque des coniques donne immédiatement

$$\rho_1^2 + 9\rho^2\left[1 - \left(\frac{a\rho}{b^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]\left[1 - \left(\frac{b\rho}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right] = 0,$$

c'est-à-dire

$$9\rho^2 + \rho_1^2 = \frac{9(a^2+b^2)\rho^{\frac{8}{3}}}{(ab)^{\frac{4}{3}}} - \frac{9\rho^{\frac{10}{3}}}{(ab)^{\frac{2}{3}}}; \tag{6}$$

d'où l'on déduit, par une première dérivation,

$$9\rho^2 + \rho\rho_2 = \frac{12(a^2+b^2)\rho^{\frac{8}{3}}}{(ab)^{\frac{4}{3}}} - \frac{15\rho^{\frac{10}{3}}}{(ab)^{\frac{2}{3}}},$$

a et b étant des demi-axes. Ces équations donnent

$$(7) \qquad a^2+b^2=\frac{9\mathfrak{H}\rho^4}{\mathfrak{P}^2}, \qquad ab=\frac{27\rho^5}{\mathfrak{P}^{\frac{3}{2}}},$$

et l'on comprend, maintenant, pourquoi les équations caractéristiques de la parabole et de l'hyperbole équilatère sont $\mathfrak{P}=0$ et $\mathfrak{H}=0$. On voit, en outre, que la conique considérée est une ellipse ou une hyperbole suivant que $\mathfrak{P}>0$ ou $\mathfrak{P}<0$. Du reste, les équations (7) montrent que la connaissance des trois premiers rayons de courbure suffit pour la détermination intrinsèque de la conique. On trouve

$$a=\frac{3\rho^2}{\mathfrak{P}\sqrt{2}}\sqrt{\mathfrak{H}+\sqrt{\mathfrak{H}^2-36\mathfrak{P}\rho^2}},$$

$$b=\frac{3\rho^2}{\mathfrak{P}\sqrt{2}}\sqrt{\mathfrak{H}-\sqrt{\mathfrak{H}^2-36\mathfrak{P}\rho^2}}.$$

On doit remarquer que le radical inférieur est toujours réel, à cause de l'identité

$$\mathfrak{H}^2-36\mathfrak{P}\rho^2=(5\rho_1^2-3\rho\rho_2)^2+36\rho^2\rho_1^2.$$

Si l'on dérive l'une ou l'autre des égalités (7), on obtient

$$(8) \qquad 40\rho_1^3+36\rho^2\rho_1+9\rho^2\rho_3-45\rho\rho_1\rho_2=0.$$

Telle est l'équation caractéristique des coniques. On en déduit plusieurs constructions simples du quatrième centre de courbure au moyen des trois premiers centres. Il est utile de remarquer que le premier membre de l'équation (8) peut être mis sous la forme suivante

$$\mathfrak{C}=9\rho(\rho\rho_3-\rho_1\rho_2)+4\rho_1(5\mathfrak{P}-2\mathfrak{H}).$$

Si deux courbes ont un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre, le contact de leurs développées est du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre; d'où il résulte que, pour établir un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre entre deux courbes, en un point M, il suffit de faire coïncider les $n-1$ premiers centres de courbure, C, C_1, C_2, ..., C_{n-2}, d'une courbe avec les centres correspondants de l'autre. Pour l'établissement du contact, toute courbe peut donc être remplacée, aux environs de M, par une autre courbe, possédant en commun avec la première les $n-1$ premiers centres de courbure. Cette courbe auxiliaire, rapportée à la tangente et à la normale en M, a, si l'on veut, une équation de la forme

$$(9) \qquad y = \frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{\beta}{6}x^3 + \frac{\gamma}{24}x^4 - \ldots,$$

le second membre étant limité aux $n-1$ premiers termes. On sait que

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}, \qquad \rho_{n+1} = \frac{1+y'^2}{y''}\frac{d\rho_n}{dx},$$

y', y'', y''', ... étant les dérivées successives de y par rapport à x. Cela posé, pour $x=0$, $y=0$, $y'=0$, on trouve successivement, en dérivant (9),

$$(10) \qquad \alpha = \frac{1}{\rho}, \qquad \beta = \frac{\rho_1}{\rho^3}, \qquad \gamma = \frac{3(\rho^2+\rho_1^2)-\rho\rho_2}{\rho^5}, \qquad \ldots.$$

Maintenant, si l'on veut qu'il y ait contact du $n^{\text{ième}}$ ordre entre une courbe quelconque et une autre courbe, représentée, par rapport à la tangente et à la normale communes, par une équation entre x et y, il suffit de remplacer, dans cette équation, y par l'expression (9), en négligeant les puissances de x dont le degré surpasse n. On obtient une équation en x, qui doit admettre n racines nulles.

Proposons-nous, par exemple, de construire la conique osculatrice à une courbe donnée, en un point M. L'équation d'une conique touchant la courbe M est

$$y = Ax^2 + By^2 + 2Cxy. \tag{11}$$

Pour qu'il y ait osculation, il faut que le contact soit du quatrième ordre. On peut donc limiter le second membre de (9) aux trois premiers termes, et négliger ensuite, lors de la substitution de y dans (11), les puissances de x dont le degré surpasse 4. Il vient d'abord

$$\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{6}x + \frac{\gamma}{24}x^2 = A + \frac{B\alpha^2}{4}x^2 + 2C\left(\frac{\alpha}{2}x - \frac{\beta}{6}x^2\right);$$

d'où, en identifiant,

$$A = \frac{\alpha}{2}, \qquad B = \frac{3\alpha\gamma - 4\beta^2}{18\alpha^3}, \qquad C = -\frac{\beta}{6\alpha}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans (11), après y avoir remplacé α, β, γ par les expressions (10), on trouve que l'équation de la conique osculatrice est

$$(3\rho x - \rho_1 y)^2 + \mathfrak{P}y^2 = 18\rho^3 y. \tag{12}$$

Les coordonnées du centre O de cette conique sont

$$x_0 = \frac{3\rho^2\rho_1}{\mathfrak{P}}, \qquad y_0 = \frac{9\rho^3}{\mathfrak{P}}. \tag{13}$$

Si l'on observe que $3\rho x_0 = \rho_1 y_0$, on retrouve la construction du deuxième centre de courbure, indiquée par Maclaurin. La seconde égalité (13) fournit une construction simple du troisième centre de courbure. Il est facile de continuer la discussion de la conique (12). On trouve, par exemple, que l'angle φ des asymptotes et l'inclinaison ψ du grand axe sur la tangente sont donnés par les formules

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{6\rho}{\mathfrak{H}}\sqrt{-\mathfrak{P}}, \qquad \operatorname{tang}2\psi = \frac{6\rho\rho_1}{5\rho_1^2 - 3\rho\rho_2},$$

qui permettent de résoudre une foule de questions.

On détermine facilement la trajectoire du point O par les méthodes habituelles. L'application des formules connues

$$(14) \qquad \frac{\delta x}{ds} = \frac{dx}{ds} - \frac{y-\rho}{\rho}, \qquad \frac{\delta y}{ds} = \frac{dy}{ds} + \frac{x}{\rho}$$

aux coordonnées (13) donne

$$(15) \qquad \frac{\delta x_0}{ds} = \frac{\mathfrak{C}\rho_1}{\mathfrak{P}^2}, \qquad \frac{\delta y_0}{ds} = \frac{3\mathfrak{C}\rho}{\mathfrak{P}^2}.$$

On voit donc, avant tout, que le point O se déplace tangentiellement à OM. Autrement dit, le lieu des centres des coniques osculatrices à une ligne (M) est une courbe de poursuite de (M). La ligne (M) est donc, en quelque sorte, une développante de (O), mais une développante obtenue en supposant que le fil, primitivement enroulé sur (O) et dont un point décrit (M) lors du déroulement, subisse à chaque instant une extension ou une contraction convenable.

Il est clair, d'après (15), que le rapport des vitesses des points O, M est

$$(16) \qquad \frac{ds_o}{ds} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{P}^2}\sqrt{9\rho^2+\rho_1^2},$$

l'indice o servant à distinguer tout ce qui se rapporte à la trajectoire de O. On trouve ensuite, par les méthodes habituelles,

$$(17) \qquad \rho_o = \frac{\mathfrak{C}\rho(9\rho^2+\rho_1^2)^{\frac{3}{2}}}{\mathfrak{P}^3}.$$

Les deux dernières relations fournissent, dans chaque cas particulier, l'équation intrinsèque de (O).

Considérons, par exemple, l'hypocycloïde à trois rebroussements, représentée, comme on sait, par l'équation

$$\rho^2 + 9s^2 = a^2,$$

a étant les $\frac{4}{3}$ du diamètre du cercle directeur. On a

$$\mathfrak{P} = 36a^2, \qquad \mathfrak{H} = 45a^2, \qquad \mathfrak{C} = -3240a^2 s.$$

Les formules (16) et (17) donnent, au signe près,

$$s_o = \frac{15s^2}{4a} - \frac{5a}{24}, \qquad \rho_o = \frac{15\rho s}{8a}.$$

On déduit de là que le lieu des centres des coniques osculatrices est représenté par l'équation

$$4\rho_o^2 + 9s_o^2 = \frac{25a^2}{64}.$$

Ce lieu est donc une hypocycloïde à six points de rebroussement : trois de ces points coïncident avec les points de rebroussement de l'hypocycloïde donnée, les trois autres leur sont diamétralement opposés sur la circonférence directrice commune.

Veut-on imposer à la conique osculatrice une condition, on ne doit plus retenir dans le second membre de (9) que deux termes, afin de laisser dans (11) un coefficient libre. On obtient ainsi

$$\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{6}x = \mathrm{A} + \mathrm{C}\alpha x,$$

d'où

$$\mathrm{A} = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2\rho}, \qquad \mathrm{C} = -\frac{\beta}{6\alpha} = -\frac{\rho_1}{6\rho^2}.$$

Par suite, l'équation (11) se transforme en (12), $\mathfrak{P}$ restant arbitraire. On aura la parabole osculatrice ou l'hyperbole équilatère osculatrice, suivant qu'on remplacera $\mathfrak{P}$ par o ou par $(9\rho^2 + \rho_1^2)$. Nous aurions pu éviter de répéter le calcul qui nous a conduit à l'équation (12), et cela, tout simplement, en éliminant ρ_2 entre cette équation et l'équation caractéristique de la conique spéciale qu'on veut considérer.

Arrêtons-nous à étudier la parabole osculatrice. On sait chercher, en partant de son équation, les coordonnées du foyer, l'équation de la directrice, etc. Cette équation est

$$2\rho_1 x + 6\rho y + 3\rho^2 = 0,$$

et sa dérivation donne

$$(\rho_2 - 3\rho)x + 4\rho_1 y + 2\rho\rho_1 = 0.$$

On tire de là $x = 0$, $y = -\frac{1}{2}\rho$; par conséquent, la directrice de la parabole osculatrice à une courbe quelconque touche son enveloppe sur la normale à la courbe. Le contact a lieu au point symétrique, par rapport à M, du milieu de MC. En appliquant aux coordonnées du point de contact les formules (14), on obtient, par des calculs connus,

$$(18) \qquad \frac{ds_0}{ds} = \frac{\sqrt{9\rho^2 + \rho_1^2}}{2\rho}, \qquad \rho_0 = \frac{(9\rho^2 + \rho_1^2)^{\frac{3}{2}}}{2\mathfrak{P}}.$$

Si $\rho^2 + 9s^2 = a^2$, il vient $\rho_0 = \frac{3a}{8}$. Donc les paraboles osculatrices d'une hypocycloïde à trois rebroussements ont pour directrices les tangentes au cercle directeur. Si $\mathfrak{H} = 0$, les formules (18) donnent

$$\rho_0 = \frac{1}{2}\sqrt{9\rho^2 + \rho_1^2}, \qquad s_0 = \int \frac{\rho_0}{\rho}\, ds,$$

ou bien, en tenant compte de (6) et de l'équation intrinsèqne de l'hyperbole équilatère,

$$\rho_0 = \frac{3}{2}\rho\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{2}{3}}, \qquad s_0 = \frac{1}{2}\int \frac{\rho^{\frac{2}{3}}\, d\rho}{\sqrt{\rho^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{4}{3}}}};$$

d'où, par l'élimination de ρ,

$$s_0 = \frac{1}{5}\int \frac{d\rho_0}{\sqrt{\left(\frac{2\rho_0}{3a}\right)^{\frac{4}{5}} - 1}}.$$

Par conséquent, l'enveloppe des directrices des paraboles osculatrices à une hyperbole équilatère est une des courbes définies par l'équation (4), pour les valeurs 10 et $\frac{2}{5}$ des coefficients λ et μ. C'est une spirale sinusoïde d'indice $-\frac{2}{3}$.

Quant au foyer, ses coordonnées sont

$$(19) \qquad \xi = -\frac{3\rho^2\rho_1}{2(9\rho^2+\rho_1^2)}, \qquad \eta = \frac{9\rho^3}{2(9\rho^2+\rho_1^2)}.$$

Ces valeurs nous disent que le foyer est symétrique, par rapport à la tangente, de la projection de M sur la directrice. Les formules (14), appliquées aux coordonnées (19), donnent

$$(20) \qquad \frac{\delta\xi}{ds} = \frac{(9\rho^2-\rho_1^2)\mathfrak{p}}{2(9\rho^2+\rho_1^2)^2}, \qquad \frac{\delta\eta}{ds} = \frac{6\mathfrak{p}\rho\rho_1}{2(9\rho^2+\rho_1^2)^2}.$$

Ces formules nous montrent, avant tout, que la normale au lieu du foyer passe au quart de MC, et que la tangente au même lieu divise en parties égales le segment déterminé par la directrice sur la tangente à (M), à partir de M. On trouve ensuite

$$(21) \qquad \frac{ds}{ds_o} = 2\left(\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{p}} - 1\right), \qquad \frac{\rho}{\rho_o} = 2\left(3\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{p}} - 5\right).$$

Par exemple, si $\rho^2 + 9s^2 = a^2$,

$$s_o = 2s, \qquad \rho_o = \tfrac{2}{5}\rho, \qquad 25\rho_o^2 + 9s_o^2 = 4a^2.$$

Donc les foyers des paraboles osculatrices d'une hypocycloïde à trois rebroussements sont situés sur l'épicycloïde ayant mêmes points de rebroussement. De même, si $\mathfrak{H} = 0$, les formules (21) donnent $s_o = \frac{1}{2}s$, $\rho_o = \frac{1}{10}\rho$, d'où l'on déduit que les foyers des paraboles osculatrices à une hyperbole équilatère se trouvent sur une des courbes définies par l'équation (4), correspondant aux valeurs $\frac{6}{25}$ et $\frac{2}{3}$ des coefficients λ et μ. Enfin toute courbe représentée par la même équation, mais correspondant aux valeurs $-\frac{3}{2}$ et $-\frac{1}{6}$ des coefficients, est telle que les foyers de ses paraboles osculatrices sont alignés sur une droite.

En remplaçant $\mathfrak{P}$ par $-(9\rho^2+\rho_1^2)$ dans (12), on obtient l'équation de l'hyperbole équilatère osculatrice

$$x^2-y^2=\frac{2\rho_1}{3\rho}xy+2\rho y.$$

Les coordonnées du centre sont $x_0=2\xi$, $y_0=-2\eta$. Ceci nous montre que le centre de l'hyperbole équilatère, osculatrice en un point M d'une courbe, est le symétrique de M par rapport à la directrice de la parabole osculatrice, en M, à la même courbe; puis, en vertu de (19) et (20),

$$\frac{dx_0}{ds}=\frac{(9\rho^2-\rho_1^2)\mathfrak{H}}{(9\rho^2+\rho_1^2)^2},\qquad \frac{dy_0}{ds}=-\frac{6\mathfrak{H}\rho\rho_1}{(9\rho^2+\rho_1^2)^2};$$

d'où

$$\frac{ds}{ds_0}=\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{H}}-1,\qquad \frac{\rho}{\rho_0}=3\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{H}}-1.$$

Si $\rho^2+9s^2=a^2$,

$$s_0=5s,\qquad \rho_0=\tfrac{5}{7}s,\qquad 49\rho_0^2+9s_0^2=25a^2.$$

Donc les centres des hyperboles équilatères osculatrices d'une hypocycloïde à trois rebroussements sont situés sur l'épicycloïde étoilée, qui a mêmes points de rebroussement. De même, pour $\mathfrak{P}=0$, on voit que les hyperboles équilatères osculatrices d'une parabole ont leurs centres sur la parabole symétrique de la première, par rapport à la directrice commune : résultat évident. Enfin les courbes dont les hyperboles équilatères osculatrices ont les centres sur une droite sont représentées par une équation (4), pour les valeurs $\frac{3}{2}$ et $\frac{1}{6}$ des coefficients.

Les résultats qui précèdent sont facilement extensibles à une infinité de familles de courbes, comprenant la famille des coniques d'une part, celle des lignes cycloïdales de l'autre. Chaque famille est caractérisée par un indice n, et toute courbe (M) de la famille possède dans son plan un cercle tel, que la polaire de M par rapport à ce cercle détache de la normale en M, à partir de ce point, un segment égal à $n+1$ fois le rayon de courbure. Les coniques sont caractérisées par l'indice -2, les lignes cycloïdales par l'indice o. L'équation intrinsèque générale de ces lignes est

$$(22) \qquad s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{d\rho}{\sqrt{\lambda\rho^{\frac{2n}{n-1}} - \mu\rho^{\frac{2n+2}{n-1}} - 1}}.$$

On en déduit, par dérivations successives,

$$\rho^2 + \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 \rho_1^2 = \lambda\rho^{\frac{4n-2}{n-1}} - \mu\rho^{\frac{4n}{n-1}},$$

$$\rho^2 + \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 \rho\rho_2 = \frac{2n-1}{n-1}\lambda\rho^{\frac{4n-2}{n-1}} - \frac{2n}{n-1}\mu\rho^{\frac{4n}{n-1}};$$

puis

$$(23) \qquad \lambda\rho^{\frac{4n-2}{n-1}} = \frac{n+1}{(n-1)^2}\mathfrak{P}, \qquad \mu\rho^{\frac{4n}{n-1}} = \frac{n+1}{(n-1)^2}\mathfrak{H},$$

après avoir posé, pour abréger,

$$\mathfrak{P} = (n-1)^2\rho^2 + (n+1)^2\rho_1^2 + (n^2-1)(\rho_1^2 - \rho\rho_2),$$

$$\mathfrak{H} = \frac{x}{n+1}[(n-1)^2\rho^2 + (n+1)^2\rho_1^2] + (n^2-1)(\rho_1^2 - \rho\rho_2).$$

C'est ainsi qu'on détermine la courbe (22), qu'on veut mettre en contact du quatrième ordre avec une courbe quelconque.

Dans toute famille, définie par son indice, il existe une ligne de Ribaucour, caractérisée par l'équation $\mathfrak{P} = 0$, et une spirale sinusoïde, caractérisée par l'équation $\mathfrak{H} = 0$. Les coordonnées du centre du cercle directeur sont

$$(24) \qquad x_0 = \frac{(n^2-1)\rho^2\rho_1}{\mathfrak{P}}, \qquad y_0 = \frac{(n-1)^2\rho^3}{\mathfrak{P}},$$

et le rayon du cercle est

$$\frac{\rho^2}{\mathfrak{P}}\sqrt{-(n-1)(n^2-1)\mathfrak{H}}.$$

On voit que le cercle directeur se réduit à une droite pour $\mathfrak{P} = 0$, à un point pour $\mathfrak{H} = 0$. Enfin, on obtient l'équation caractéristique des courbes (22), dont l'indice est donné, en dérivant l'une ou l'autre des égalités (23). On parvient à $\mathfrak{C} = 0$, où

$$\begin{aligned}\mathfrak{C} = 2n\rho_1[(2n-1)\mathfrak{P} - 2(n+1)\mathfrak{H}] \\ -(n-1)(n^2-1)\rho(\rho\rho_3 - \rho_1\rho_2).\end{aligned}$$

Ainsi, pour $n = 0$, on retrouve l'équation caractéristique des lignes cycloïdales, et l'on voit que, dans cette famille,

$$\mathfrak{P} = \rho(\rho + \rho_2), \qquad \mathfrak{H} = \rho\rho_2 - \rho_1^2.$$

L'équation $\mathfrak{P} = 0$ caractérise les cycloïdes, qui jouent ici le même rôle que les paraboles dans la famille des coniques, et l'équation $\mathfrak{H} = 0$ caractérise les spirales logarithmiques, qui jouent le rôle des hyperboles équilatères.

Il est presque superflu de faire remarquer que toutes les propriétés démontrées plus haut pour le cas de $n = -2$ subsistent en général. Ainsi l'application des formules (14) aux coordonnées (24) donne

$$\frac{\partial x_0}{ds} = -\frac{(n+1)\mathfrak{C}\rho_1}{\mathfrak{P}^2}, \qquad \frac{\partial y_0}{ds} = -\frac{(n-1)\mathfrak{C}\rho}{\mathfrak{P}^2},$$

et l'on voit que le lieu des centres des cercles directeurs des courbes (22), osculatrices à une courbe quelconque pour une valeur déterminée de n, est toujours une ligne de poursuite de la courbe considérée. Si l'on particularise les lignes (22), de manière que $\mathfrak{H} = 0$, on trouve les formules

$$\frac{ds}{ds_0} = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{H}} - 1, \qquad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{n-1}{n+1}\,\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{H}} - 1,$$

qui servent à déterminer le lieu des pôles des spirales sinusoïdes, d'indice n, qui ont un contact du troisième ordre avec une courbe donnée. Enfin, si l'on rapproche les expressions des coordonnées du pôle de $\mathfrak{H}$ et l'équation de la directrice de $\mathfrak{P}$, on voit que, si une ligne de Ribaucour et une spirale sinusoïde de même indice ont un contact du troisième ordre, le point de contact est symétrique du pôle de la spirale par rapport à la directrice de la ligne de Ribaucour. Nous n'insistons pas sur un grand nombre d'autres résultats, que la méthode exposée dans cette Note permet d'obtenir avec la plus grande facilité.

SOLUTION DE LA QUESTION 1566

(voir 3e série, t. VI, p. 299);

PAR M. H. BROCARD.

DL *étant la perpendiculaire élevée sur l'axe focal d'une conique par l'un des points de cet axe d'où la conique est vue sous un angle droit, et* P *désignant le pôle de la droite* DL *par rapport à la conique, si un cercle, ayant son centre sur cette conique et tangent à la droite* DL, *coupe l'axe focal aux points* M_1 *et* M_2, *le rapport de* PM_1 *à* PM_2 *est constant.*

Que devient le théorème dans le cas de l'hyperbole équilatère? (MAURICE D'OCAGNE.)

La conique étant supposée une ellipse rapportée à ses axes, le point D est à l'intersection de l'axe focal et du cercle orthoptique, cercle qui est concentrique à l'ellipse et qui a pour rayon $d = \sqrt{a^2 + b^2}$. On trouve facilement que le pôle P de la droite DL est à une distance $OP = \frac{a^2}{d}$.

Le cercle ayant son centre (α, β) sur l'ellipse et tangent à la droite DL a pour équation

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (d - \alpha)^2,$$

et les abscisses des points M_1, M_2 sont données par l'équation

$$(x - \alpha)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - \alpha)^2 = (d - \alpha)^2,$$

d'où

$$x = \frac{a\alpha \pm (a^2 - d\alpha)}{a}.$$

On en déduit

$$x_1 = PM_1 = \frac{a\alpha + (a^2 - d\alpha)}{a} - \frac{a^2}{d} = \frac{(a^2 - d\alpha)(d - a)}{ad},$$

$$x_2 = PM_2 = \frac{a\alpha - (a^2 - d\alpha)}{a} - \frac{a^2}{d} = \frac{(d\alpha - a^2)(d + a)}{ad};$$

d'où, au signe près,

$$\frac{PM_1}{PM_2} = \frac{d - a}{d + a} = \text{const.} = \frac{DA_1}{DA_2},$$

A_1, A_2 étant les sommets de l'axe focal.

Comme cas particuliers d'une vérification immédiate, on peut considérer les cercles ayant leurs centres aux quatre sommets de l'ellipse.

Dans le cas de l'hyperbole dont les asymptotes forment un angle aigu, le cercle orthoptique est réel et la propriété subsiste moyennant le changement de $\sqrt{a^2 + b^2}$ en $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Mais, à mesure que l'angle des asymptotes augmente et devient très voisin de $90°$, le point P s'éloigne sur l'axe focal, la droite DL se rapproche du centre de la conique, et le rapport des segments PM_1, PM_2 a pour limite 1, lorsque l'hyperbole est équilatère. Le segment M_1M_2 est alors toujours réduit à un point.

SOLUTION DE LA QUESTION 1591

(voir 2e série, t. IX, p. 20);

PAR M. C.-R.-J. KALLENBERG VAN DEN BOSCH,

Ingénieur civil à Breda (Hollande).

Soient A, B, C *les pieds des trois normales à une parabole menées par un point* P *de son plan. Par le sommet* O *de la courbe, on fait passer trois cercles respectivement tangents à la parabole en* A, B, C. *Ces cercles coupent la courbe en trois autres points* A', B', C'. *Démontrer que les normales en* A', B', C' *à la parabole sont concourantes.* (LEMAIRE.)

Les cordes d'intersection d'une parabole et d'un cercle étant, en général, deux à deux également inclinées sur l'axe de la parabole, on reconnaît aisément que, dans le cas où le cercle est tangent à la parabole, les cordes qui se rencontrent au point de contact, telles que AO et AA', font des angles égaux avec l'axe, ainsi que la troisième corde OA' et la tangente commune en A.

Dès lors, si l'on prend l'axe de la parabole et la tangente au sommet pour axes des coordonnées, et que l'on nomme y_1, y_2, y_3 les ordonnées des points A, B, C et

y'_1, y'_2, y'_3 celles des points A′, B′, C′, on trouve, immédiatement,

$$y'_1 = -2y_1, \qquad y'_2 = -2y_2 \qquad \text{et} \qquad y'_3 = -2y_3.$$

Les ordonnées y_1, y_2, y_3 sont données par les racines de l'équation

$$y^3 - 2p(\xi - p)y - 2p^2\eta = 0,$$

si ξ et η représentent les coordonnées du point P.

On tire de là

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &= 0, \\ y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 &= -2p(\xi - p), \\ y_1 y_2 y_3 &= 2p^2\eta \end{aligned} \right.$$

et, en multipliant ces équations respectivement par -2, 4 et -8, on obtient, en vertu des relations entre y_1, y_2, y_3 et y'_1, y'_2, y'_3,

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} y'_1 + y'_2 + y'_3 &= 0, \\ y'_1 y'_2 + y'_1 y'_3 + y'_2 y'_3 &= -8p(\xi - p) \\ &= -2p[(4\xi - 3p) - p], \\ y'_1 y'_2 y'_3 &= -16p^2\eta = 2p^2(-8\eta). \end{aligned} \right.$$

En comparant ces valeurs avec celles de (1), on voit que les normales aux points A′, B′, C′ concourent au point P′, dont les coordonnées sont

$$\xi' = 4\xi - 3p \qquad \text{et} \qquad \eta' = -8\eta.$$

Le cercle mené par les points A, B, C, qui passe en même temps par le sommet O, a pour centre le point

$$\alpha = \frac{\xi + p}{2}, \qquad \beta = \frac{\eta}{4};$$

le centre du cercle, qui passe par A′, B′, C′ et par le sommet, a donc pour coordonnées

$$\alpha' = \frac{\xi' + p}{2} = 2\xi - p \qquad \text{et} \qquad \beta' = \frac{\eta'}{4} = -2\eta.$$

RÉALISATION ET USAGE DES FORMES IMAGINAIRES EN GÉOMÉTRIE.

Conférences données par M. Maximilien MARIE
au Collège Stanislas, à Sainte-Barbe, à l'École Sainte-Geneviève
et à l'École Monge (1).

8. *Des asymptotes aux courbes imaginaires.* — Lorsque le coefficient du premier terme d'une équation algébrique se rapproche de zéro, l'une des racines de cette équation grandit indéfiniment; mais, en devenant infinie, elle devient indéterminée : son module devient infini, mais son argument reste indéterminé si, du moins, on ignore comment le coefficient du premier terme de l'équation considérée est lui-même parvenu à la valeur zéro; car, zéro est aussi indéterminé que l'infini, étant l'un et l'autre des nombres dont les modules ont diminué ou crû indéfiniment, leurs arguments pouvant être restés quelconques.

Supposons que deux équations algébriques

$$f(x, y) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_1(x, y) = 0,$$

de degrés m et n, soient telles que l'élimination entre elles de y conduise à une équation en x, de degré $mn - p$, on dira que p des points d'intersection des deux lieux se sont transportés à l'infini, ce qui exprimera simplement qu'il n'en est resté que $mn - p$, à distance finie; mais, en réalité, les abscisses et, par conséquent, les ordonnées des p points passés à l'infini seront

(1) *Voir* même tome, p. 60.

devenues indéterminées : en réalité, les deux lieux auront p infinités de points communs à l'infini.

Mais, si, au lieu des lieux superficiels $f=0$ et $f_1=0$, on considère spécialement, sur ces deux lieux, les deux courbes qui seraient définies par les mêmes équations, auxquelles on aurait adjoint une équation complémentaire

$$\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta')=0,$$

ces deux courbes auront seulement p points communs à l'infini.

Quant aux arguments des coordonnées de ces p points rejetés à l'infini, ils seront parfaitement déterminés.

En effet, les valeurs infinies de x et de y devront satisfaire indifféremment à l'un ou l'autre des deux systèmes

$$f=0 \quad \text{et} \quad \varphi=0 \qquad \text{ou} \qquad f_1=0 \quad \text{et} \quad \varphi=0,$$

ces deux systèmes admettant également les solutions infinies considérées.

Supposons qu'on les recherche dans les équations f et φ : l'équation $f(\alpha+\beta\sqrt{-1}, \alpha'+\beta'\sqrt{-1})=0$ se décomposera en deux autres, dont les premiers membres, pour des valeurs infinies de α, β, α' et β', se réduiront aux parties homogènes des plus hauts degrés ; de même, l'équation $\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta')=0$, pour les mêmes valeurs infinies de α, β, α' et β', se réduira aussi à une équation homogène en α, β, α' et β'.

Les valeurs infinies de α, β, α' et β' seront donc déterminées par trois équations homogènes qui assigneront les valeurs des rapports deux à deux de ces quatre quantités, et, notamment, celles des rapports $\frac{\beta}{\alpha}$ et $\frac{\beta'}{\alpha'}$, ou les valeurs des tangentes des arguments de x et de y devenus infinis.

Cela posé, supposons que l'on ait recherché, par les méthodes ordinaires, les asymptotes d'un lieu

$$f(x, y) = 0,$$

et qu'on ait trouvé pour l'une d'elles un coefficient angulaire égal à $m + n\sqrt{-1}$, et une ordonnée à l'origine, égale à $p + q\sqrt{-1}$: en raison du calcul même, l'élimination de y entre

$$f(x, y) = 0 \qquad \text{et} \qquad y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1}$$

fournira une équation d'un degré moindre de deux unités que celui de $f(x, y) = 0$.

Ainsi, si l'on adjoignait séparément, aux deux équations

$$f(x, y) = 0 \qquad \text{et} \qquad y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1},$$

une même relation complémentaire

$$\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0,$$

les deux courbes ainsi définies seraient asymptotes l'une à l'autre, et auraient en commun deux points à l'infini.

Les conclusions seront les mêmes si l'on prend, pour relation complémentaire commune, $\frac{\beta'}{\beta} = c$; mais alors les deux courbes considérées seront : l'une la conjuguée c du lieu

$$f(x, y) = 0$$

et l'autre la droite de caractéristique c du faisceau

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1}.$$

On voit ainsi que, lorsqu'on rencontre, pour un lieu algébrique, une asymptote imaginaire, en réalité, on a trouvé un faisceau d'asymptotes à toutes les conjuguées de ce lieu.

On peut vérifier cette proposition de la manière suivante :

Si, en recherchant les asymptotes d'une courbe $f(x,y)=0$, on a trouvé, pour l'une d'elles,

$$y=(m+n\sqrt{-1})x+p+q\sqrt{-1},$$

il résultera du calcul même que, l'une des formes de y, définie par l'équation $f(x,y)=0$, se trouvera être

$$y=(m+n\sqrt{-1})x+p+q\sqrt{-1}$$

plus une fonction $\varphi(x)$ dont le module tendrait vers zéro, lorsque le module de x croîtrait indéfiniment. Mais, si l'on considère les deux lieux à abscisses réelles, définis par les deux équations

$$y=(m+n\sqrt{-1})x+p+q\sqrt{-1}$$

et

$$y=(m+n\sqrt{-1})x+p+q\sqrt{-1}+\varphi(x),$$

d'une part, ils se réduiront, le premier, à la conjuguée $c=\infty$ du faisceau

$$y=(m+n\sqrt{-1})x+p+q\sqrt{-1};$$

et, le second, à une branche de la conjuguée $c=\infty$ du lieu

$$f(x,y)=0.$$

D'ailleurs, les équations en coordonnées réelles de ces deux lignes seront, la première,

$$y=(m+n)x+p+q$$

et, la seconde,

$$y=(m+n)x+p+q+\varphi_1(x)+\varphi_2(x),$$

$\varphi_1(x)$ désignant la partie réelle évanouissante de $\varphi(x)$, et $\varphi_2(x)$ le coefficient, aussi évanouissant, de $\sqrt{-1}$, dans $\varphi(x)$.

La droite $c = \infty$ du faisceau

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1}$$

sera donc asymptote à la conjuguée $c = \infty$ du lieu

$$f(x, y) = 0.$$

Cela posé, il est clair que, si deux lieux, de degrés m et n, sont tels qu'en éliminant y entre leurs équations par rapport à un système donné d'axes, l'équation résultante en x soit du degré $mn - p$ seulement, il en sera toujours de même, quels que soient les nouveaux axes auxquels on viendrait ensuite à rapporter les deux lieux, parce que, aux $mn - p$ solutions finies trouvées précédemment, il correspondra toujours, en raison des formules de transformation, $mn - p$ solutions finies, nouvelles, et que, aux p anciennes solutions infinies, il correspondra, de même, p solutions nouvelles infinies.

Il en résulte que, si l'élimination de y entre

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1}$$

et une équation

$$f(x, y) = 0$$

de degré m, conduit à une équation en x, de degré $(m - 2)$ seulement, le même fait se reproduira entre les équations des deux mêmes lieux rapportés ensuite à de nouveaux axes quelconques; de sorte que les conjuguées des deux lieux, dont les cordes réelles seraient parallèles au nouvel axe des y, seront perpétuellement asymptotes l'une à l'autre. On voit ainsi que, si l'une des asymptotes d'une courbe se présente sous une forme imaginaire

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1},$$

cette équation représentera un faisceau d'asymptotes à toutes les conjuguées de la courbe, et que la conjuguée c du faisceau sera l'une des asymptotes de la conjuguée c de la courbe.

Une asymptote réelle, $y = cx + d$, à la courbe réelle est aussi asymptote à la conjuguée c du lieu; en effet, $y = cx + d$ sera une corde réelle de la conjuguée $\frac{\beta'}{\beta} = c$ du lieu, mais elle coupera cette conjuguée à l'infini. La même asymptote réelle $y = cx + d$ sera aussi généralement asymptote à l'enveloppe imaginaire des conjuguées, parce que c correspondra généralement à une direction limite, pour les tangentes à la courbe réelle, de sorte que si l'on faisait varier c infiniment peu, dans un sens convenable, l'ordonnée à l'origine de la tangente parallèle à la nouvelle direction deviendrait imaginaire.

Si l'on avait trouvé pour une asymptote d'un lieu une équation à coefficient angulaire réel

$$y = mx + p + q\sqrt{-1},$$

cette équation représenterait une tangente à l'infini à l'enveloppe imaginaire des conjuguées, c'est-à-dire une asymptote à cette enveloppe.

L'équation en coordonnées réelles de cette asymptote serait d'ailleurs

$$y = mx + p + q.$$

Corollaire I. — Le nombre des asymptotes réelles ou imaginaires, d'une courbe de degré m est m; mais l'équation d'une asymptote imaginaire en fournit une effective pour chaque conjuguée; on en conclut que le nombre total des asymptotes de la courbe réelle et d'une quelconque de ses conjuguées est toujours m.

Corollaire II. — Si les asymptotes d'une courbe de degré m, étaient réelles, chacune d'elles, à la vérité, pourrait être considérée comme asymptote à la conjuguée du lieu dont la caractéristique serait égale au coefficient angulaire de cette asymptote ; mais les conjuguées, dont les caractéristiques n'auraient pour valeurs aucun des m coefficients angulaires des m asymptotes, n'auraient pas d'asymptotes, ni par conséquent de branches infinies; elles seraient donc entièrement composées d'anneaux fermés.

9. *Théorie des contacts des divers ordres des courbes imaginaires et, en particulier, de leur courbure.* — Si deux équations

$$f(X, Y) = 0 \quad \text{et} \quad f_1(X, Y) = 0,$$

qui admettent une solution commune

$$x = \alpha_0 + \beta_0 \sqrt{-1}, \qquad y = \alpha'_0 + \beta'_0 \sqrt{-1},$$

fournissent, pour cette solution, les mêmes valeurs de $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^py}{dx^p}$, et si l'on adjoint séparément aux deux équations $f = 0$ et $f_1 = 0$ une même condition complémentaire

$$\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0,$$

admettant la solution $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, $\alpha' = \alpha'_0$ et $\beta' = \beta'_0$, les deux courbes ainsi définies, réalisées selon la règle générale par $x_1 = \alpha + \beta$ et $y_1 = \alpha' + \beta'$, auront $p + 1$ points communs confondus avec le point

$$[\alpha_0 + \beta_0, \ \alpha'_0 + \beta'_0],$$

c'est-à-dire auront en ce point un contact de l'ordre p.

En effet, soient, au point $[x, y]$,

$$\frac{dy}{dx} = m_1 + n_1\sqrt{-1},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m_2 + n_2\sqrt{-1},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{d^py}{dx^p} = m_p + n_p\sqrt{-1},$$

les valeurs communes, fournies séparément par les deux équations $f = 0$ et $f_1 = 0$ pour $X = x$ et $Y = y$, des p premières dérivées de Y par rapport à X, si l'on veut connaître les coordonnées $[x + d_1x, y + d_1y]$ de deux points infiniment voisins du point $[x, y]$, sur les deux courbes considérées, en posant $d_1x = d\alpha_0 + d\beta_0\sqrt{-1}$ et $d'_1y = d\alpha'_0 + d\beta'_0\sqrt{-1}$, on aura, pour déterminer $d\alpha_0$, $d\beta_0$, $d\alpha'_0$ et $d\beta'_0$, les conditions

$$d\alpha'_0 + d\beta'_0\sqrt{-1} = (m_1 + n_1\sqrt{-1})(d\alpha_0 + d\beta_0\sqrt{-1})$$

ou

$$d\alpha'_0 = m_1\,d\alpha_0 - n_1\,d\beta_0$$

et

$$d\beta'_0 = m_1\,d\beta_0 + n_1\,d\alpha_0,$$

avec

$$\varphi'_{\alpha_0}d\alpha_0 + \varphi'_{\beta_0}d\beta_0 + \varphi'_{\alpha'_0}d\alpha'_0 + \varphi'_{\beta'_0}d\beta'_0 = 0;$$

c'est-à-dire, pour les deux courbes, trois équations homogènes identiques entre $d\alpha_0$, $d\beta_0$, $d\alpha'_0$ et $d\beta'_0$, d'où l'on conclura les mêmes valeurs pour $\frac{d\beta_0}{d\alpha_0}$, et, par suite, pour $\frac{d\beta'_0}{d\alpha'_0}$, c'est-à-dire pour d_1x et pour d_1y, si l'on suppose qu'on prenne, des deux côtés, la même valeur pour $d\alpha_0$.

Les deux courbes auront donc un second point commun confondu avec le point $[\alpha_0 + \beta_0, \alpha'_0 + \beta'_0]$, et les coordonnées imaginaires de ce second point seront $x + d_1 x$ et $y + d_1 y$.

En ce second point, les dérivées de y par rapport à x, tirées de l'une ou de l'autre des équations $f = 0$ ou $f_1 = 0$, auront pris leurs anciennes valeurs augmentées des produits par $d_1 x$ de leurs dérivées, c'est-à-dire

$$\frac{dy}{dx} = (m_1 + n_1 \sqrt{-1}) + (m_2 + n_2 \sqrt{-1})\, d_1 x,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = (m_2 + n_2 \sqrt{-1}) + (m_3 + n_3 \sqrt{-1})\, d_1 x,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{d^{p-1} y}{dx^{p-1}} = (m_{p-1} + n_{p-1} \sqrt{-1}) + (m_p + n_p \sqrt{-1})\, d_1 x;$$

elles seront donc les mêmes de part et d'autre, jusqu'à l'ordre $p - 1$.

Quant aux dérivées $p^{\text{ièmes}}$ de y par rapport à x, elles ne seraient plus les mêmes au point $[x + d_1 x, y + d_1 y]$, $m_{p+1} + n_{p+1} \sqrt{-1}$ n'ayant plus la même valeur sur les deux lieux.

Quoi qu'il en soit, on démontrera comme précédemment que les deux courbes auront encore, au delà du point correspondant à la solution $(x + d_1 x,\ y + d_1 y)$, un autre point commun $[x + d_1 x + d_2 x,\ y + d_1 y + d_2 y]$, et ainsi de suite, jusqu'au $(p + 1)^{\text{ième}}$ point

$$[x + d_1 x + d_2 x + \ldots + d_p x,\ y + d_1 y + d_2 y + \ldots + d_p y];$$

mais le raisonnement ne pourrait pas s'étendre au delà, puisque, arrivés à ce $(p + 1)^{\text{ième}}$ point, on ne pourrait plus dire que les dérivées premières de y par rapport à x seraient encore les mêmes, soit qu'on les tirât de $f = 0$ ou de $f_1 = 0$.

Le théorème énoncé est donc établi quelle que soit la relation $\varphi = 0$.

Il subsistera si, au lieu d'une relation de forme quelconque, satisfaite par les valeurs α_0, β_0, α'_0, β'_0 des variables, on prend spécialement la relation

$$\frac{\beta'}{\beta} = \frac{\beta'_0}{\beta_0} = c,$$

c étant la caractéristique du point $[x_0, y_0]$, et alors le théorème s'énoncera dans les termes suivants :

Si, en un point commun à deux lieux $f(X, Y) = 0$ et $f_1(X, Y) = 0$, les dérivées de X par rapport à Y, jusqu'à la $p^{\text{ième}}$, sont les mêmes, soit qu'on les tire de l'équation $f = 0$ ou de l'équation $f_1 = 0$, les conjuguées des deux lieux, passant par ce point commun, y auront un contact du $p^{\text{ième}}$ ordre.

Le théorème subsisterait encore si, au lieu d'être définies par une équation commune $\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0$, les deux courbes considérées l'étaient par la condition concrète, de constituer les enveloppes imaginaires des conjuguées des deux lieux $f = 0$ et $f_1 = 0$, c'est-à-dire que, si les enveloppes imaginaires de deux lieux $f = 0$ et $f_1 = 0$ ont un point commun $[x, y]$ et que les deux équations $f = 0$ et $f_1 = 0$ fournissent séparément les mêmes valeurs en ce point pour

$$\frac{dY}{dX}, \quad \frac{d^2Y}{dX^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^pY}{dX^p},$$

les deux enveloppes imaginaires auront, au point réalisant la solution $X = x$, $Y = y$ un contact de l'ordre p.

Mais la démonstration doit être un peu modifiée pour s'appliquer à ce cas.

Soient au point $[x, y]$, commun aux deux enveloppes,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = m_1, \quad \text{quantité réelle, par hypothèse,}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = m_2 + n_2\sqrt{-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{d^py}{dx^p}\right) = m_p + n_p\sqrt{-1},$$

les valeurs communes des dérivées de Y par rapport à X, au point $[x, y]$, tirées de $f(X, Y) = o$ ou de $f_1(Y, X) = o$.

Si l'on voulait obtenir, sur l'une ou l'autre enveloppe, un point $[x + d_1 x, y + d_1 y]$ infiniment voisin du point $[x, y]$, en faisant $d_1 x = d_1 \alpha_0 + d_1 \beta_0 \sqrt{-1}$ et $d_1 y = d_1 \alpha'_0 + d_1 \beta'_0 \sqrt{-1}$, on devrait d'abord, dans les deux cas, faire

$$\frac{d_1 \alpha'_0 + d_1 \beta'_0 \sqrt{-1}}{d_1 \alpha_0 + d_1 \beta_0 \sqrt{-1}} = m_1,$$

c'est-à-dire

$$d_1 \alpha'_0 = m_1\, d_1 \alpha_0 \qquad \text{et} \qquad d_1 \beta'_0 = m_1\, d_1 \beta_0;$$

d'un autre côté, le point $[x_1 + d_1 x, y + d_1 y]$ ayant dû rester sur l'une ou l'autre enveloppe, il faudrait que la valeur de $\left(\frac{dY}{dX}\right)$ en ce point fût restée réelle, mais cette nouvelle valeur de $\frac{dY}{dX}$ se formerait dans les deux cas de l'ancienne m_1, augmentée du produit par $d_1 x$, de sa dérivée, c'est-à-dire de

$$(m_2 + n_2 \sqrt{-1})\, d_1 x \quad \text{ou} \quad (m_2 + n_2 \sqrt{-1})(d_1 \alpha_0 + d_1 \beta_0 \sqrt{-1}),$$

$d_1 \alpha_0$ et $d_1 \beta_0$ devraient donc dans les deux cas satisfaire à la même condition

$$m_2\, d_1 \beta_0 + n_2\, d_1 \alpha_0 = o,$$

d'où

$$\frac{d_1 \beta_0}{d_1 \alpha_0} = -\frac{n_2}{m_2},$$

de sorte que si l'on prenait, dans les deux cas, la même valeur pour $d_1 \alpha_0$, on trouverait les mêmes valeurs pour $d_1 x$ et $d_1 y$.

D'où l'on voit que, dans les hypothèses admises, les deux enveloppes auront au moins deux points infiniment voisins communs, correspondant aux deux solutions $[x, y]$ et $[x + d_1 x, y + d_1 y]$.

Au second point $[x + d_1 x, y + d_1 y]$, les dérivées de Y par rapport à X seront devenues

$$\frac{dY}{dX} = m_1 + (m_2 + n_2\sqrt{-1})\,d_1 x, \quad \text{quantité réelle,}$$

$$\frac{d^2 Y}{dX} = (m_2 + n_2\sqrt{-1}) + (m_3 + n_3\sqrt{-1})\,d_1 x,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^{p-1} y}{dx^{p-1}} = (m_{p-1} + n_{p-1}\sqrt{-1}) + (m_p + n_p\sqrt{-1})\,d_1 x;$$

elles seront encore les mêmes sur les deux lieux, jusqu'à l'ordre $p - 1$; on démontrerait donc, comme précédemment, que les deux enveloppes auront encore en commun un troisième point

$$[x + d_1 x + d_2 x,\ y + d_1 y + d_2 y],$$

et ainsi de suite jusqu'au $(p + 1)^{\text{ième}}$ point. En résumé, les deux enveloppes auront $p + 1$ points communs infiniment voisins du point $[x, y]$, c'est-à-dire auront en ce point un contact de l'ordre p.

Il résulte immédiatement de ces deux théorèmes généraux :

1° Que le rayon de courbure d'une conjuguée quelconque d'un lieu quelconque, au point où cette conjuguée touche l'enveloppe réelle du lieu, est égal au rayon de courbure de cette enveloppe réelle au même point.

En effet, si l'on a déterminé par le calcul le centre $[a, b]$ et le rayon R du cercle osculateur à une courbe $f(X, Y) = 0$ en l'un de ses points réels $[x, y]$, les deux équations

$$f(X, Y) = 0 \qquad \text{et} \qquad (X - a)^2 + (Y - b)^2 = R^2$$

admettront la solution commune $[x, y]$ et fourniront en ce point, pour $\frac{dY}{dX}$ et $\frac{d^2Y}{dX^2}$, les mêmes valeurs; les conjuguées des deux courbes réelles qui se toucheront en ce point auront donc aussi entre elles un contact du second ordre, c'est-à-dire auront même rayon de courbure; mais on constate aisément que l'hyperbole équilatère conjuguée d'un cercle a, en son sommet, pour rayon de courbure, le rayon même du cercle.

On en conclut le théorème énoncé.

2° Si la valeur de l'expression

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

calculée en un point $[x, y]$ de l'enveloppe imaginaire des conjuguées d'un lieu $f(X, Y) = 0$, est

$$r + r'\sqrt{-1},$$

le rayon de courbure de cette enveloppe en ce point $[x, y]$ sera

$$r + r'.$$

En effet, si les formules usuelles ont donné, pour les coordonnées du centre du cercle osculateur au point $[x, y]$ de $f(X, Y) = 0$,

$$a + b\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad a' + b'\sqrt{-1},$$

les deux équations

$$f(X, Y) = 0$$

et

$$(X - a - b\sqrt{-1})^2 + (Y - a' - b'\sqrt{-1})^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2$$

admettront la solution commune $[x, y]$ et fourniront, pour $\frac{dY}{dX}$ et pour $\frac{d^2Y}{dX^2}$, les mêmes valeurs en ce point; mais $\frac{dy}{dx}$ sera réel, le point $[x, y]$ étant supposé appartenir à l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu $f(X, Y) = 0$, ce point appartiendra donc aussi à l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu

$$(X - a - b\sqrt{-1})^2 + (Y - a' - b'\sqrt{-1})^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2,$$

c'est-à-dire au cercle

$$(X - a - b)^2 + (Y - a' - b')^2 = (r + r')^2;$$

d'ailleurs les enveloppes imaginaires des deux lieux auront entre elles un contact du second ordre au point correspondant à la solution $[x, y]$; elles auront donc, en ce point, même rayon de courbure.

On en conclut le théorème énoncé.

Parabole osculatrice d'ordre p à une conjuguée quelconque en un quelconque de ses points. — La parabole osculatrice d'ordre p, à une courbe réelle, en un de ses points $[x, y]$, est représentée par l'équation

$$Y = y + \frac{dy}{dx}(X - x) + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{(X - x)^2}{1.2} + \ldots + \frac{d^py}{dx^p}\frac{(X - x)^n}{1.2\ldots n}.$$

Si l'on avait rapporté un lieu $f(X, Y) = 0$ à des axes tels, que les abscisses de la conjuguée c de ce lieu devinssent réelles, l'équation en coordonnées imaginaires d'une des branches de cette conjuguée prendrait la forme

$$Y' = \varphi(X') + \psi(X')\sqrt{-1},$$

X' étant réel; mais l'équation de cette branche, en coordonnées réelles, serait

$$Y'_1 = \varphi(X'_1) + \psi(X'_1);$$

les dérivées de Y' par rapport à X' étant supposées égales à

$$m_1 + n_1\sqrt{-1},$$
$$m_2 + n_2\sqrt{-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$m_p + n_p\sqrt{-1},$$

celles de Y'_1 par rapport à X'_1 seraient

$$m_1 + n_1,$$
$$m_2 + n_2,$$
$$\ldots\ldots,$$
$$m_p + n_p;$$

l'équation de la parabole osculatrice d'ordre p, à la conjuguée considérée, au point $[x'_1, y'_1]$, serait donc, dans le nouveau système d'axes,

$$Y'_1 = y'_1 + (m_1 + n_1)\frac{X'_1 - x'_1}{1} + (m_2 + n_2)\frac{(X'_1 - x'_1)^2}{1.2} + \ldots + (m_p + n_p)\frac{(X'_1 - x'_1)^p}{1.2\ldots p}.$$

On obtiendrait donc immédiatement l'équation, dans le nouveau système d'axes, de la parabole cherchée, si l'on connaissait les dérivées $m_1 + n_1\sqrt{-1}$, ..., $m_p + n_p\sqrt{-1}$ de la nouvelle ordonnée y' par rapport à la nouvelle abscisse; mais ces dérivées $\frac{dy'}{dx'}$, ..., $\frac{d^py'}{dx'^p}$ pourront toujours être trouvées en fonction de $\frac{dy}{dx}$, ..., $\frac{d^py}{dx^p}$, sans qu'on soit obligé d'effectuer la transformation des coordonnées; il suffira en effet, pour cela, de dériver jusqu'à l'ordre p les formules de la transformation.

Ainsi, supposons, pour plus de simplicité, que les premiers axes fussent rectangulaires, qu'on ait conservé l'ancien axe des x et qu'on ait seulement dirigé l'axe des y' parallèlement aux cordes réelles de la conjuguée en question : les formules de transformation seront

$$y' = \frac{y}{\sin\alpha'} \qquad \text{et} \qquad x' = x - y\cot\alpha',$$

α' désignant l'angle du nouvel axe des y avec l'ancien axe des x.

On déduira de ces formules

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{1}{\sin\alpha'}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dx'} \qquad \text{et} \qquad \frac{dx'}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}\cot\alpha',$$

d'où

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{1}{\sin\alpha'}\frac{dy}{dx}\frac{1}{1 - \frac{dy}{dx}\cot\alpha'};$$

puis

$$\frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{1}{\sin\alpha'}\frac{d\dfrac{\frac{dy}{dx}}{1-\frac{dy}{dx}\cot\alpha'}}{dx}\frac{dx}{dx'}$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha}\frac{d\dfrac{\frac{dy}{dx}}{1-\frac{dy}{dx}\cot\alpha'}}{dx}\frac{1}{1-\frac{dy}{dx}\cot\alpha'},$$

et ainsi de suite.

On pourrait donc développer en série, par la formule de Taylor, l'ordonnée réalisée d'une conjuguée quelconque d'un lieu quelconque.

Revenons au rayon de courbure d'une conjuguée quelconque en un quelconque de ses points.

Si le lieu était rapporté à deux axes rectangulaires dont l'un, celui des y, fût parallèle aux cordes réelles de la conjuguée considérée, et si $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ avaient pour valeurs, en un point de cette conjuguée,

$$\frac{dy}{dx} = m + n\sqrt{-1} \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = p + q\sqrt{-1},$$

les dérivées de l'ordonnée réalisée, par rapport à l'abscisse réelle, auraient en ce point pour valeurs

$$\frac{dy_1}{dx_1} = m + n \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2y_1}{dx_1^2} = p + q,$$

en sorte que le rayon de courbure serait représenté par

$$R = \frac{[1 + (m+n)^2]^{\frac{3}{2}}}{p+q}.$$

Si le lieu était rapporté à des axes rectangulaires quelconques, les formules de transformation feraient connaître, comme on l'a vu, les quantités cherchées $m+n$ et $p+q$.

Le calcul fait directement donne, par rapport à des axes rectangulaires quelconques,

$$R = \left[\frac{(n+c)^2 + n^2(n-c)^2}{1-n^2}\right]^{\frac{3}{2}} \frac{r^2 + r'^2}{(r-r')(c^3 - 3cn^2) + (r+r')(3c^2n - n^3)},$$

où c désigne la caractéristique de la conjuguée considérée, $r + r'\sqrt{-1}$ la valeur de l'expression

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

calculée au point considéré, et n le rapport du petit au grand axe de l'ellipse évanouissante

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

qui contient les éléments du lieu au point considéré.

Si le point considéré de la conjuguée c était celui où elle touche l'enveloppe imaginaire, n serait nul et la formule précédente se réduirait à

$$R = c^3 \frac{r^2 + r'^2}{c^3(r - r')} = \frac{r^2 + r'^2}{r - r'};$$

on peut arriver à ce résultat en partant de la formule donnée plus haut

$$R = \frac{[1 + (m + n)^2]^{\frac{3}{2}}}{p + q}.$$

En y faisant d'abord $n = 0$, puisque le point considéré appartient à l'enveloppe imaginaire, il vient

$$R = \frac{(1 + m^2)^{\frac{3}{2}}}{p + q};$$

mais la formule

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

donnerait toujours pour R la même valeur $r + r'\sqrt{-1}$, au même point, quels que fussent les axes rectangulaires auxquels le lieu fût rapporté ; on peut donc poser, en supposant les axes rectangulaires, l'axe des y parallèle aux cordes réelles de la conjuguée et $\frac{d^2y}{dx^2} = p + q\sqrt{-1}$, au point considéré, avec $\frac{dy}{dx} = m$

$$r + r'\sqrt{-1} = \frac{(1 + m^2)^{\frac{3}{2}}}{p + q\sqrt{-1}},$$

d'où l'on tire

$$p = \frac{r(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+r'^2} \quad \text{et} \quad q = -r'\frac{(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+r'^2}.$$

et, par suite,

$$p+q = \frac{(r-r')(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+r'^2},$$

d'où

$$R = \frac{r^2+r'^2}{r-r'}.$$

Théorème. — *La développée de l'enveloppe imaginaire des conjuguées d'un lieu plan est l'enveloppe imaginaire des conjuguées de la développée du lieu.*

Cette relation remarquable entre les deux enveloppes se démontre de la manière suivante :

Soient $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, $y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$ les coordonnées imaginaires d'un point $x_1 = \alpha + \beta$, $y_1 = \alpha' + \beta'$ de l'enveloppe imaginaire d'un lieu $f(X, Y) = 0$; m la valeur réelle de $\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}$ en ce point et $\frac{\beta'}{\beta} = c$: le faisceau

$$Y - y = m(X - x)$$

ou

$$Y = mX + \alpha' + \beta'\sqrt{-1} - m(\alpha + \beta\sqrt{-1})$$

des tangentes au lieu $f(X, Y) = 0$, au point

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \qquad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1},$$

se réduira à la seule droite

$$Y = mX + \alpha' - m\alpha + \beta' - m\beta,$$

tangente à l'enveloppe imaginaire au point

$$x_1 = \alpha + \beta, \qquad y_1 = \alpha' + \beta';$$

d'un autre côté, le faisceau

$$Y - y = -\frac{1}{m}(X - x)$$

ou

$$Y = -\frac{1}{m}X + \alpha' + \beta'\sqrt{-1} + \frac{1}{m}(\alpha + \beta\sqrt{-1})$$

se réduira à la seule droite

$$Y = -\frac{1}{m}X + \alpha' + \beta' + \frac{1}{m}(\alpha + \beta),$$

et cette droite sera normale à l'enveloppe imaginaire au point considéré, c'est-à-dire sera tangente à la développée de l'enveloppe imaginaire.

Ainsi

$$Y - y = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(X - x)$$

sera l'équation générale en coordonnées imaginaires des tangentes à la développée de l'enveloppe imaginaire; d'un autre côté

$$Y - y = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(X - x),$$

où x et y seraient réels, serait l'équation générale des tangentes à la développée de la courbe réelle.

Mais, dans les deux cas, $y + \frac{1}{\frac{dy}{dx}}x$ sera la même fonction de x, ou de m, qui dépend de x.

Les deux développées seront donc respectivement les enveloppes de systèmes de droites, tels que

$$Y = mX + \varphi(m) \pm \sqrt{\psi(m)}$$

et

$$Y = mX + \varphi(m) \pm \sqrt{-\psi(m)},$$

c'est-à-dire que chacune d'elles sera l'enveloppe imaginaire des conjuguées de l'autre. (*A suivre.*)

NOTE SUR LE THÉORÈME DE STURM;

Par M. B. NIEWENGLOWSKI.

Soit $f(x)$ un polynôme entier de degré m, à coefficients réels. Désignons par v_α le nombre des variations présentées par la suite de Sturm relative à $f(x)$ et à sa dérivée, quand on substitue à x le nombre réel α. Si l'on désigne par $\varphi(x)$ le polynôme formé en prenant, dans chacun des polynômes successifs de la suite de Sturm considérée, le terme ayant le plus haut degré, et si l'on appelle v le nombre de variations de $\varphi(x)$ et v' celui de $\varphi(-x)$, on sait que

$$v + v' = m - 2k,$$

k étant un nombre entier positif ou nul, puisque le degré de $\varphi(x)$ est égal à m.

Or on a évidemment

$$v_{-\infty} = v', \qquad v_{+\infty} = v;$$

donc on a aussi

$$v_{-\infty} + v_{+\infty} = m - 2k. \tag{1}$$

Cela posé, soit $2\mathrm{I}$ le nombre des racines imaginaires de l'équation $f(x) = 0$. Si toutes les racines de cette équation sont distinctes, on sait que

$$v_{-\infty} - v_{+\infty} = m - 2\mathrm{I}. \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) donnent

$$v_{-\infty} = m - 1 - k, \tag{3}$$

$$v_{+\infty} = 1 - k. \tag{4}$$

Si l'on désigne par n le nombre des racines réelles de l'équation $f(x) = 0$ qui sont supérieures à α, on a

$$v_\alpha - v_{+\infty} = n;$$

donc, en vertu de l'équation (4),

$$v_\alpha = n + 1 - k. \tag{5}$$

Lorsque la suite de Sturm est complète, le polynôme $\varphi(x)$ est complet : dans ce cas

$$v + v' = m;$$

on doit donc faire $k = 0$ dans les formules précédentes, et l'on a alors

$$v_{-\infty} = m - 1,$$
$$v_{+\infty} = 1,$$
$$v_\alpha = n + 1.$$

LE THÉORÈME DE DUPUIS ET LA CYCLIDE DE DUPIN (¹);

PAR M. E. MARCHAND.

6. *Définition de la cyclide de Dupin.* — Je supposerai, comme dans tout ce qui précède, qu'on ait sous les yeux la *fig.* 239 de la *Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse. Ceci admis, on se propose l'étude des sphères tangentes simultanément à trois sphères

---

(¹) *Voir* même tome, p. 98.

fixes A, B, C. On a vu (n° 4) que la théorie des cycles, étendue aux sphères, permet de séparer les sphères cherchées en quatre groupes correspondant aux quatre cercles de Dupuis qui coexistent sur chaque sphère fixe telle que A; la discussion de la réalité des cercles de Dupuis se ramène immédiatement (n° 3) à celle des cercles tangents à trois cycles donnés A, B, C.

Il suffit d'examiner un des quatre groupes en particulier, par exemple celui qui, sur la *fig.* 239, est défini par les cercles de contact aa', bb', cc'. D'après ce qui précède, les trois sphères A, B, C peuvent être remplacées par une infinité d'autres ayant leur centre sur une conique bien déterminée. La surface, lieu géométrique des cercles aa' correspondant à toutes ces sphères, sera désignée par le nom de *cyclide de Dupin*.

Nous avons deux séries de sphères, les unes ayant leurs centres sur une conique ABC, les autres sur la conique focale de la précédente. Toutes les sphères de l'un des systèmes sont tangentes à toutes les sphères de l'autre et le lieu géométrique des points de contact est la cyclide. Une première classification des points de contact a fait apparaître la surface comme lieu géométrique des cercles aa' dont les centres décrivent la conique ABC; il est évident qu'en intervertissant les deux systèmes de sphères, le même lieu s'engendrera par des cercles dont les centres décrivent la conique focale de ABC. Alors par tout point de la surface passent deux cercles différents, ce qui permettra d'établir l'existence du plan tangent par la méthode utilisée dans le Cours de Géométrie descriptive pour les cônes, les cylindres et les surfaces de révolution.

Soit maintenant M un point de la cyclide. D'après ce qui précède, par ce point passent deux sphères tangentes entre elles, appartenant, l'une au premier système, l'autre au second système. Chacune de ces sphères contient un cercle de la surface passant par M; les tangentes à ces deux cercles, qui définissent le plan tangent à la cyclide, sont situées dans le plan tangent commun aux deux sphères. La surface a même plan tangent que les deux sphères au point M. On peut donc dire que chaque sphère de chaque système n'a en commun avec la cyclide qu'un petit cercle et qu'en tout point de ce petit cercle le plan tangent est le même pour les deux surfaces.

On est amené, d'une manière tout élémentaire, à considérer la surface comme enveloppe de deux systèmes différents de sphères. Les notions les plus simples de la Théorie géométrique des enveloppes font voir que la caractéristique de chaque sphère particulière, telle que A, doit être un cercle, comme limite de l'intersection de la sphère A et de la sphère infiniment voisine du même système. Le résultat obtenu par Dupuis parait dès lors tout naturel.

J'arrive maintenant au but principal de ce Chapitre, qui est de rendre la cyclide de Dupin aussi facile à apercevoir dans l'espace que le tore et la surface des ondes. On vient de voir que trois sphères fixes A, B, C choisies au hasard servent en général à définir quatre cyclides de Dupin et la discussion faite au n° 3 indique, pour chaque position respective des trois sphères, combien il y a de cyclides réelles. Les sphères du même système que A, B et C peuvent avoir leurs centres sur une ellipse ou sur une hyperbole; si les centres sont sur une hyperbole, ceux des sphères de l'autre système seront sur une ellipse. On a donc toujours le droit, s'il ne s'agit que de classer les différentes formes que peut affecter la cyclide de Charles Dupin, de partir du mode de génération fourni par les sphères dont le centre est sur une ellipse.

D'après la discussion résumant (n° 4) les propriétés des cercles directeurs dans le cas de l'ellipse, on voit que la cyclide de Dupin ne peut offrir que trois formes différentes.

Première forme. — On prend dans un plan horizontal deux cercles ω et ω' intérieurs l'un à l'autre (*fig.* 239). On détermine le centre de similitude intérieur S et l'axe radical A'B'C'. Par le point S on mène une sécante quelconque qui rencontre les deux cercles ω et ω' en a et a' du même côté de S; le cercle vertical, admettant aa' comme diamètre horizontal, engendre une cyclide lorsque le rayon vecteur Saa' tourne de 180° autour du point S. Comme on peut remplacer la surface par la sphère inscrite A pour tout ce qui est relatif au plan tangent en un point du cercle aa', on voit que les plans tangents le long du cercle considéré enveloppent un cône de révolution de sommet A_1. On obtiendra alors un point quelconque et le plan tangent en ce point, ce qui permettrait en particulier de déterminer, d'après les procédés courants de la Géométrie descriptive, la section de la surface par un plan quelconque.

Il est facile de se rendre compte que, de même que la verticale ayant son pied en S est l'axe radical commun de toutes les sphères du premier système, l'axe radical A'B'C' des deux cercles ω et ω' est axe radical commun pour toutes les sphères du second système. En effet, chaque sphère du second système touche la sphère A en un point M du petit cercle aa'. La droite A_1M est une tangente à cette sphère. Il en résulte que les tangentes menées de A_1 à toutes les sphères du second système sont égales. Le point A_1, qu'on peut considérer comme un point quelconque de la droite A'B'C', a même puissance par rapport à toutes les sphères du second système.

Les cercles de contact avec les sphères du second système se construisent dès lors sans aucune peine. De même que tout plan passant par la verticale S détermine deux cercles du premier mode de génération, tout plan passant par $A'B'C'$ détermine deux cercles du deuxième mode de génération.

Deuxième forme. — Les deux cercles ω et ω' sont sécants. On mène encore des rayons vecteurs par le centre de similitude interne S, et l'on suit comme précédemment le mouvement d'un cercle vertical aa'. L'axe radical $A'B'C'$ passe par les deux points d'intersection des cercles directeurs ω et ω' qui sont des points doubles pour la surface. Toutes les sphères du second système passent par les deux points doubles, et comme la surface est l'enveloppe de ces sphères, le cône des tangentes en chaque point double est l'enveloppe des plans tangents à toutes ces sphères au point double. Les rayons des sphères formant un cône de révolution qui a le point double pour sommet et l'hyperbole focale pour directrice, on voit que le cône tangent au point double sera le cône supplémentaire du premier. Ce cône est donc de révolution; comme son axe est dans le plan horizontal et qu'on a immédiatement les deux génératrices situées dans le plan horizontal, à savoir les tangentes aux cercles ω et ω', on le détermine avec la plus extrême facilité.

Troisième forme. — Les cercles ω et ω' sont de nouveau intérieurs et l'on mène maintenant des sécantes par le centre de similitude externe. La seule différence avec le premier cas est qu'au lieu de grouper les quatre points d'intersection de la sécante avec ω et ω' de manière à avoir deux cercles extérieurs, on les groupe de manière à avoir deux cercles qui se coupent sur la verticale passant par S. Si, pour préciser, je désigne les quatre points d'intersection, dans l'ordre où ils se présentent, par $aa'a'_1a_1$, au lieu d'imaginer les cercles verticaux aa' et $a_1a'_1$ on imagine les deux cercles aa'_1 et $a'a_1$. La surface présente deux points doubles comme dans le second cas; seulement ces points sont sur l'hyperbole focale et non plus sur l'ellipse. Le cône des tangentes en un de ces points doubles D est toujours de révolution. C'est le cône supplémentaire du cône qui a pour sommet D et pour base l'ellipse lieu des centres des sphères du premier système.

Quelle que soit celle de ces trois formes qu'affecte la cyclide de Dupin, les sphères inscrites du premier système ayant leurs centres sur l'ellipse s'aperçoivent sans difficulté; avec la deuxième forme on en distingue en particulier deux qui se réduisent à deux points. Les sphères du second système apparaissent moins nettement; cependant comme la section par le plan vertical passant par $\omega\omega'$ se compose de deux cercles qui se déterminent à simple vue, ces deux cercles, joints à l'hyperbole focale, permettent d'acquérir une idée suffisamment précise de la question. Aux deux points à l'infini de l'hyperbole correspondent non plus de vraies sphères, mais deux plans passant par l'axe radical commun A'B'C' et perpendiculaires respectivement aux deux asymptotes de l'hyperbole. Si l'on a affaire à la troisième forme de figure, deux sphères sont remplacées par des points.

Pour terminer, je m'en vais rappeler en quelques mots la démonstration de la propriété fondamentale des sphères de chaque système, qui consiste soit à passer par deux points réels, soit à couper orthogonalement un cercle réel.

Dans le premier et le deuxième cas, les sphères du premier système, tout en admettant pour axe radical la verticale du point S, ne se rencontrent pas en des points réels; mais le cercle orthogonal commun de centre S est réel. Dans le troisième cas, le cercle orthogonal n'existe plus, il est *imaginaire,* mais les sphères passent par deux points fixes réels de l'hyperbole focale.

Les sphères du second système ne rencontrent pas leur axe radical $A'B'C'$ dans le premier cas, ni dans le troisième cas; il en résulte que le cercle orthogonal, lequel a pour centre le pied de la perpendiculaire abaissée de S sur $A'B'C'$, est réel. Dans le deuxième cas au contraire, le cercle orthogonal disparaît, devient imaginaire, et toutes les sphères passent par les deux points doubles situés sur l'ellipse.

7. *Propriétés de la cyclide.* — Nous avons trouvé deux droites qui sont chacune axe radical commun de toutes les sphères d'un système et axe de similitude commun de toutes les sphères de l'autre système. M. Lemonnier, dans son étude analytique sur la cyclide (*Nouvelles Annales,* 1870), les appelle D et D' et démontre que les deux droites ne rencontrent pas la surface à la fois, qu'une ou zéro la rencontrent. C'est précisément cette circonstance qui nous a fait distinguer trois formes distinctes de cyclide.

La propriété de ces droites d'être axe radical commun donne naissance à deux points doubles qui fournissent peut-être l'exemple le plus simple de pareille singularité qu'il soit possible d'aborder par la Géométrie élémentaire.

La propriété d'être axe de similitude commun va permettre de dire que les sections (système de deux cercles) de la cyclide par deux plans quelconques passant par une de ces droites peuvent être considérées comme transformées l'une de l'autre par semi-droites réciproques. Voici comment on peut se rendre compte de ce résultat. Je reviens à la *fig.* 239 (*Géom.* de R. et C.) et j'imagine, outre le plan du tableau, un second plan P passant par $A'B'C'$ et déterminant dans les trois sphères A, B, C des cercles α, β, γ. Le point A', étant centre d'homothétie des deux sphères B et C, est aussi centre d'homothétie des sections de ces sphères par un même plan; $A'B'C'$ est encore axe de similitude de tous les cercles $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, sections des sphères A, B, C, ... par le plan P. Je suppose maintenant le plan P rabattu sur le plan horizontal. Les cercles A et α, admettant $A'B'C'$ comme axe radical, peuvent être considérés comme transformés l'un de l'autre par semi-droites réciproques (*Géom.* de R. et C., n° 408); menant les tangentes communes d'un même système, on aura les directions des semi-droites qui se transforment en elles-mêmes (*Géom.* de R. et C., n° 408). D'après ce qui a été dit auparavant, les cercles B et β forment une figure homothétique des cercles A et α, C' étant le centre d'homothétie. Les tangentes communes à B et β, étant homothétiques des tangentes communes à A et α, leur seront parallèles. Alors (*Géom.* de R. et C., n^os 407 et 408) la même transformation par semi-droites réciproques conduira de A à α, de B à β et par suite de C à γ, ... On peut d'ailleurs toujours s'arranger de manière que les tangentes communes qui avec $A'B'C'$ définissent la transformation soient réelles. Si A et α se coupent en deux points réels, cela est évident; si A et α se coupent en deux points imaginaires, il est clair que l'on peut toujours rabattre α du côté de $A'B'C'$ où ne se trouve pas A. Remarquons en passant que nous obtenons la solution géométrique de cette question (*Géom.* de R. et C., p. 279) : transformer par semi-droites réciproques trois cycles, tels que la droite qui contient leurs centres de similitude ne les rencontre pas, en trois points. Il suffit de considérer les trois cycles A, B, C comme sections de trois sphères par le plan des centres. Le plan tangent commun que l'on peut mener aux trois sphères par l'axe de similitude $A'B'C'$ fournit la solution cherchée. La section de la cyclide par le plan horizontal étant l'enveloppe des cercles A, B, C, ... et la section par le plan P étant l'enveloppe des cercles $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ transformés des premiers par semi-droites réciproques, on peut en conclure que ces deux sections sont elles-mêmes transformées l'une de l'autre par semi-droites réciproques (*Géom.* de R. et C., n° 406, p. 275).

Dans un article remarquable inséré dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (mars 1888), M. Fouret démontre « que la cyclide de Dupin admet, comme pôles principaux d'inversion, tous les points d'un système de deux droites de directions rectangulaires » et que « la cyclide de Dupin est la seule surface ayant pour pôles principaux d'inversion tous les points de deux droites ». La première partie du théorème résulte aussitôt de la méthode suivie pour définir la cyclide (n° 6). Nous prenons deux cycles $\omega\omega'$ et leur centre de similitude. La surface est donc complètement fixée dès qu'on se donne les cercles ω et ω', et il suffit de trouver une inversion qui transforme en eux-mêmes les cercles ω et ω' pour que la cyclide se transforme aussi en elle-même. Tout point de l'axe radical $A'B'C'$ peut évidemment être pris comme pôle d'inversion, à l'exception des deux points communs à ω et ω' qui ne sont réels pour la droite $A'B'C'$ que dans la deuxième forme de cyclide; si l'on prend comme pôle d'inversion l'un des points doubles de la surface, les sphères de l'un des systèmes, passant toutes par ce point D et par l'autre point double D', se transformeront en des plans passant par le point transformé de D′ et enveloppant un cône de révolution; la cyclide se transformera elle-même en ce simple cône de révolution facile à définir.

Pour transformer la cyclide en un tore par inversion, il suffit de choisir une inversion qui remplace les deux cercles ω et ω' par des cercles concentriques. On est ramené à un problème bien connu. On considère le faisceau des cercles ayant même axe radical avec ω et ω'; parmi les cercles il y en a deux qui se réduisent à deux points, les points limites du faisceau de cercles. Il n'y a qu'à prendre ces deux points limites comme pôles d'inversion pour transformer tous les cercles du faisceau et en particulier ω et ω' en des cercles concentriques. Or ces points limites ne sont réels que si les cercles ω et ω' se coupent en des points imaginaires. Relativement à la cyclide, on peut dire qu'il existe toujours des pôles réels de transformation. En effet, on a le droit de choisir soit les deux cercles ω et ω' relatifs aux sphères ayant leurs centres sur l'ellipse, soit les deux cercles ω et ω' relatifs aux sphères ayant leurs centres sur l'hyperbole. Avec la première forme de cyclide on aura quatre pôles d'inversion réels et avec la deuxième ou la troisième forme deux pôles seulement.

Toute sphère et tout plan bitangent au tore coupe cette surface suivant deux cercles; cette propriété se maintient évidemment par inversion. Tout plan et toute sphère bitangents à la cyclide couperont la surface suivant deux cercles. Ainsi, tandis que sur les surfaces du second degré il est impossible de placer une droite n'appartenant pas à l'un des deux systèmes de génératrices rectilignes, on voit qu'il existe sur la cyclide comme sur le tore des cercles qui ne font partie d'aucun des deux modes de génération de la surface.

8. *Conséquences géométriques.* — Avant de terminer, il sera peut-être bon d'énoncer les conséquences évidentes du rôle joué par le cercle orthogonal (n° 4). Ce cercle, d'après ce qui a été démontré, est bitangent à la conique. De là une série de constructions géométriques que je laisse au lecteur le soin de démontrer en toute rigueur.

1° Construire le cercle bitangent à une conique de foyers ω et ω', sachant que son centre est un point S de la droite $\omega\omega'$.

Comme S doit être centre de similitude de deux cercles de centres ω, ω' et de rayons k, $2a - k$, il sera facile de déterminer k. Les cercles directeurs ω et ω' étant connus, le cercle cherché de centre S sera déterminé comme devant passer par les points communs à ω et ω'.

On peut remplacer l'énoncé par le suivant : mener des normales à une conique par un point S de l'axe focal.

2° Une conique étant définie comme passant par trois points A, B, C et bitangente à un cercle, construire le système des deux foyers situés sur l'axe qui passe par le centre du cercle.

Des points A, B, C comme centres on décrit des cercles orthogonaux au cercle fixe. Les centres ω et ω' de deux cercles d'un même groupe tangents à la fois à A, B, C fournissent la réponse à la question ; le problème peut admettre, comme on l'a vu, quatre solutions réelles ou deux, ou zéro.

Une inspection directe des positions que peut occuper un cercle bitangent à une conique montre qu'il n'y a pas à tenir compte du cas où les points A, B, C ne seraient pas tous extérieurs ou tous intérieurs au cercle fixe donné. Si les trois points sont tous extérieurs ou tous intérieurs, le calcul prouve qu'il existe quatre coniques réelles satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Chacune de ces quatre coniques a deux foyers réels, et cependant la construction de Gergonne ne les donne que si le centre du cercle est sur l'axe focal de la conique. Dans tous les autres cas, elle détermine les foyers imaginaires. Si de tous les points d'une conique comme centres on décrit les cercles coupant orthogonalement un cercle réel ou même imaginaire bitangent à la conique et ayant son centre supposé réel sur l'axe focal, ces cercles représentent des sphères dont l'enveloppe est une cyclide de Dupin réelle; si de tous les points d'une hyperbole comme centres on décrit des cercles coupant orthogonalement un cercle bitangent dont la corde de contact soit parallèle à l'axe focal, ces cercles représentent des sphères réelles dont l'enveloppe est une cyclide imaginaire. Ainsi la cyclide de Dupin peut être imaginaire, bien que l'un des systèmes de sphères dont la surface est enveloppe soit réel; les sphères de l'autre système ont leurs centres imaginaires situés sur l'ellipse imaginaire qui est focale de l'hyperbole au même titre que l'ellipse réelle.

3° Une conique étant définie par un cercle bitangent et trois points A, B, C tous extérieurs ou tous intérieurs, on demande de déterminer la corde de contact avec le cercle donné.

Si les trois points A, B, C sont extérieurs, il suffira de tracer les cercles orthogonaux au cercle fixe de centre A, B, C et de déterminer les axes de similitude de ces trois cercles. Cette construction, qui comprend comme cas particulier la détermination bien connue de la directrice d'une conique définie par un foyer et trois points, donne bien les quatre solutions du problème.

La construction est en défaut lorsque les trois points A, B, C sont intérieurs au cercle donné. Alors les quatre solutions que donne l'analyse correspondent certainement à des ellipses ayant pour corde de contact avec le cercle une parallèle à l'axe focal. Il me paraît facile d'étendre la solution à ce nouveau cas. Les centres des cercles sont réels A, B, C; les rayons sont imaginaires, mais définis par la puissance des points A, B, C relativement au cercle fixe. On appellera axe de similitude des trois cercles orthogonaux une droite telle que ses distances à A, B, C soient proportionnelles aux racines carrées des valeurs absolues des puissances des trois points A, B, C par rapport au cercle fixe.

De cette manière on déterminera, dans tous les cas où il existe des solutions réelles, des éléments géométriques suffisants pour tracer effectivement les coniques cherchées.

4° Construire les foyers ordinaires d'une conique définie par un foyer F dans l'espace et trois points A, B, C.

On décrira des trois points donnés A, B, C comme centres des sphères passant par le foyer F donné. Les centres ω et ω' de deux cercles d'un même groupe tangents à la fois aux trois cercles de section des sphères par le plan ABC constitueront une des solutions du problème. Comme on a dans le plan ABC trois cercles sécants deux à deux, les huit cercles du problème d'Apollonius sont réels (n° 3). On trouve quatre solutions toujours réelles. Le cas exceptionnel trouvé plus haut, (2°) lorsqu'on donnait un cercle bitangent au lieu d'un foyer, a disparu. Cela tient évidemment à ce que la projection de tout foyer réel d'une conique se fait sur l'axe focal, de sorte que le foyer correspond à un cercle bitangent imaginaire ayant son centre réel sur l'axe focal, comme le montre aussitôt la correspondance que l'analyse établit entre les foyers réels et les cercles bitangents imaginaires d'une part, entre les foyers imaginaires et les cercles bitangents réels d'autre part.

5° Déterminer une surface de révolution du second degré qui passe par quatre points donnés et qui soit circonscrite à une sphère donnée.

L'étude directe des positions diverses que peut occuper une sphère inscrite à la surface engendrée par la rotation d'une conique autour d'un de ses axes montre qu'on ne peut espérer de solution réelle que si les quatre points donnés A, B, C, D sont tous extérieurs ou tous intérieurs à la sphère donnée.

Le plan du cercle de contact se déterminera comme plan d'homothétie de quatre sphères orthogonales à la sphère fixe et de centres A, B, C, D. J'ai d'ailleurs indiqué précédemment comment il faut s'y prendre pour conserver cette construction même dans le cas où les quatre points A, B, C, D sont tous intérieurs à la sphère. On a huit solutions, puisqu'il y a huit plans d'homothétie.

Le cercle de contact peut être réel ou imaginaire; dans tous les cas, l'axe de la surface est déterminé comme perpendiculaire abaissée du centre radical des quatre sphères sur leur plan d'homothétie.

Le cercle de contact ne peut qu'être réel si la conique a tourné autour de son axe non focal. Le cercle peut être imaginaire dans le cas d'une ellipse ou hyperbole tournant autour de l'axe focal. Or, précisément dans ce dernier cas, la surface admet deux foyers réels que l'on pourra déterminer comme centres de deux sphères d'un même groupe tangentes à la fois aux quatre sphères décrites de A, B, C, D comme centres.

Ainsi donc, si la surface est soit un ellipsoïde allongé, soit un hyperboloïde à deux nappes et qu'on désigne par ω et ω' les foyers réels, ces deux points seront les centres de sphères tangentes aux quatre sphères A,B,C,D qui jouent dans la question le même rôle que les deux cercles directeurs d'une ellipse (n° 4) utilisés pour définir la cyclide. Tout point de la surface est centre d'une sphère tangente aux deux sphères ω et ω'.

De ce que la somme ou la différence des distances de tout point de la surface aux deux foyers ω et ω' est constante, on conclurait aisément que toute section plane est une conique admettant ω et ω' comme foyers (n° 2). Ce résultat peut encore s'établir ainsi :

Lorsqu'on fait tourner une conique autour de son axe focal, la directrice D correspondant au foyer réel F décrit un plan P, et la surface peut être considérée comme lieu des points dont le rapport des distances au point F et au plan P est constant. La section de la surface par un plan quelconque Q sera le lieu des points dont le rapport des distances au point F et à la droite Δ, intersection de P et de Q, est constant (*voir* n° 2). Le rapport des distances d'un point de la section plane au point F et à un plan fixe quelconque passant par Δ sera aussi constant; or, si l'on prend le plan qui passe par Δ et par F, on voit (n° 2) que F sera le sommet d'un cône de révolution passant par la section plane. La section de la surface, ellipsoïde de révolution allongé ou hyperboloïde de révolution à deux nappes, par un plan quelconque Q, sera donc une section conique dont la courbe focale passera par les foyers de la surface.

9. *Conclusion.* — Après ce qui a été dit au début, il est à peine besoin de conclure.

Presque partout je me suis appuyé uniquement sur les éléments de Géométrie. J'espérais même éviter toute intervention explicite de l'Algèbre quand je me suis aperçu que la démonstration de Gergonne, telle qu'on la présente dans la plupart des traités classiques, ne pouvait pas me servir de point de départ à cause de son manque de généralité. La distinction des groupes fondée en partie sur ce que deux cercles d'un même groupe seraient toujours tangents de manière différente à chacun des cercles fixes ne peut être maintenue que dans quelques cas particuliers. La méthode des cycles réussit au contraire toujours, comme je crois l'avoir démontré rigoureusement par le calcul.

Avant de penser aux cycles, que je ne connais que depuis peu, grâce au *Traité de Géométrie* de MM. E. Rouché et Ch. de Comberousse, j'avais eu l'idée de m'appuyer sur ce théorème : « Le lieu des points tels que le rapport qui existe entre les tangentes menées de ces points à un cercle fixe et les distances de ces mêmes points à une droite fixe soit constant est une section conique ». Mais le théorème de Dandelin, sur lequel je comptais m'appuyer, ne permet d'établir la proposition que pour les cercles bitangents ayant leur centre sur l'axe focal, bien qu'elle soit vraie encore pour les cercles bitangents en deux points réels qui ont leur centre sur l'axe non focal. Or, dans le paragraphe précédent (n° 8; 2°), on a vu que les cercles bitangents de cette seconde sorte intervenaient pour donner les sphères réelles d'un système d'une cyclide d'ailleurs imaginaire. C'est cette objection qui m'a fait renoncer à cette marche séduisante au premier abord comme tout à fait géométrique.

SOLUTION DE LA QUESTION 1592

(voir 3e série, t. IX, p. 20);

PAR M. C.-R.-J. KALLENBERG VAN DEN BOSCH,
Ingénieur civil à Breda (Hollande).

D'un point M *du plan d'une ellipse, on abaisse les quatre normales dont les pieds sont* A_1, A_2, A_3, A_4. *Chaque normale, telle que* A_1M *rencontre le grand axe en* P_1 *et le petit axe en* Q_1. *Démontrer les relations*

$$\frac{MA_1}{A_1P_1}+\frac{MA_2}{A_2P_2}+\frac{MA_3}{A_3P_3}+\frac{MA_4}{A_4P_4}=\text{const.},$$

$$\frac{MA_1}{A_1Q_1}+\frac{MA_2}{A_2Q_2}+\frac{MA_3}{A_3Q_3}+\frac{MA_4}{A_4Q_4}=\text{const.}$$

(E. BARISIEN.)

Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les abscisses des points A_1, A_2, A_3, A_4; ξ et η les coordonnées du point M, par rapport aux axes de l'ellipse, et nommons B_1 le pied de la perpendiculaire abaissée de A_1 sur le grand axe, on a

$$\frac{MA_1}{A_1P_1}=\frac{x_1-\xi}{P_1B_1}\quad\text{et}\quad P_1B_1=\frac{b^2}{a^2}x_1;$$

donc

$$\frac{MA_1}{A_1P_1}=\frac{a^2}{b^2}\,\frac{x_1-\xi}{x_1}$$

$$\frac{MA_1}{A_1P_1}+\frac{MA_2}{A_2P_2}+\frac{MA_3}{A_3P_3}+\frac{MA_4}{A_4P_4}$$
$$=\frac{a^2}{b^2}\sum_1^4\frac{x_1-\xi}{x_1}=\frac{a^2}{b^2}\left(4-\xi\,\frac{\sum_1^4 x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3x_4}\right).$$

Les pieds des normales abaissées de M étant donnés par l'intersection de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

et de l'hyperbole équilatère

$$c^2 xy + b^2 \eta x - a^2 \xi y = 0,$$

leurs abscisses sont les racines de l'équation

$$x^4 - \frac{2a^2\xi}{c^2} x^3 + \ldots + \frac{2a^4\xi}{c^2} x - \frac{a^6\xi^2}{c^4} = 0,$$

obtenue par l'élimination de y; de manière qu'on a

$$\sum_1^4 x_1 x_2 x_3 = -\frac{2a^4\xi}{c^2} \qquad \text{et} \qquad x_1 x_2 x_3 x_4 = -\frac{a^6\xi^2}{c^4}.$$

La substitution de ces valeurs donne

$$\frac{MA_1}{A_1P_1} + \frac{MA_2}{A_2P_2} + \frac{MA_3}{A_3P_3} + \frac{MA_4}{A_4P_4} = \frac{a^2}{b^2}\left(4 - \frac{2c^2}{a^2}\right) = 2\frac{a^2+b^2}{b^2}.$$

Pour $\frac{MA_1}{A_1Q_1}$, on trouve

$$\frac{MA_1}{A_1Q_1} = \frac{x_1 - \xi}{x_1};$$

donc

$$\frac{MA_1}{A_1Q_1} + \frac{MA_2}{A_2Q_2} + \frac{MA_3}{A_3Q_3} + \frac{MA_4}{A_4Q_4} = 2\frac{a^2+b^2}{a^2}.$$

CONCOURS POUR LES BOURSES DE LICENCE (TOULOUSE 1888).

SOLUTION PAR M. LE CAPITAINE BARISIEN.

On donne une ellipse rapportée à ses axes et sur cette ellipse un point $M(x', y')$: *former l'équation générale des coniques osculatrices à l'ellipse au point* M.

Exprimer que cette équation représente une parabole; démontrer ensuite que, par un point $P(\alpha, \beta)$ *du plan, il passe quatre de ces paraboles, que les quatre points* (x', y') *correspondants sont situés sur deux droites parallèles et que, parmi eux, deux au plus sont réels.*

Former l'équation d'une parabole passant par les quatre points (x', y') *qui correspondent à un point* (α, β), *et trouver le lieu décrit par ce dernier point lorsque la parabole en question passe par un point fixe du plan.*

On sait que, si $U = 0$ représente la droite qui touche en un point M une conique $S = 0$,

$$S - \lambda U^2 = 0$$

est l'équation générale des coniques qui ont avec S, au point M, un contact du troisième ordre.

Dans le cas présent, cette équation est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 - \lambda\left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1\right)^2 = 0, \tag{1}$$

avec la condition

$$(2) \qquad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

qui exprime que le point $M(x', y')$ appartient à l'ellipse donnée

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

En écrivant que l'équation (1) représente une parabole et tenant compte de (2), on trouve que le paramètre λ doit être égal à l'unité; en sorte que la parabole osculatrice à l'ellipse donnée au point M a pour équation

$$(3) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 - \left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1\right)^2 = 0$$

ou, en réduisant et ayant égard à (2),

$$(4) \qquad (xy' - yx')^2 + 2(b^2xx' + a^2yy' - a^2b^2) = 0.$$

Pour construire cette parabole, cherchons les coordonnées des points d'intersection de la parabole, avec la droite

$$b^2xx' + a^2yy' = 0,$$

parallèle à la tangente en M et menée par le centre O de l'ellipse donnée. On trouve, pour ces coordonnées,

$$x = \frac{ay'\sqrt{2}}{b}, \qquad y = \frac{bx'\sqrt{2}}{a};$$

mais les coordonnées des points d'intersection de l'ellipse donnée avec cette même parallèle à la tangente sont

$$x = \frac{ay'}{b}, \qquad y = \frac{bx'}{a}.$$

Si donc on mène le diamètre OI conjugué à OM, et si on le prolonge jusqu'au point J tel que

$$OJ = OI\sqrt{2},$$

le point J appartiendra à la parabole osculatrice.

Cette construction indique que la parabole osculatrice est extérieure à l'ellipse.

Si la parabole osculatrice passe par un point $P(\alpha, \beta)$ du plan, on a

$$(5) \qquad (\alpha y' - \beta x')^2 + 2(b'\alpha x' + a^2\beta y' - a^2 b^2) = 0,$$

$$(6) \qquad b^2 x'^2 + a^2 y'^2 - a^2 b^2 = 0.$$

La résolution de ces deux équations doit donner quatre valeurs de x' et y'.

Ces équations, lorsqu'on y considère x' et y' comme des coordonnées courantes, représentent, l'une, l'ellipse donnée et l'autre une parabole tangente à la polaire de P à son point d'intersection avec PO.

Cette parabole et l'ellipse ayant même diamètre ont un couple de cordes communes, formé par deux droites parallèles à la polaire de P.

Si le point P est à l'extérieur de l'ellipse, il est visible que la parabole (8) ne coupe l'ellipse qu'en deux points.

Si le point P est à l'intérieur de l'ellipse, la parabole (5) est tout entière extérieure à l'ellipse; car, si l'on coupe ces deux courbes par la droite

$$b^2 \alpha x' + a^2 \beta y' = 0,$$

on trouve, en appelant, comme précédemment, I son point d'intersection avec l'ellipse et J avec la parabole,

$$OJ = OI\sqrt{2}.$$

Donc, quand le point P est à l'intérieur de l'ellipse, les quatre points correspondants (x', y') sont imaginaires.

L'équation générale des coniques passant par les points d'intersection de (5) et (6) est

$$\begin{aligned}(\alpha y - \beta x)^2 + 2(b^2\alpha x + a^2\beta y - a^2b^2)\\ + \lambda(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) = 0.\end{aligned}$$

En exprimant que cette conique est une parabole, on trouve

$$\lambda = -\left(\frac{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}{a^2b^2}\right)$$

et, pour l'équation de cette parabole,

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}(a^2\beta x + b^2\alpha y)^2 - 2a^2b^2(b^2\alpha x + a^2\beta y)\\ - a^2b^2(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - 2a^2b^2) = 0.\end{aligned}\right.$$

Si cette parabole passe par un point fixe (p, q) du plan, le point (α, β) décrit le lieu dont l'équation est

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}(a^2\beta p + b^2\alpha q)^2 - a^2b^2(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - 2a^2b^2)\\ - 2a^2b^2(b^2\alpha p + a^2\beta q) = 0\end{aligned}\right.$$

ou, en développant,

$$\begin{aligned}a^4\beta^2(p^2 - b^2) + 2a^2b^2pq\,\alpha\beta\\ + b^4\alpha^2(q^2 - a^2) - 2a^2b^2(b^2p\alpha + a^2q\beta - a^2b^2) = 0.\end{aligned}$$

C'est une conique dont le déterminant est

$$\Delta = -a^6b^6\left(\frac{p^2}{b^2} + \frac{q^2}{a^2} - 1\right);$$

la conique (8) est donc une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que le point (p, q) est intérieur ou extérieur à l'ellipse

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

ou situé sur cette courbe.

THÉORIE DES SYSTÈMES TRIPLES DE PSEUDO-SURFACES;

PAR M. L'ABBÉ ISSALY.

PRÉLIMINAIRES.

1. Dans un Mémoire sur les congruences de droites (¹), nous avons, pour la première fois, qualifié de *pseudo-surface* le lieu géométrique de nouvelle espèce que forment deux systèmes de courbes variables lorsqu'elles s'entrecoupent, non pas rigoureusement comme sur toute surface, mais aux infiniment petits du second ordre près, tout au plus.

De pareils lieux ne peuvent pas, il est vrai, être représentés par une équation finie en x, y, z; mais ils offrent, du moins, entre autres avantages, celui de donner une signification géométrique très simple à toutes les équations différentielles totales de la forme

$$dz = \varphi(x, y)\,dx + \psi(x, y)\,dy,$$

qui ne sont pas intégrables, c'est-à-dire pour lesquelles on a

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} \gtrless \frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

ce qui est, comme on le sait, le cas le plus commun.

Cette remarque faite, concevons que, au lieu des deux courbes requises pour la génération de toute pseudo-surface, on en prenne trois concourant en un

(¹) Mémoire inséré au *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XVI.

Voir aussi : t. XVII du même Bulletin, un second Mémoire intitulé : *Étude géométrique sur la courbure des pseudo-surfaces.*

même point M, au degré d'approximation ci-dessus indiqué. En les associant tout d'abord deux à deux, ces courbes engendreront, comme lignes coordonnées, trois pseudo-surfaces dont elles pourront être regardées comme les intersections mutuelles.

A leur tour, par leurs déplacements successifs, ces trois pseudo-surfaces définiront un système de coordonnées à trois dimensions, entièrement comparable à celui que forment les trois familles de surfaces qu'elles ont pour limites respectives; d'où l'on peut prévoir déjà que les propriétés de nos systèmes triples de pseudo-surfaces fourniront, à l'aide de quelques conditions complémentaires, toutes celles dont jouissent les familles de surfaces correspondantes.

Proposons-nous donc d'établir les relations fondamentales qui régissent les premiers de ces systèmes, et, afin de traiter le problème dans toute sa généralité, supposons, dès à présent, que les trois pseudo-surfaces coordonnées se coupent sous des angles variables quelconques.

2. Soient $(a, b, c), \ldots, (a_1, b_1, c_1), \ldots$ les cosinus directeurs des angles que les arêtes de deux trièdres *supplémentaires* $Mxyz$ et $Mx_1y_1z_1$ font avec les arêtes d'un trièdre *quelconque* OXYZ ou (T) considéré comme fixe; nous aurons pour formules de transformation des coordonnées

$$(1)\quad \begin{cases} X + Y\cos n + Z\cos m = ax + a'y + a''z = a_1x_1 + a'_1y_1 + a''_1z_1, \\ X\cos n + Y + Z\cos l = bx + b'y + b''z = b_1x_1 + b'_1y_1 + b''_1z_1, \\ X\cos m + Y\cos l + Z = cx + c'y + c''z = c_1x_1 + c'_1y_1 + c''_1z_1. \end{cases}$$

Faisant coïncider isolément chacun des deux trièdres mobiles avec le trièdre (T) (ce qui est permis, puisque ce dernier est quelconque), on aura

$$(2)\qquad \begin{cases} x+y\cos\nu+z\cos\mu = \mathrm{x} = x_1\cos(x, x_1),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

$$(2')\qquad \begin{cases} x_1+y_1\cos\nu_1+z_1\cos\mu_1 = \mathrm{x}_1 = x\cos(x, x_1),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

formules dans lesquelles (x, y, z) et (x_1, y_1, z_1) représentent les projections *orthogonales* sur les arêtes des deux trièdres du point de l'espace que l'on considère.

Nous désignerons, pour abréger, par ξ, η, ζ les angles $x\mathrm{M}x_1$, $y\mathrm{M}y_1$, $z\mathrm{M}z_1$. Entre les projections orthogonales dont nous venons de parler, il viendra alors ces relations secondaires

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathrm{x} = \dfrac{\mathrm{x}_1}{\cos\xi}+\dfrac{\mathrm{y}_1\cos\nu}{\cos\eta}+\dfrac{\mathrm{z}_1\cos\mu}{\cos\zeta},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$(3')\qquad \begin{cases} \mathrm{x}_1 = \dfrac{\mathrm{x}}{\cos\xi}+\dfrac{\mathrm{y}\cos\nu_1}{\cos\eta}+\dfrac{\mathrm{z}\cos\mu_1}{\cos\zeta},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Comme d'ailleurs

$$\begin{aligned} \cos\xi &= \sin\mu\sin\nu_1 = \sin\mu_1\sin\nu,\\ \cos\eta &= \sin\nu\,\sin\lambda_1 = \sin\nu_1\,\sin\lambda,\\ \cos\zeta &= \sin\lambda\,\sin\mu_1 = \sin\lambda_1\,\sin\mu, \end{aligned}$$

il s'ensuit que l'on peut écrire

$$\frac{\sin\lambda}{\sin\lambda_1} = \frac{\sin\mu}{\sin\mu_1} = \frac{\sin\nu}{\sin\nu_1} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta_1}},$$

en posant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu\\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda\\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix},\qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu_1 & \cos\mu_1\\ \cos\nu_1 & 1 & \cos\lambda_1\\ \cos\mu_1 & \cos\lambda_1 & 1 \end{vmatrix}$$

ou bien

$$\Delta = \sin^2\lambda_1 \sin^2\mu \sin^2\nu,$$
$$\Delta_1 = \sin^2\lambda \sin^2\mu_1 \sin^2\nu_1.$$

Nous aurons aussi besoin de savoir exprimer les cosinus a, a', a'', ... en fonction des cosinus a_1, a'_1, a''_1, ..., et *vice versa*, quand les trièdres mobiles ont repris une position quelconque par rapport au trièdre fixe. On trouve à cet effet

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{a_1}{\cos\xi} + \dfrac{a'_1 \cos\nu}{\cos\eta} + \dfrac{a''_1 \cos\mu}{\cos\zeta}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

$$(4')\qquad \left\{\begin{array}{l} a_1 = \dfrac{a}{\cos\xi} + \dfrac{a' \cos\nu_1}{\cos\eta} + \dfrac{a'' \cos\mu_1}{\cos\zeta}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

I. — Relations différentielles.

3. Soient $(\mathcal{F})$, $(\mathcal{F}')$, $(\mathcal{F}'')$ les trois pseudo-surfaces coordonnées respectivement tangentes en M aux faces du trièdre $Mxyz$. Désignons par (s), (s'), (s'') leurs courbes d'intersection, en pseudo-contact avec les arêtes du trièdre; et soient ρ, ρ', ρ'' les rayons de première courbure de ces mêmes lignes.

De ce que les rayons ρ, ρ', ρ'' appartiennent nécessairement aux faces du trièdre supplémentaire $Mx_1y_1z_1$, il résulte que l'on a les relations connues

$$\frac{\partial a}{\partial s} = \frac{\cos(\rho, x)}{\rho} = \frac{a'_1}{\rho_{y_1}} + \frac{a''_1}{\rho_{z_1}},$$

$$\frac{\partial a'}{\partial s'} = \frac{\cos(\rho', x)}{\rho'} = \frac{a''_1}{\rho'_{z_1}} + \frac{a_1}{\rho'_{x_1}},$$

$$\frac{\partial a''}{\partial s''} = \frac{\cos(\rho'', x)}{\rho''} = \frac{a_1}{\rho''_{x_1}} + \frac{a'_1}{\rho''_{y_1}}.$$

Posant, par analogie,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial s'} &= \frac{\cos(\varpi', \mathrm{x})}{\varpi'} = \frac{a'_1}{\varpi'_{y_1}} + \frac{a''_1}{\varpi'_{z_1}},\\
\frac{\partial a'}{\partial s''} &= \frac{\cos(\varpi'', \mathrm{x})}{\varpi''} = \frac{a''_1}{\varpi''_{z_1}} + \frac{a_1}{\varpi''_{x_1}},\\
\frac{\partial a''}{\partial s} &= \frac{\cos(\varpi, \mathrm{x})}{\varpi} = \frac{a_1}{\varpi_{x_1}} + \frac{a'_1}{\varpi_{y_1}};\\
\frac{\partial a}{\partial s''} &= \frac{\cos(\chi'', \mathrm{x})}{\chi''} = \frac{a'_1}{\chi''_{y_1}} + \frac{a''_1}{\chi''_{z_1}},\\
\frac{\partial a'}{\partial s} &= \frac{\cos(\chi, \mathrm{x})}{\chi} = \frac{a''_1}{\chi_{z_1}} + \frac{a_1}{\chi_{x_1}},\\
\frac{\partial a''}{\partial s'} &= \frac{\cos(\chi', \mathrm{x})}{\chi'} = \frac{a_1}{\chi'_{x_1}} + \frac{a'_1}{\chi'_{y_1}},
\end{aligned}$$

on reconnaît dans $\frac{1}{\varpi}, \ldots, \frac{1}{\chi}, \ldots$ ce que nous avons nommé ailleurs les *courbures corrélatives* ou *alternantes des lignes coordonnées*.

Actuellement, différentions par rapport à s, s', s'' les valeurs des cosinus des faces du premier trièdre, savoir :

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\cos\lambda = {} & (\mathrm{a}\,a' + \mathrm{b}''b' + \mathrm{b}'c')a'' \\
& + (\mathrm{b}''a' + \mathrm{a}'b' + \mathrm{b}c')b'' + (\mathrm{b}'a' + \mathrm{b}b' + \mathrm{a}''c')c'', \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

valeurs où l'on a fait, avec $\mathrm{D} = \begin{vmatrix} 1 & \cos n & \cos m \\ \cos n & 1 & \cos l \\ \cos m & \cos l & 1 \end{vmatrix}$,

$$\begin{aligned}
\sin^2 l &= \mathrm{a}, & \cos m \cos n - \cos l &= \mathrm{b},\\
\sin^2 m &= \mathrm{a}', & \cos n \cos l - \cos m &= \mathrm{b}',\\
\sin^2 n &= \mathrm{a}'', & \cos l \cos m - \cos n &= \mathrm{b}'';
\end{aligned}$$

puis, faisons coïncider le trièdre $\mathrm{M}xyz$ avec le trièdre fixe; on trouvera, après réduction, les neuf relations suivantes

$$
\begin{aligned}
-\frac{\sin\nu_1}{\varpi_{y_1}} &= \frac{\sin\mu_1}{\chi_{z_1}} + \frac{\partial\lambda}{\partial s},\\
-\frac{\sin\lambda_1}{\rho_{z_1}} &= \frac{\sin\nu_1}{\varpi_{x_1}} + \frac{\partial\mu}{\partial s},\\
-\frac{\sin\mu_1}{\chi_{x_1}} &= \frac{\sin\lambda_1}{\rho_{y_1}} + \frac{\partial\nu}{\partial s},\\
-\frac{\sin\nu_1}{\chi'_{y_1}} &= \frac{\sin\mu_1}{\rho'_{z_1}} + \frac{\partial\lambda}{\partial s'},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{aligned}
$$

que nous écrirons plus simplement ainsi

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{l}_1 &= \mathrm{p}_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial s},\\
\mathrm{m}_1 &= \mathrm{q}_1 + \frac{\partial\mu}{\partial s},\\
\mathrm{n}_1 &= \mathrm{r}_1 + \frac{\partial\nu}{\partial s},\\
\mathrm{l}'_1 &= \mathrm{p}'_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial s'},\\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\right.
$$

Substituant ces valeurs dans les dérivées partielles ci-dessus, il viendra

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial s}\sin\lambda_1 &= a'_1\,\mathrm{r}_1 - a''_1\,\mathrm{m}_1,\\
\frac{\partial a'}{\partial s}\sin\mu_1 &= a''_1\,\mathrm{p}_1 - a_1\,\mathrm{n}_1,\\
\frac{\partial a''}{\partial s}\sin\nu_1 &= a_1\,\mathrm{q}_1 - a'_1\,\mathrm{l}_1,
\end{aligned}
\right.
$$

premier système *général*, relatif à la variable s.

Ce système devra être complété par deux autres relatifs à s' et à s''; mais ceux-ci se déduisent aussitôt du précédent, car il suffit d'y affecter, d'un ou de deux accents les composantes qui y entrent.

4. Les trois systèmes que nous venons de former correspondent, par a, a', a'', au premier des trièdres coordonnés $Mxyz$. Il s'agit d'obtenir les trois systèmes corrélatifs qui correspondent, par a_1, a'_1, a''_1, au second trièdre $Mx_1y_1z_1$.

Pour cela, nous ferons observer que, en vertu des propriétés connues des trièdres supplémentaires, on a

$$\cos\lambda = \cos\mu \cos\nu - \sin\mu \sin\nu \cos\lambda_1,$$
$$\cos\lambda_1 = \cos\mu_1 \cos\nu_1 - \sin\mu_1 \sin\nu_1 \cos\lambda;$$

d'où l'on tire

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{\partial\lambda}{\partial s}\cos\xi &= \frac{\partial\lambda_1}{\partial s} + \frac{\partial\mu_1}{\partial s}\cos\nu + \frac{\partial\nu_1}{\partial s}\cos\mu, \\ -\frac{\partial\lambda_1}{\partial s}\cos\xi &= \frac{\partial\lambda}{\partial s} + \frac{\partial\mu}{\partial s}\cos\nu_1 + \frac{\partial\nu}{\partial s}\cos\mu_1, \end{aligned} \right.$$

ce qui montre incidemment (2) et (2′) que les variations (alternées) des faces des deux trièdres pourront toujours, si besoin est, être assimilées au signe près aux projections obliques d'un même segment issu de l'origine.

Ceci posé, abordons directement la question, en différentiant par rapport à s la valeur (4′) de a_1 mise sous la forme entière

$$a_1 \sin\lambda \sin\mu_1 \sin\nu_1 = a \sin\lambda_1 + a' \sin\mu_1 \cos\nu_1 + a'' \sin\nu_1 \cos\mu_1.$$

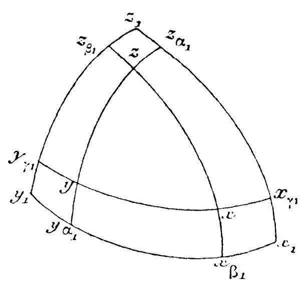
Après avoir remplacé dans l'équation dérivée $\cos\lambda$ par sa valeur ci-dessus et $\frac{\partial\lambda}{\partial s}$ par la suivante

$$-\frac{\partial\lambda}{\partial s}\cos\xi = \mathrm{l}_1 - \mathrm{p}_1 + (\mathrm{m}_1 - \mathrm{q}_1)\cos\nu + (\mathrm{n}_1 - \mathrm{r}_1)\cos\mu,$$

déduite de (7) et de (5), on sera conduit par le calcul lui-même à considérer les trois trièdres bi-rectangles auxiliaires $Mx y_{\gamma_1} z_{\beta_1}$, $My z_{\alpha_1} x_{\gamma_1}$ et $Mz x_{\beta_1} y_{\alpha_1}$, et cela, en posant

$$(8)\quad \begin{cases} \mathrm{m}_1 - \mathrm{r}_1 \cos\lambda_1 = \mathrm{m}_{\gamma_1} \sin\lambda_1, & \mathrm{r}_1 - \mathrm{m}_1 \cos\lambda_1 = \mathrm{r}_{\beta_1} \sin\lambda_1, \\ \mathrm{n}_1 - \mathrm{p}_1 \cos\mu_1 = \mathrm{n}_{\alpha_1} \sin\mu_1, & \mathrm{p}_1 - \mathrm{n}_1 \cos\mu_1 = \mathrm{p}_{\gamma_1} \sin\mu_1, \\ \mathrm{l}_1 - \mathrm{q}_1 \cos\nu_1 = \mathrm{l}_{\beta_1} \sin\nu_1, & \mathrm{q}_1 - \mathrm{l}_1 \cos\nu_1 = \mathrm{q}_{\alpha_1} \sin\nu_1. \end{cases}$$

Ce premier système de trièdres auxiliaires en appelle un second, réciproque du premier, celui des trièdres



$\mathrm{M}x_{\gamma_1} y_{\alpha_1} z_{\alpha_1}$, ... que l'on introduit à son tour, implicitement lui aussi, en posant, dans les résultats trouvés,

$$(9)\quad \begin{cases} \mathrm{q}_{\alpha_1} + \mathrm{n}_{\alpha_1} \cos\lambda = \mathrm{q} \sin\lambda, & \mathrm{n}_{\alpha_1} + \mathrm{q}_{\alpha_1} \cos\lambda = \mathrm{n} \sin\lambda, \\ \mathrm{r}_{\beta_1} + \mathrm{l}_{\beta_1} \cos\mu = \mathrm{r} \sin\mu, & \mathrm{l}_{\beta_1} + \mathrm{r}_{\beta_1} \cos\mu = \mathrm{l} \sin\mu, \\ \mathrm{p}_{\gamma_1} + \mathrm{m}_{\gamma_1} \cos\nu = \mathrm{p} \sin\nu, & \mathrm{m}_{\gamma_1} + \mathrm{p}_{\gamma_1} \cos\nu = \mathrm{m} \sin\nu. \end{cases}$$

Il vient ainsi finalement, pour le premier des systèmes (analytiques) corrélatifs que nous voulions obtenir,

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial a_1}{\partial s} \sin\lambda = a' \mathrm{n} - a'' \mathrm{q}, \\ \dfrac{\partial a'_1}{\partial s} \sin\mu = a'' \mathrm{l} - a \mathrm{r}, \\ \dfrac{\partial a''_1}{\partial s} \sin\nu = a \mathrm{m} - a' \mathrm{p}. \end{cases}$$

Par de simples accents, on en déduira les deux autres en s' et s''.

Bien que le nouveau groupe de systèmes généraux soit *équivalent* au premier, il ne nous sera pas moins utile que lui dans les applications.

5. 1° Comme corollaire, si l'on forme, à l'aide du Tableau (9), les différences $l - p$, $m - q$, $n - r$ et qu'on rapproche les résultats des formules (7), on trouvera

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} l = p - \dfrac{\partial \lambda_1}{\partial s}, \\ m = q - \dfrac{\partial \mu_1}{\partial s}, \\ n = r - \dfrac{\partial \nu_1}{\partial s}, \\ l' = p' - \dfrac{\partial \lambda_1}{\partial s'}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

ce qui met pleinement en évidence la corrélation des deux groupes de systèmes.

2° Remarquons encore que de (8) et (9) on tire, entre autres valeurs,

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} q_{\alpha_1} = \dfrac{q_1 - l_1 \cos\nu_1}{\sin\nu_1} = \dfrac{q - n\cos\lambda}{\sin\lambda}, \\ n_{\alpha_1} = \dfrac{n_1 - p_1\cos\mu_1}{\sin\mu_1} = \dfrac{n - q\cos\lambda}{\sin\lambda}. \end{array}\right.$$

Ces formules nous seront bientôt nécessaires.

II. — Équations fondamentales de la théorie des systèmes triples de pseudo-surfaces.

6. Si l'on développe, à l'aide des formules (6), les calculs indiqués par les trois identités en a, a', a'',

$$\frac{\partial \dfrac{\partial a}{\partial s''}}{\partial s'} = \frac{\partial \dfrac{\partial a}{\partial s'}}{\partial s''},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on trouvera

$$(13)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial p'_1}{\partial s''} - \dfrac{\partial p''_1}{\partial s'}\right) \sin\lambda = q'n'' - n'q'' = G, \\ \left(\dfrac{\partial q'_1}{\partial s''} - \dfrac{\partial q''_1}{\partial s'}\right) \sin\mu = r'l'' - l'r'' = H, \\ \left(\dfrac{\partial r'_1}{\partial s''} - \dfrac{\partial r''_1}{\partial s'}\right) \sin\nu = p'm'' - m'p'' = K. \end{cases}$$

Passant aux identités

$$\frac{\partial \dfrac{\partial a_1}{\partial s''}}{\partial s'} = \frac{\partial \dfrac{\partial a_1}{\partial s'}}{\partial s''},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

il viendra semblablement, au moyen de (10),

$$(14)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial l'}{\partial s''} - \dfrac{\partial l''}{\partial s'}\right) \sin\lambda_1 = m'_1 r''_1 - r'_1 m''_1 = G_1, \\ \left(\dfrac{\partial m'}{\partial s''} - \dfrac{\partial m''}{\partial s'}\right) \sin\mu_1 = n'_1 p''_1 - p'_1 n''_1 = H_1, \\ \left(\dfrac{\partial n'}{\partial s''} - \dfrac{\partial n''}{\partial s'}\right) \sin\nu_1 = l'_1 q''_1 - q'_1 l''_1 = K_1. \end{cases}$$

Ce sont les équations que nous voulions établir. Elles méritent, ce nous semble, le nom de *fondamentales*, à un tout autre titre que celles qui leur correspondent dans la théorie des surfaces, puisqu'elles en constituent comme on le verra, une haute généralisation.

Il est bon d'observer que les fonctions binômes, G, H, K, G_1, ... qui les composent, peuvent s'obtenir directement, c'est-à-dire sans différentiation ; car, de (6) et de (10), on tire aussitôt

$$\sin^2\lambda_1 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial a}{\partial s'} & \dfrac{\partial a}{\partial s''} \\ \dfrac{\partial b}{\partial s'} & \dfrac{\partial b}{\partial s''} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a'_1 & a''_1 \\ b'_1 & b''_1 \end{vmatrix} = m'_1 r''_1 - r'_1 m''_1 = G_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$\sin^2\lambda \begin{vmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial s'} & \frac{\partial a_1}{\partial s''} \\ \frac{\partial b_1}{\partial s'} & \frac{\partial b_1}{\partial s''} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix} = q'n'' - n'q'' = G,$$

. . . .

7. *Cas particulier.* — Arrêtons-nous au cas où les trois pseudo-surfaces coordonnées se couperaient sous des angles *constants*. Les variations des faces étant alors nulles, par hypothèse, il faut écrire que

$$(15)\qquad \begin{cases} l = p, & m = q, & n = r, \\ l_1 = p_1, & m_1 = q_1, & n_1 = r_1. \end{cases}$$

Les systèmes généraux (6) et (10) deviennent alors

$$\frac{\partial a}{\partial s}\sin\lambda_1 = a'_1 r_1 - a''_1 q_1, \qquad \frac{\partial a_1}{\partial s}\sin\lambda = a' r - a'' q,$$

$$\frac{\partial a'}{\partial s}\sin\mu_1 = a''_1 p_1 - a_1 r_1, \qquad \frac{\partial a'_1}{\partial s}\sin\mu = a'' p - a\, r,$$

$$\frac{\partial a''}{\partial s}\sin\nu_1 = a_1 q_1 - a'_1 p_1, \qquad \frac{\partial a''_1}{\partial s}\sin\nu = a\, n - a' p.$$

Quant aux équations fondamentales, on a, pour correspondre à (13),

$$(13')\qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial p'_1}{\partial s''} - \frac{\partial p''_1}{\partial s'}\right)\sin\lambda = q'r'' - r'q'' = \mathfrak{G}, \\ \left(\frac{\partial q'_1}{\partial s''} - \frac{\partial q''_1}{\partial s'}\right)\sin\mu = r'p'' - p'r'' = \mathfrak{H}, \\ \left(\frac{\partial r'_1}{\partial s''} - \frac{\partial r''_1}{\partial s'}\right)\sin\nu = p'q'' - q'p'' = \mathcal{K}. \end{cases}$$

et, pour correspondre à (14),

$$(14')\qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial p'}{\partial s''} - \frac{\partial p''}{\partial s'}\right)\sin\lambda_1 = q'_1 r''_1 - r'_1 q''_1 = \mathfrak{G}_1, \\ \left(\frac{\partial q'}{\partial s''} - \frac{\partial q''}{\partial s'}\right)\sin\mu_1 = r'_1 p''_1 - p'_1 r''_1 = \mathfrak{H}_1, \\ \left(\frac{\partial r'}{\partial s''} - \frac{\partial r''}{\partial s'}\right)\sin\nu_1 = p_1 q'_1 - q_1 p'_1 = \mathcal{K}_1. \end{cases}$$

Introduisons, en dernier lieu, dans (8) et (9), les conditions (15), on aura, entre autres résultats,

$$\mathrm{p} = \frac{\mathrm{p}_1}{\cos\xi} + \frac{\mathrm{q}_1\cos\nu}{\cos\eta} + \frac{\mathrm{r}_1\cos\mu}{\cos\zeta},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$
$$\mathrm{p}_1 = \frac{\mathrm{p}}{\cos\xi} + \frac{\mathrm{q}\cos\nu_1}{\cos\eta} + \frac{\mathrm{r}\cos\mu_1}{\cos\zeta},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Que si l'on compare ces valeurs avec les formules (3 et (3′), on voit que les quantités p, q, r et p_1, q_1, r_1 ne sont autres, dans le cas actuel, que les projections *orthogonales* d'un même segment issu de l'origine.

Ce segment intervient en Cinématique; il mesure la vitesse instantanée de rotation ω d'un corps solide autour d'un point fixe.

En désignant par p, q, r et p_1, q_1, r_1 les projections *obliques* correspondantes; il résulte des formules (2) et (2′) que l'on a aussi

$$p + q\cos\nu + r\cos\mu = \mathrm{p} = p_1\cos\xi,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$
$$p_1 + q_1\cos\nu_1 + r_1\cos\mu_1 = \mathrm{p}_1 = p\cos\xi,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les équations du segment ω, ou mieux, de l'axe instantané coïncidant, admettent dès lors cette double forme

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} = \frac{\rho}{\omega},$$
$$\frac{x_1}{p_1} = \frac{y_1}{q_1} = \frac{z_1}{r_1} = \frac{\rho}{\omega},$$

avec

$$\omega^2 = \Sigma p^2 + 2\Sigma qr\cos\lambda = \Sigma p_1^2 + 2\Sigma q_1 r_1\cos\lambda_1.$$

Les composantes p', q', r' et p'', q'', r'' donneraient lieu à des considérations de même nature, sur lesquelles nous ne saurions insister ici.

III. — Application aux systèmes triples de surfaces. Généralisation du théorème de Dupin relatif aux surfaces orthogonales.

8. Cherchons d'abord les conditions qui permettent de transformer les pseudo-surfaces coordonnées $(\mathcal{F})$, $(\mathcal{F}')$ et $(\mathcal{F}'')$ en leurs limites respectives qui seront les surfaces coordonnées (F), (F') et (F'').

Pour cela, au lieu de considérer les arcs ds, ds', ds'' comme indépendants, ainsi que nous l'avons fait jusqu'ici, concevons qu'ils soient des fonctions données A, A', A'' de trois paramètres quelconques u, u', u'', et, conséquemment, posons

$$ds = \mathrm{A}\,du, \qquad ds' = \mathrm{A}'\,du', \qquad ds'' = \mathrm{A}''\,du'',$$

avec

$$d\mathrm{S}^2 = \Sigma\,\mathrm{A}^2\,du^2 + 2\,\Sigma\,\mathrm{A}'\mathrm{A}''\,du'\,du''\cos\lambda$$

pour l'arc *résultant* $d\mathrm{S}$.

Si l'on désigne par $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ les coordonnées de l'origine M par rapport au trièdre fixe (T), on aura

$$\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial u} = \mathrm{A}\,a, \qquad \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial u'} = \mathrm{A}'\,a', \qquad \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial u''} = \mathrm{A}''\,a''.$$

Des deux dernières, par exemple, on conclut que

$$\frac{\partial^2 \mathrm{X}}{\partial u'\,\partial u''} = \mathrm{A}'\frac{\partial a'}{\partial u''} + a'\frac{\partial \mathrm{A}'}{\partial u''},$$
$$\frac{\partial^2 \mathrm{X}}{\partial u''\,\partial u'} = \mathrm{A}''\frac{\partial a''}{\partial u'} + a''\frac{\partial \mathrm{A}''}{\partial u'};$$

d'où

$$\mathrm{A}'\mathrm{A}''\frac{\partial a'}{\partial s''} + a'\frac{\partial \mathrm{A}'}{\partial u''} = \mathrm{A}'\mathrm{A}''\frac{\partial a''}{\partial s'} + a''\frac{\partial \mathrm{A}''}{\partial u'}.$$

Substituant à $\dfrac{\partial a'}{\partial s''}$, $\dfrac{\partial a''}{\partial s'}$ leurs valeurs déduites des systèmes dont (6) est le type et égalant ensuite entre eux les coefficients de a, a', a'', on trouve, pour transformer la pseudo-surface ($\mathfrak{F}$), tangente au plan des yz, en la surface correspondante (F), les conditions

$$(\mathrm{F})\qquad \begin{cases} -\mathrm{A}'\mathrm{A}''\mathrm{l}'_1 \sin\lambda = \dfrac{\partial \mathrm{A}'}{\partial u''} - \dfrac{\partial \mathrm{A}''}{\partial u'}\cos\lambda, \\[2ex] \mathrm{A}'\mathrm{A}''\mathrm{p}''_1 \sin\lambda = \dfrac{\partial \mathrm{A}''}{\partial u'} - \dfrac{\partial \mathrm{A}'}{\partial u''}\cos\lambda, \\[2ex] \dfrac{\mathrm{q}'_1 - \mathrm{l}'_1 \cos\nu_1}{\sin\nu_1} + \dfrac{\mathrm{n}''_1 - \mathrm{p}''_1\cos\mu_1}{\sin\mu_1} = 0, \end{cases}$$

cette dernière pouvant aussi, d'après (12), s'écrire

$$(15)\qquad \frac{\mathrm{q}' - \mathrm{n}'\cos\lambda}{\sin\lambda} + \frac{\mathrm{n}'' - \mathrm{q}''\cos\lambda}{\sin\lambda} = 0$$

ou mieux

$$(15')\qquad \mathrm{q}' + \mathrm{n}'' - (\mathrm{n}' + \mathrm{q}'')\cos\lambda = 0.$$

Si l'on fait un calcul semblable sur l'identité

$$\frac{\partial^2 \mathrm{X}}{\partial u''\,\partial u} = \frac{\partial^2 \mathrm{X}}{\partial u\,\partial u''},$$

on trouvera, pour transformer ($\mathfrak{F}'$) en (F'),

$$(\mathrm{F}')\qquad \begin{cases} -\mathrm{A}''\mathrm{A}\,\mathrm{m}''_1 \sin\mu = \dfrac{\partial \mathrm{A}''}{\partial u} - \dfrac{\partial \mathrm{A}}{\partial u''}\cos\mu, \\[2ex] \mathrm{A}''\mathrm{A}\,\mathrm{q}_1 \sin\mu = \dfrac{\partial \mathrm{A}}{\partial u''} - \dfrac{\partial \mathrm{A}''}{\partial u}\cos\mu, \\[2ex] \dfrac{\mathrm{r}''_1 - \mathrm{m}''_1\cos\lambda_1}{\sin\lambda_1} + \dfrac{\mathrm{l}_1 - \mathrm{q}_1\cos\nu_1}{\sin\nu_1} = 0. \end{cases}$$

Enfin, de l'identité $\dfrac{\partial^2 \mathrm{X}}{\partial u\,\partial u'} = \dfrac{\partial^2 \mathrm{X}}{\partial u'\,\partial u}$, on tirera, pour transformer ($\mathfrak{F}''$) en (F''),

$$(\mathrm{F}'')\qquad \begin{cases} -\mathrm{A}\mathrm{A}'\mathrm{n}_1 \sin\nu = \dfrac{\partial \mathrm{A}}{\partial u'} - \dfrac{\partial \mathrm{A}'}{\partial u}\cos\nu, \\[2ex] \mathrm{A}\mathrm{A}'\mathrm{r}'_1 \sin\nu = \dfrac{\partial \mathrm{A}'}{\partial u} - \dfrac{\partial \mathrm{A}}{\partial u'}\cos\nu, \\[2ex] \dfrac{\mathrm{p}_1 - \mathrm{n}_1\cos\mu_1}{\sin\mu_1} + \dfrac{\mathrm{m}'_1 - \mathrm{r}'_1\cos\lambda_1}{\sin\lambda_1} = 0. \end{cases}$$

Rapprochant du type (12) les trois conditions indépendantes de A, A′, A″, on voit qu'elles peuvent être mises sous la forme

(16) $\quad q'_{\alpha_1} + n''_{\alpha_1} = 0, \qquad r''_{\beta_1} + l_{\beta_1} = 0, \qquad p_{\gamma_1} + m'_{\gamma_1} = 0.$

Lorsque les surfaces coordonnées sont orthogonales, ces conditions se réduisent à

(16′) $\quad q' + r'' = 0, \qquad r'' + p = 0, \qquad p + q' = 0$

et, par conséquent, à

(16″) $\quad p = q' = r'' = 0.$

Ceci va nous conduire à d'intéressantes remarques.

9. 1° Par des considérations dont l'exposé nous entraînerait trop loin, on peut prouver que, dans le cas notamment où les trois pseudo-surfaces coordonnées se coupent sous des angles invariables, les équations de leurs lignes asymptotiques sont respectivement pour chacune

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{l} r'_{\alpha_1}\, ds'^2 - (q'_{\alpha_1} - r''_{\alpha_1})\, ds'\, ds'' - q''_{\alpha_1}\, ds''^2 = 0, \\ p''_{\beta_1}\, ds''^2 - (r''_{\beta_1} - p_{\beta_1})\, ds''\, ds - r_{\beta_1}\, ds^2 = 0, \\ q_{\gamma_1}\, ds^2 - (p_{\gamma_1} - q'_{\gamma_1})\, ds\, ds' - p'_{\gamma_1}\, ds'^2 = 0. \end{array}\right.$$

Quant aux lignes de courbure de ces mêmes pseudo-surfaces, elles sont représentées par le système

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} q'\, ds'^2 + (r' + q'')\, ds'\, ds'' + r''\, ds''^2 = 0, \\ r''\, ds''^2 + (p'' + r)\, ds''\, ds + p\, ds^2 = 0, \\ p\, ds^2 + (q + p')\, ds\, ds' + q'\, ds'^2 = 0. \end{array}\right.$$

Or, dans le cas présent, les conditions générales (16) reviennent, d'après (12), à

$$\begin{array}{l} q' + r'' - (r' + q'')\cos\lambda = 0, \\ r'' + p - (p'' + r)\cos\mu = 0, \\ p + q' - (q + p')\cos\nu = 0. \end{array}$$

Elles expriment donc que les lignes de courbure (18) sont devenues rectangulaires, ce qui est, on le sait, une des propriétés caractéristiques des surfaces. C'est une première vérification.

2° Pour que les pseudo-surfaces coordonnées se coupent suivant leurs lignes de courbure, il faut et il suffit que les équations (18) prennent les formes réduites

$$\mathrm{B}\, ds'\, ds'' = 0, \qquad \mathrm{B}'\, ds''\, ds = 0, \qquad \mathrm{B}''\, ds\, ds' = 0,$$

ce qui exige que l'on ait

$$\mathrm{p} = \mathrm{q}' = \mathrm{r}'' = 0.$$

Quand les pseudo-surfaces se coupent à angles droits, ces conditions deviennent

$$p = q' = r'' = 0;$$

mais alors, d'après (16''), elles caractérisent trois surfaces. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Lorsque les pseudo-surfaces qui composent un système triple se coupent constamment deux à deux suivant leurs lignes de courbure (angulaires), ces pseudo-surfaces n'arrivent à former un système orthogonal qu'en se transformant en surfaces.*

C'est là, sous une forme nouvelle et plus générale, le célèbre théorème de Dupin.

IV. — Extension des équations de Codazzi et du théorème de Gauss.

10. Pour étendre aux surfaces nos équations fondamentales (n° 6), il faudra d'abord remplacer dans les systèmes (10) et (14) les dérivées partielles $\frac{\partial a}{\partial s}, \frac{\partial a_1}{\partial s}, \ldots$ par $\frac{1}{\mathrm{A}} \frac{\partial a}{\partial u}, \frac{1}{\mathrm{A}} \frac{\partial a_1}{\partial u}, \ldots$ et tenir compte de cette substitution dans le développement des identités qui nous ont conduit à ces équations.

En supposant toujours que les faces λ, μ, ν et λ_1, μ_1, ν_1 soient variables, on aura d'abord

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{l} \left[\dfrac{\partial(A'p'_1)}{\partial u''} = \dfrac{\partial(A''p''_1)}{\partial u}\right]\sin\lambda = A'A''(q'n'' - n'q'') = A'A''G, \\ \left[\dfrac{\partial(A'q'_1)}{\partial u''} = \dfrac{\partial(A''q''_1)}{\partial u'}\right]\sin\mu = A'A''(r'l'' - l'r'') = A'A''H, \\ \left[\dfrac{\partial(A'r'_1)}{\partial u''} = \dfrac{\partial(A''r''_1)}{\partial u'}\right]\sin\nu = A'A''(p'm'' - m'p'') = A'A''K. \end{array}\right.$$

Les combinaisons $A''A$ et AA' fourniront des résultats analogues.

Viennent ensuite les systèmes corrélatifs renfermant eux aussi, en tout, neuf équations dont voici les trois premières :

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{l} \left[\dfrac{\partial(A'l')}{\partial u''} = \dfrac{\partial(A''l'')}{\partial u'}\right]\sin\lambda_1 = A'A''(m'_1 r''_1 - r'_1 m''_1) = A'A''G_1, \\ \left[\dfrac{\partial(A'm')}{\partial u''} = \dfrac{\partial(A''m'')}{\partial u'}\right]\sin\mu_1 = A'A''(n'_1 p''_1 - p'_1 n''_1) = A'A''H_1, \\ \left[\dfrac{\partial(A'n')}{\partial u''} = \dfrac{\partial(A''n'')}{\partial u'}\right]\sin\nu_1 = A'A''(l'_1 q''_1 - q'_1 l''_1) = A'A''K_1. \end{array}\right.$$

On en conclut, en particulier, pour tout système triple orthogonal, les trois équations différentielles suivantes, entre les fonctions arbitraires A, A′, A″

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{A^2}\frac{\partial A'}{\partial u}\frac{\partial A''}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial u'}\left(\frac{1}{A^2}\frac{\partial A''}{\partial u}\frac{\partial A}{\partial u'}\right) + \frac{\partial}{\partial u''}\left(\frac{1}{A^2}\frac{\partial A}{\partial u''}\frac{\partial A'}{\partial u}\right) = 0,$$

. . . .

11. Considérons spécialement les équations du groupe (19). Parmi elles, il y en a trois, la première, la cinquième et la neuvième, c'est-à-dire celles qui correspondent directement aux conditions (F), (F′), (F″) du n° 8, auxquelles le théorème de Gauss est applicable.

Occupons-nous de la première. Puisqu'on a actuellement

$$\mathrm{l}'_1 = \mathrm{p}'_1 + \frac{1}{A'}\frac{\partial\lambda}{\partial u'},$$

les conditions (F) nous donnent

$$A'\,\mathrm{p}'_1 = -\frac{\partial\lambda}{\partial u'} - \frac{1}{A''\sin\lambda}\left(\frac{\partial A'}{\partial u''} - \frac{\partial A''}{\partial u'}\cos\lambda\right),$$

$$A''\,\mathrm{p}''_1 = \frac{1}{A'\sin\lambda}\left(\frac{\partial A''}{\partial u'} - \frac{\partial A'}{\partial u''}\cos\lambda\right).$$

Portant ces valeurs dans l'équation choisie, il viendra

$$\begin{aligned}\frac{\partial(A'\mathrm{p}'_1)}{\partial u''} - \frac{\partial(A''\mathrm{p}''_1)}{\partial u'} &= -\frac{\partial^2\lambda}{\partial u'\,\partial u''} - \frac{\partial}{\partial u''}\left(\frac{\dfrac{\partial A'}{\partial u''} - \dfrac{\partial A''}{\partial u'}\cos\lambda}{A''\sin\lambda}\right)\\ &\quad - \frac{\partial}{\partial u'}\left(\frac{\dfrac{\partial A''}{\partial u'} - \dfrac{\partial A'}{\partial u''}\cos\lambda}{A'\sin\lambda}\right)\\ &= \frac{A'A''}{\sin\lambda}(\mathrm{q}'\mathrm{n}'' - \mathrm{n}'\mathrm{q}'') = \frac{A'A''}{\sin\lambda}\,G. \qquad \text{C. Q. F. D.}\end{aligned}$$

On procédera de la même façon pour les deux autres.

12. Nous ferons remarquer, en terminant, que si l'on représente par $F(X,Y,Z) = 0$, l'équation de la surface (F) tangente au plan des yz, et rapportée à des *coordonnées rectangulaires,* on peut, à l'expression précédente de G, substituer celle-ci :

$$\left[\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)^2\right]G = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial X^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial X\,\partial Y} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial X\,\partial Z} & \left(\dfrac{\partial F}{\partial X}\right)^2 \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial X\,\partial Y} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial Y^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial Y\,\partial Z} & \left(\dfrac{\partial F}{\partial Y}\right)^2 \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial X\,\partial Z} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial Y\,\partial Z} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial Z^2} & \left(\dfrac{\partial F}{\partial Z}\right)^2 \\ \left(\dfrac{\partial F}{\partial X}\right)^2 & \left(\dfrac{\partial F}{\partial Y}\right)^2 & \left(\dfrac{\partial F}{\partial Z}\right)^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Des équations $F'(X, Y, Z) = 0$ et $F''(X, Y, Z) = 0$, on tirera des expressions analogues pour $\mathcal{J}'$ et $\mathcal{H}''$. C'est dans cette dernière spécialement que se trouvera reproduite, mais avec plus de symétrie, la seconde des formes donnée par Gauss au rapport qui lui sert à mesurer la courbure des surfaces.

REMARQUE SUR LE CAS DOUTEUX RELATIF A CERTAINS CARACTÈRES DE CONVERGENCE DES SÉRIES;

PAR M. G. FOURET.

---

1. Parmi les procédés dont on fait le plus souvent usage, pour reconnaître si une série à termes positifs

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$$

est convergente ou divergente, il en est deux, particulièrement simples, qui sont fondés sur la considération des expressions $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\sqrt[n]{u_n}$. L'application de l'un ou l'autre de ces caractères permet, avec plus ou moins de facilité, de voir si la série est convergente, sauf dans le cas spécial, appelé *cas douteux*, où l'expression considérée tend vers l'unité, par valeurs inférieures à un, ou bien finit par rester dans le voisinage de l'unité, sans être dès lors constamment supérieure à un, ni constamment inférieure à un nombre assignable plus petit que l'unité.

Nous allons faire voir que *si*, par suite des circonstances que nous venons de rappeler, *l'application du critère basé sur l'expression* $\sqrt[n]{u_n}$ *ne donne aucune con-*

clusion sur la convergence de la série, il en est de même du critère fondé sur la considération de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Cette proposition une fois établie, la réciproque en résultera sans démonstration.

2. Rappelons tout d'abord qu'une série, dont les termes ne décroissent pas indéfiniment, est divergente. Écartons ce cas, dans lequel la question se trouve résolue immédiatement, et supposons que les termes de la série tendent vers zéro. On pourra toujours trouver un nombre entier r assez grand pour que u_r et les termes suivants soient tous inférieurs à l'unité. Il en sera, par suite, de même des expressions telles que $\sqrt[n]{u_n}$, pour toutes les valeurs de n égales ou supérieures à r, les racines d'indice quelconque d'un nombre inférieur à un étant elles-mêmes plus petites que l'unité. Si donc l'expression $\sqrt[n]{u_n}$ ne fournit aucune indication sur la convergence ou la divergence de la série, cela proviendra de l'impossibilité d'assigner un nombre plus petit que l'unité, auquel $\sqrt[n]{u_n}$ soit inférieure, pour les valeurs suffisamment grandes de n ([1]).

Cela posé, on ne saurait trouver un nombre entier q, tel que, pour toutes les valeurs de n égales ou supérieures à q, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ fût plus grand que l'unité; sinon, les termes $u_q, u_{q+1}, u_{q+2}, \ldots$ formeraient une suite croissante, ce qui est contraire à l'hypothèse d'après laquelle les termes de la série décroissent indéfiniment.

3. D'autre part, si, pour des valeurs de n égales ou

([1]) Le cas où $\sqrt[n]{u_n}$ tendrait vers un, par valeurs plus petites que l'unité, est évidemment compris dans celui que nous venons d'énoncer. Il est donc inutile de le traiter à part.

supérieures à un certain entier p, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ était constamment inférieur à un certain nombre $\lambda < 1$, de sorte que l'on eût

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} < \lambda, \qquad \frac{u_{p+2}}{u_{p+1}} < \lambda, \qquad \ldots, \qquad \frac{u_{p+k}}{u_{p+k-1}} < \lambda,$$

on en déduirait

$$\frac{u_{p+k}}{u_p} < \lambda^k,$$

ou bien

$$u_{p+k} < u_p \lambda^k,$$

et, par suite

$$\sqrt[p+k]{u_{p+k}} < \lambda \sqrt[p+k]{\frac{u_p}{\lambda^p}}.$$

Deux cas sont à distinguer. En supposant d'abord $\frac{u_p}{\lambda^p} \leqq 1$, on aurait, quel que soit k,

$$\sqrt[p+k]{\frac{u_p}{\lambda^p}} \leqq 1$$

et, par conséquent,

$$\sqrt[p+k]{u_{p+k}} < \lambda.$$

En supposant au contraire $\frac{u_p}{\lambda^p} > 1$ et désignant par μ un nombre pris arbitrairement entre λ et l'unité, on pourrait toujours trouver un nombre entier assez grand pour que l'on eût

$$\lambda \sqrt[p+k]{\frac{u_p}{\lambda^p}} < \mu,$$

et à *fortiori*

$$\sqrt[p+k]{u_{p+k}} < \mu,$$

pour toutes les valeurs de k égales ou supérieures à cet entier.

De toute façon, dans l'un et l'autre cas, on pourrait déterminer, pour l'entier n, une valeur telle que, pour toutes les valeurs supérieures à celle-là, $\sqrt[n]{u_n}$ fût inférieur à un nombre déterminé plus petit que l'unité, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse faite au début de cette démonstration.

4. Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne pouvant, pour des valeurs suffisamment grandes de n, ni devenir et rester supérieur à un, ni devenir et rester inférieur à un nombre déterminé, plus petit que l'unité, quelque peu différent qu'il soit de l'unité, on doit en conclure que, dans l'hypothèse où nous nous sommes placé, l'expression $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, de même que $\sqrt[n]{u_n}$, ne permet aucunement de s'assurer de la convergence ou de la divergence de la série.

Il convient alors, comme on le sait, d'avoir recours à d'autres critères, tels que ceux donnés par Raabe et Duhamel, par M. Bertrand ([1]), lesquels permettent, dans bien des cas, de lever le doute que laisse subsister l'application de l'un ou l'autre des deux caractères de convergence dont nous venons de nous occuper.

5. Le théorème démontré plus haut (n° 3) peut s'énoncer ainsi :

([1]) Ces divers critères, ainsi que celui qui s'appuie sur la considération du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, se déduisent presque immédiatement d'un théorème remarquable et bien facile à démontrer, dont l'origine est due à Kummer (*Journal de Crelle*, t. 13), mais qui a été précisé et complété successivement par M. Dini (*Annali dell' Univ. Tosc.*, t. LX), par M. du Bois-Reymond (*Journal de Crelle-Borchardt*, t. 76; *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CVII, p. 941), et par M. Jensen (*Comptes rendus*, t. CVI, p. 729 et 1520; *Nouvelles Annales*, 3e série, t. VII, p. 196). — *Voir* également sur ce sujet divers articles intéressants de M. Cesaro (*Comptes rendus*, t. CVI, p. 1142 et 1791; *Nouvelles Annales*, 3e série, t. VII, p. 406).

Étant donnée une série à termes positifs

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots,$$

si, pour les valeurs suffisamment grandes de l'entier n, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est inférieur à un certain nombre $\lambda < 1$, on peut trouver un nombre $\mu < 1$, tel que, pour les valeurs suffisamment grandes de n, l'expression $\sqrt[n]{u_n}$ soit inférieure à μ.

On démontrerait d'une manière toute semblable cet autre théorème, qui est d'ailleurs sans intérêt au point de vue de la question traitée dans cette Note :

Si, pour les valeurs suffisamment grandes de n, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est supérieur à un certain nombre $\lambda > 1$, on peut trouver un nombre $\mu > 1$, tel que, pour les valeurs suffisamment grandes de n, l'expression $\sqrt[n]{u_n}$ soit supérieure à μ.

Le mode de raisonnement employé dans la démonstration de ces deux théorèmes est analogue à celui par lequel on démontre que, si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers une limite, il en est de même de $\sqrt[n]{u_n}$, et que les deux limites sont égales [1].

---

[1] *Voir* notamment NIEWENGLOWSKI, *Cours d'Algèbre*, t. I, p. 281.

THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE CINÉMATIQUE.

(EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. A. MANNHEIM.)

Dans une Communication qu'il a faite à l'Académie des Sciences (séance du 10 mars 1890), M. C. Bioche énonce ce théorème : *Si l'on considère les surfaces réglées engendrées par des droites qui font des angles constants avec la tangente, la normale et la binormale d'une courbe, les points centraux des génératrices qui passent par un même point de la courbe sont sur un cylindre de révolution. Ce cylindre a pour génératrices diamétralement opposées la droite rectifiante et la perpendiculaire commune à deux normales principales infiniment voisines.*

Ne serait-il pas bon de faire remarquer que ce théorème n'est nullement particulier à une courbe gauche? La courbe n'intervient seulement, en effet, que pour définir le déplacement du trièdre tri-rectangle qui entraîne les droites. On pourrait aussi bien définir de toute autre manière le déplacement de ces droites; car la propriété, relative aux points centraux des surfaces qu'elles engendrent, est vraie pour un déplacement infiniment petit quelconque.

La démonstration de cette propriété générale résulte immédiatement de la construction, pour une droite mobile D, du point central de la surface (D) qu'elle engendre, lorsqu'on connaît l'axe du déplacement.

Pour une position de la droite mobile D, le point central est le pied de la perpendiculaire commune à cette droite et à l'axe du déplacement ([1]). Si les droites

([1]) *Voir* mon *Cours de Géom. descript.*, 2e éd., p. 361.

entraînées passent par un même point a et si on les projette sur le plan (H), mené par a perpendiculairement à l'axe du déplacement, les projections des points centraux sur (H) sont alors les pieds des perpendiculaires abaissées sur ces droites du point o où l'axe du déplacement rencontre (H), c'est-à-dire que ces points sont sur la circonférence décrite sur le plan (H) et qui a oa comme diamètre.

On voit tout de suite ainsi que :

Si des droites, qui passent par un même point a, *sont liées à une figure mobile de grandeur invariable, pour une position de ces droites, les points centraux relatifs aux surfaces qu'elles engendrent appartiennent à un cylindre de révolution qui passe par l'axe du déplacement de la figure mobile et dont la section droite a pour diamètre la distance de* a *à cet axe.*

Ce théorème résulte si directement de la construction que j'ai rappelée plus haut, que j'ai pu le faire trouver, en interrogation, par quelques-uns de mes élèves.

(Mars 1890.)

BIBLIOGRAPHIE.

Essai sur la Géométrie de la règle et de l'équerre; par M. *G. de Longchamps*, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne. Paris, Ch. Delagrave et Gauthier-Villars et fils; 1890.

Le genre de Géométrie auquel Brianchon a donné le nom de *Géométrie de la règle* est d'origine assez récente. On en trouve les premiers vestiges dans un Ouvrage anonyme, publié en Pologne à la fin du XVIe siècle et dont l'auteur, resté inconnu, s'était proposé de résoudre, en se servant uniquement de jalons, certains problèmes de Géométrie pratique qui se présentent particulièrement à la guerre. C'est la lecture de cet Ouvrage intitulé *Geometria peregrinans* qui a suggéré à Schooten l'idée de consacrer un Livre de ses *Exercitationes geometricæ* à la résolution, par la ligne droite seule, de divers problèmes relatifs à des points inaccessibles ou invisibles.

La voie ouverte par le savant commentateur de Descartes a été suivie avec succès par quelques géomètres distingués, parmi lesquels il faut citer Ozanam, Lambert, Mascheroni et surtout Servois, qui a donné des solutions simples et pratiques pour les principaux problèmes géométriques qui se rapportent à l'art militaire. L'Ouvrage de Servois, publié à Metz, l'an XII, est devenu fort rare; aussi devons-nous des remerciements à M. de Longchamps qui le fait connaître au moins dans ses traits essentiels. Hâtons-nous d'ailleurs de dire que M. de Longchamps n'a pas seulement fait preuve d'érudition; s'il a résumé avec art les travaux de ses devanciers, il a aussi traité des questions nouvelles, et, qui mieux est en ces matières, il a indiqué des solutions plus simples pour un grand nombre de problèmes déjà résolus. On ne saurait trop répéter combien il importe de savoir résoudre les questions d'arpentage par des procédés différents; telle solution, parfaite en théorie, devient vaine et illusoire sur le terrain, et la diversité des solutions est rendue nécessaire par la variété des conditions où l'on peut se trouver placé dans la pratique.

Nous n'insisterons guère sur la première Partie du Livre de M. de Longchamps : c'est une introduction presque exclusivement théorique et consacrée à des principes qui seront utilisés plus tard. Toutefois, ces principes reçoivent une première application dès le début, dans les Chapitres fort intéressants qui se rapportent aux tracés des coniques, de la cissoïde, de la strophoïde, de la trisectrice, du folium de Descartes, de la serpentine, du trident de Newton, du limaçon de Pascal, de la lemniscate, des quartiques pyriformes, etc.

Pour le tracé des coniques, M. de Longchamps fait un habile emploi d'un mode de transformation qu'il a rencontré en 1882 (*Journal de Mathématiques élémentaires*) et qu'il a appelé *transformation réciproque.* J'avais moi-même, douze ans auparavant, dans une des Notes que j'ai ajoutées à la *Géométrie descriptive* d'Olivier, fait connaître le mode de transformation en question, et, après avoir démontré sa propriété fondamentale, je l'avais appliqué à la courbe d'ombre de la vis à filet triangulaire. Il est naturel que ces additions à un Ouvrage non classique aient été peu remarquées, mais il est naturel aussi que je profite de l'occasion pour réclamer amicalement la priorité qui m'est due. Voici ce que j'écrivais, en 1870, dans l'Ouvrage cité :

« *Deux lignes* A *et* α *se correspondent point par point, de telle sorte que la droite qui joint deux points correspondants* M *et* μ *passe par un point fixe* P *et soit vue sous un angle droit d'un second point fixe* O.

» *Connaissant la tangente* $\mu\theta$ *en un point quelconque* μ *de la ligne* α, *trouver la tangente* MT *au point correspondant* M *de la ligne* A (nous laissons au lecteur le soin de faire la figure).

» Soient M' et μ' un second couple de points homologues; on sait, par un théorème dû à Frogier, que, si deux cordes d'une conique sont vues sous un angle droit d'un point de cette conique, ces cordes se coupent sur la normale en ce point. Par suite, la conique déterminée par les cinq points M, M', O, μ, μ' a pour normale OP, c'est-à-dire est tangente en O à la droite fixe Ox menée par O perpendiculairement à OP. Donc, en passant à la limite, quand M' vient en M, on voit qu'il existe une conique passant par les trois points μ, M, O et touchant respectivement en ces points les droites $\mu\theta$, MT, OX.

» Mais, dans toute conique, une tangente est divisée harmoniquement par deux autres tangentes quelconques et par leur corde de contact; par suite, sur la tangente $\mu\theta$, le point de contact μ et les points ω, ρ, λ où cette tangente est coupée par les deux autres OX et MT et par leur corde de contact MO forment une division harmonique.

» On déterminera donc le conjugué harmonique ρ de ω par rapport à $\lambda\mu$, et, en joignant le point ρ au point M, on aura la tangente demandée MT. Dans le cas de l'hélicoïde de la vis à filet triangulaire, la courbe α est le cercle paramétrique de centre O; OM est parallèle à $\mu\theta$; donc λ est à l'infini et μ est le milieu de $\omega\rho$, en sorte qu'il suffit de prendre, sur $\mu\theta$, $\mu\rho = \mu\omega$

et de joindre le point ρ au point M. C'est la règle particulière qu'a trouvée Poncelet en appliquant habilement la méthode de Roberval. »

Mais revenons au Livre de M. de Longchamps, pour parler de la seconde Partie qui, à vrai dire, constitue le fond de l'Ouvrage. Elle se compose de douze Chapitres fort touffus, où l'on trouve, classés par ordre méthodique et résolus de façons très diverses, les problèmes principaux de la Géométrie de la règle et de l'équerre, tels que la largeur d'une rivière, les figures inaccessibles, le tir à grande distance, etc.

Le problème de la *largeur de la rivière* est à l'usage des pontonniers; Vauban lui-même en a donné une solution. Il s'agit d'apprécier rapidement, mais avec une précision suffisante, la largeur d'une rivière sur laquelle on doit jeter un pont en un point désigné. La question offre des cas particuliers très nombreux : les rives peuvent ne pas être parallèles, le passage peut s'effectuer près d'un confluent ou devant une île, et, dans ce dernier cas, il faut déterminer la largeur du bras situé de l'autre côté de l'île; enfin, la rive elle-même qui appartient au côté de la rivière sur lequel on se trouve peut ne pas être accessible immédiatement, et l'on veut cependant, pour profiter sans retard du moment favorable, préparer à l'avance tout ce qui est nécessaire pour effectuer le passage, et par conséquent connaître la largeur du cours d'eau.

On voit combien ce problème est complexe. Les questions relatives aux figures inaccessibles offrent encore plus de variété. Les deux problèmes les plus simples de ce genre sont la prolongation d'un alignement au delà d'un obstacle complètement ou partiellement accessible, et l'évaluation de la distance de deux points dont l'un est accessible.

Au premier cas se rattache le *problème du tunnel* ou de la *percée d'un bois :* un bois doit être traversé par une route rectiligne passant par deux points donnés, l'un en deçà, l'autre au delà du bois; pour gagner du temps, on veut attaquer la percée simultanément en ces deux points en traçant deux alignements formant une seule et même droite. Ou encore : deux allées qui concourent en un rond-point étant déjà pratiquées dans une forêt, on veut tracer une nouvelle allée qui, partant d'un point assigné sur la lisière, aboutisse au même rond-point.

Dans le second problème, il peut se faire que le but soit non seulement inaccessible, mais encore invisible et déterminé par deux alignements. Il peut arriver aussi, comme dans le *problème de la plate-forme,* que l'opérateur ne puisse se mouvoir que dans un espace fort restreint. Le but inaccessible peut d'ailleurs, au lieu d'être fixe, se mouvoir sur une droite donnée, etc. Enfin l'élément inaccessible, au lieu d'être un point, peut être une droite; de là de nouveaux problèmes, en quelque sorte corrélatifs des précédents.

Nous sommes resté jusqu'ici dans le cas simple d'un seul élément inaccessible ou invisible. Il peut y en avoir plusieurs, et le nombre des questions pratiques que l'on peut poser se trouve de la sorte singulièrement accru. Il faut citer en premier lieu la détermination de la *distance de deux points inaccessibles*, question rebattue, mais non épuisée; Mascheroni en a donné une vingtaine de solutions, toutes dénuées de valeur pratique, dont l'une cependant a été heureusement modifiée par Servois. M. de Longchamps en propose plusieurs autres qui méritent d'attirer l'attention. Signalons encore, dans le même ordre d'idées, la distance d'un point inaccessible à une droite inaccessible, la mesure de la grandeur d'un angle ou de l'aire d'un triangle inaccessibles, le fameux *problème de la capitale* où il s'agit de déterminer la bissectrice du saillant formé par deux lignes de fortification, enfin la question relative à la hauteur d'une tour, d'un mât, d'une montagne, d'un ballon, d'un nuage, etc.

Le tir des projectiles à grande distance et la guerre des sièges soulèvent bien des questions relatives à la Géométrie de la règle. Telles sont : l'*établissement d'un fort central* qui doit protéger également trois stations données; le *tir central* où il s'agit de placer des batteries à la même distance d'un but inaccessible; le *chemin de sûreté* où l'on propose de tracer autour d'un fort assiégé une ligne polygonale le plus rapprochée possible et telle que tous les points situés en dehors de cette ligne soient à l'abri du feu des assiégeants; l'*ouverture du feu* où l'on veut, connaissant la portée des canons d'une batterie, déterminer l'instant où les projectiles pourront atteindre un vaisseau ennemi qui s'avance vers cette batterie. Ne pouvant tout citer, nous appellerons particulièrement l'attention sur deux problèmes qui offrent un intérêt spécial, le *tir sur un but to-*

talement ou partiellement invisible et le *tir sur un but mobile,* questions qui sont de la plus haute importance pour l'artilleur qui ne veut pas consommer inutilement ses munitions. Signalons aussi, dans le dernier Chapitre, qui concerne des problèmes se rattachant à la Géométrie de la règle, sans en dépendre absolument, le problème du *passage* entre deux forts : connaissant la portée des pièces, on demande quel chemin on doit suivre pour passer entre les deux forts en courant le moindre risque; on admet d'ailleurs que la probabilité d'être atteint par les projectiles de l'un des forts, tant qu'on reste soumis à l'action de son tir, est proportionnelle au temps et en raison inverse de la distance.

Telle est l'analyse sommaire de ce Livre, qui s'adresse à tous ceux qui aiment la Géométrie, cette science si belle et si parfaite que les programmes tiennent aujourd'hui trop dédaigneusement à l'écart. On y reviendra sans nul doute, la fixité des idées n'étant pas la qualité dominante dans notre pays. En tout cas, toute tentative pour y ramener les esprits est de bon aloi et doit être hautement encouragée. Puisse le succès de M. de Longchamps couronner ses efforts! Chacun trouvera agrément et profit dans la lecture de son Livre : en particulier, les candidats aux Écoles spéciales ont là un charmant sujet d'étude pour les vacances. Le style est de vive allure et toutes les difficultés ont disparu sous la plume habile du savant professeur, à qui nous n'adresserons qu'un reproche : le titre de l'Ouvrage est trompeur pour vouloir être trop modeste: ce n'est pas un *essai,* c'est un coup de maître; le proclamer est pour nous un devoir, et ajoutons que c'est aussi un plaisir, l'auteur nous étant tout particulièrement sympathique.

E. R.

PROPRIÉTÉS FOCALES DES CONIQUES ET DES QUADRIQUES;

PAR M. RAVIER,

Élève du lycée Condorcet.

Dans tout ce qui suit, nous employons uniquement les coordonnées tangentielles : une conique est alors une courbe de seconde classe; une quadrique, une surface de seconde classe. Nous adoptons pour définition des foyers celle de Plücker.

1. Un grand nombre de propriétés focales des coniques se déduisent du théorème suivant :

Théorème I. — *Trois coniques* $C = 0$, $C' = 0$, $C'' = 0$ *déterminent un réseau de coniques ayant pour équation*

$$\lambda C + \lambda' C' + \lambda'' C'' = 0.$$

Si, aux quatre tangentes communes à deux coniques $S' = 0$, $S'' = 0$ *de ce réseau, on peut inscrire une conique bitangente à une troisième conique* $S = 0$ *du réseau, aux quatre tangentes communes à* $C' = 0$ *et* $C'' = 0$ *on peut inscrire une conique bitangente à* $C = 0$.

Soient

$$S' = \mu' C + \mu'_1 C' + \mu'_2 C'' = 0,$$
$$S'' = \mu'' C + \mu''_1 C' + \mu''_2 C'' = 0$$

les deux premières coniques du réseau, et

$$S = \mu C + \mu_1 C' + \mu_2 C'' = 0$$

la dernière.

Par hypothèse, une des coniques de la forme

$$\lambda' S' + \lambda'' S'' = 0$$

est bitangente à $S = 0$; on a donc

$$\lambda S + \lambda' S' + \lambda'' S'' \equiv p^2,$$

$p = 0$ étant l'équation d'un point. Remplaçant λS, $\lambda' S'$, $\lambda'' S''$ par leurs valeurs en fonction de C, C', C'', on trouve

$$\Lambda C + \Lambda' C' + \Lambda'' C'' \equiv p^2.$$

A, A', A'' étant des constantes, ce qui démontre le théorème et en outre le suivant :

THÉORÈME II. — *Le point de rencontre des tangentes communes est le même dans les deux systèmes de coniques bitangentes que désigne le théorème précédent.*

Ce point est celui qui a pour équation $p = 0$.

2. Voici quelques applications.

THÉORÈME III. — *Quand des coniques homofocales à des coniques données sont bitangentes, le quadrilatère des tangentes communes à ces coniques est circonscriptible à un cercle.*

Nous désignons par $\boxed{IJ}$ la courbe de seconde classe constituée par les points cycliques.

Pour démontrer le théorème, on suppose, dans la proposition précédente, que $C' = 0$, $C'' = 0$ représentent les coniques données, que $C'' = 0$ représente $\boxed{IJ}$, que $S = 0$, $S' = 0$ représentent les homofocales considérées de ces coniques, et que $\boxed{IJ}$ représente $S'' = 0$.

La conique inscrite dans le quadrilatère des tangentes communes à $S' = 0$ et à $S'' = 0$ est la conique $S' = 0$ elle-même ; elle est bien bitangente à C. On reconnaît également sans difficulté que les autres conditions de l'énoncé sont remplies.

Le centre du cercle inscrit au quadrilatère, point qui est à la rencontre des tangentes communes à ce cercle et à $C'' = 0$ ou $\boxed{IJ}$, est, par suite du théorème II, le point de rencontre des tangentes communes aux homofocales des coniques données qui sont bitangentes.

Dans le cas particulier où $C' = 0$, $C'' = 0$ sont des systèmes de deux points, les foyers de $S = 0$ et de $S' = 0$, le théorème subsiste, et s'énonce ainsi :

Théorème IV. — *Deux coniques étant bitangentes, les foyers de l'une, joints aux foyers de l'autre, déterminent quatre droites tangentes à un cercle ayant pour centre le point de rencontre de leurs tangentes communes.*

Si l'on suppose que $S' = 0$ se réduit à un système de deux points situés sur $S = 0$, on a ce nouvel énoncé :

Théorème V. — *Deux points d'une conique joints à ses foyers déterminent quatre droites tangentes à un cercle ayant pour centre le point de rencontre des tangentes en ces deux points.*

On déduit immédiatement de là que :

Théorème VI. — *La tangente fait des angles égaux avec les rayons vecteurs.*

En effet, on sait (Th. V) qu'un point de la tangente est le centre d'un cercle tangent aux deux rayons vecteurs. D'ailleurs, on sait que les foyers réels sont dans la région intérieure de la conique, tandis que la tangente est dans la région extérieure. On en déduit, connaissant la forme de ces courbes, les énoncés du théorème pour le cas de l'ellipse, de l'hyperbole, de la parabole.

Corollaire I. — De ce que la tangente fait des angles égaux avec les rayons vecteurs, on déduit facilement que, dans le cas de l'ellipse, la différentielle de leur somme; dans le cas de l'hyperbole, celle de leur différence, sont des quantités nulles. Par suite, la somme (dans une ellipse) ou la différence (dans une hyperbole) des rayons vecteurs est constante.

Corollaire II. — Considérons une ellipse, et menons les tangentes en deux points M et M′ situés sur une parallèle à l'axe des foyers réels F et F′; soit O le point de rencontre des tangentes en M et M′, et FD une perpendiculaire à OF. D'après le théorème V, FO et FD sont les bissectrices de l'angle MFM′ et les points A et D où ces bissectrices rencontrent MM′ sont conjugués harmoniques par rapport à M et à M′. Le point D appartient donc à la polaire de A; mais il est sur MM′, polaire de O, il est donc le pôle de OAF et appartient à la polaire de F, c'est-à-dire à la directrice. D'ailleurs, d'après les propriétés de la bissectrice,

$$\frac{\mathrm{FM}}{\mathrm{MD}} = \frac{\mathrm{FM'}}{\mathrm{M'D}} = \frac{\dfrac{\mathrm{FM}+\mathrm{FM'}}{2}}{\dfrac{\mathrm{MD}+\mathrm{M'D}}{2}}.$$

Le numérateur du dernier rapport est constant, d'après le corollaire I, son dénominateur aussi, puisqu'il représente la distance du petit axe à la directrice; le rapport $\frac{\mathrm{FM}}{\mathrm{MD}}$ est donc constant.

La même démonstration est applicable à l'hyperbole et à la parabole.

3. Théorème VII. — *Quatre quadriques* $C = 0$, $C' = 0$, $C'' = 0$, $C''' = 0$ *déterminent un réseau de quadriques ayant pour équation*

$$\lambda C + \lambda' C' + \lambda'' C'' + \lambda''' C''' = 0.$$

Si, aux huit plans tangents communs à trois quadriques $S' = 0$, $S'' = 0$, $S''' = 0$ *de ce réseau, on peut inscrire une quadrique inscrite à une quatrième quadrique* $S = 0$ *du réseau, aux huit plans tangents com-*

muns à $C' = 0$, $C'' = 0$ *et* $C''' = 0$, *on peut inscrire une quadrique inscrite à* $C = 0$.

Même démonstration que pour le théorème I, et l'on en conclut le théorème suivant :

Théorème VIII. — *Si deux coniques* A, A′ *sont sur une même quadrique* Q, *le sommet du cône circonscrit à* Q *suivant* A *est le centre d'une sphère tangente aux huit plans tangents communs à* A, *à* A′ *et à une quadrique* Q′ *homofocale de* Q,

4. Voici quelques applications.

Remplaçons, dans l'énoncé du théorème VII,

$C = 0$ par le cercle de l'infini,
$C' = 0$ par Q,
$C'' = 0$ par A,
$C''' = 0$ par A′,
$S = 0$ par Q′,
$S' = 0$ par Q,
$S'' = 0$ par A,
$S''' = 0$ par A′,

et supposons que les coniques A et A′ se rapprochent jusqu'à se toucher. Deux des huit plans tangents communs viendront se confondre suivant un plan passant par la tangente D commune à A et à A′; deux autres des plans tangents communs viendront également se confondre suivant un plan passant par D; de plus, le sommet du cône circonscrit à Q suivant A viendra dans le plan tangent à A passant par D. Donc :

Théorème IX. — *Les plans menés par une tangente à une quadrique tangentiellement à une quadrique homofocale font des angles égaux avec le plan tangent mené par la même droite à la première quadrique.*

Il est facile d'en déduire que :

THÉORÈME X. — *Un cône circonscrit à une quadrique admet pour plan principal le plan tangent à toute homofocale à cette quadrique qui passe par son sommet.*

D'où l'on conclut que :

THÉORÈME XI. — *Les plans tangents à trois quadriques homofocales qui passent par un point forment un trièdre trirectangle et sont les plans principaux communs de tous les cônes ayant pour sommet ce point et circonscrits à une quadrique homofocale aux proposées.*

Les exemples précédents suffisent pour montrer l'importance et la fécondité des théorèmes I et VII.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1593. On donne un triangle abc. On trace une circonférence qui passe par a, elle coupe ab en c' et ac en b'. On trace une circonférence qui passe par b et c', elle coupe bc en a' et la première circonférence en i : les points i, a', c, b' sont sur une même circonférence.

On prend un point arbitraire O sur le plan abc. La droite Oa coupe en α la circonférence qui passe par a. La droite Ob coupe en β la circonférence qui passe par b. Enfin, sur la troisième circonférence, on a γ à sa rencontre avec Oc.

Démontrer que les points O, α, β, γ, i sont sur une même circonférence.

(MANNHEIM.)

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES D'APRÈS LEUR DÉFINITION;

PAR M. L. MALEYX.

CHAPITRE I.

Définitions ; classification des sections coniques en trois genres.

I. On donne le nom de *cône à base circulaire* à la surface illimitée engendrée par une droite qui s'appuie constamment sur une circonférence de cercle, et qui, dans son mouvement, ne cesse de passer par un point fixe pris hors du plan de la circonférence ; ce point porte le nom de *sommet du cône*.

Le sommet d'un cône divise sa surface en deux parties illimitées qui ont reçu le nom de *nappes*.

On appelle *section conique*, ou simplement *conique*, l'intersection d'un cône à base circulaire par un plan.

Un plan mené par le sommet d'un cône peut avoir par rapport à lui trois positions distinctes; il peut laisser les deux nappes de part et d'autre si sa trace sur le plan de la directrice circulaire ne rencontre pas cette ligne ; dans ce cas, le plan n'a de commun avec le cône que le sommet; il peut couper le plan de la directrice circulaire suivant une tangente à cette ligne; dans ce cas, il laisse encore les deux nappes de part et d'autre, mais il a en commun avec le cône deux génératrices confondues suivant celle qui passe par le point de contact, il est alors tangent tout le long de cette génératrice ; enfin sa trace sur le plan de la directrice circulaire rencontre cette ligne en deux points, et alors le plan coupe le cône suivant deux génératrices distinctes.

Un plan sécant quelconque est nécessairement parallèle à une des trois positions de plans qu'on vient d'énumérer : de là trois genres de sections. S'il est parallèle à un plan situé dans la première position, il coupe toutes les génératrices sur une même nappe et donne lieu à une section limitée et fermée : c'est la section du genre elliptique ; s'il est parallèle à un plan situé dans la deuxième position, il rencontre encore toutes les génératrices sur une même nappe, sauf celle qui est située dans le plan parallèle mené par le sommet, et donne lieu à une section illimitée composée d'une seule partie : c'est la section du genre parabolique ; enfin, s'il est parallèle à un plan situé dans la troisième position, il rencontre les génératrices sur les deux nappes, sauf celles qui sont situées dans le plan parallèle mené par le sommet, et donne lieu à une section composée de deux parties illimitées : c'est la section du genre hyperbolique.

Il est évident, par considération d'homothétie, que la section par un plan parallèle à celui de la directrice circulaire, et qui est du genre elliptique, d'après ce que nous venons de voir, est aussi circulaire. Il est encore évident, par définition, qu'une section conique ne peut être rencontrée par une droite en plus de deux points, car, s'il en était ainsi, le plan passant par cette droite et le sommet couperait la surface du cône suivant plus de deux droites, et sa trace sur le plan du cercle directeur couperait sa circonférence en plus de deux points.

On appelle *centre d'une courbe* un point qui divise en deux parties égales toutes les sécantes rectilignes qui passent par ce point et qui sont limitées à la courbe de part et d'autre.

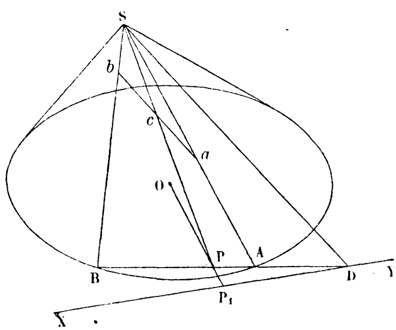
On donne le nom de *diamètre* au lieu géométrique du point milieu d'une sécante, limitée de part et d'autre à une courbe, lorsque cette droite se déplace parallèlement à une direction fixe.

Un diamètre rectiligne perpendiculaire aux cordes qu'il divise en deux parties égales est un *axe*, et ses points communs avec la courbe sont des *sommets* de cette ligne.

Du centre et des diamètres dans l'ellipse; premières propriétés de direction.

II. *La section elliptique a un centre.* — Soit le cône circulaire dont le sommet est S et O le cercle directeur (*fig.* 1); menons par le sommet un plan parallèle au

Fig. 1.



plan sécant; il coupera le plan de la base circulaire suivant une droite, XY, extérieure au cercle directeur.

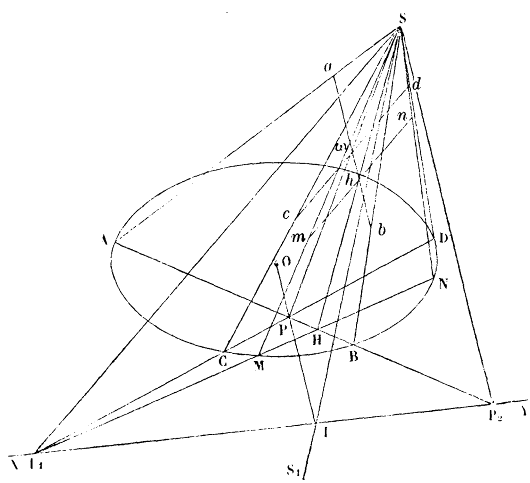
Soit P le pôle de XY par rapport au cercle, unissons le pôle P au sommet S, cette droite coupera le plan sécant en un point c; faisons passer par SP un plan variable, coupant le cercle directeur en A et B et la polaire XY de P en D; construisons les génératrices SA, SB, suivant lesquelles le plan auxiliaire coupe le cône, et traçons également la droite SD. Le plan auxiliaire coupera le plan de la section, qui est parallèle au plan SXY, suivant une parallèle à SD passant par le point c, et rencontrant les génératrices SA, SB, aux points a et b qui appartiendront à la section; or le faisceau S. ABDP est harmonique : dès lors la droite acb, parallèle au rayon SD, est divisée par le point fixe c en deux parties égales.

Les points de la section sont donc situés deux à deux en ligne droite avec le point fixe c, qui divise leur distance en deux parties égales; c est donc un centre de la section, et l'on doit remarquer qu'il est situé à l'intersection du plan de la section avec la droite qui unit le sommet du cône au pôle de la trace, sur le plan et la base circulaire, du plan parallèle au plan sécant mené par le sommet.

III. *La section elliptique n'admet que des diamètres rectilignes; ces diamètres passent tous par le centre; ils sont conjugués deux à deux, c'est-à-dire se distribuent par couples, tels que l'un de ces diamètres divise en parties égales les cordes parallèles à l'autre.*

Soient S le sommet d'un cône et O le cercle directeur (*fig.* 2); proposons-nous de trouver les diamètres d'une section elliptique. Pour cela menons, par le sommet S, un plan parallèle à celui de la section, coupant le plan de la directrice suivant la droite XY qui ne rencontre pas le cercle; menons aussi la droite SP_1 dans la direction des cordes que le diamètre doit diviser en deux parties égales, et qui rencontre XY en P_1. Si nous faisons tourner un plan variable autour de SP_1, il coupera le plan de la section suivant une parallèle à SP_1 dans toutes ses positions. Traçons la polaire AB du point P_1, par rapport au cercle O, et supposons que le plan variable, dans une de ses positions, coupe le plan de la base suivant MN; il coupera le cône suivant les

Fig. 2.



génératrices SM, SN, et le plan SAB suivant SH, formant avec SP_1 le faisceau harmonique $S.MNHP_1$. Le même plan coupera le plan de la section suivant la droite *mn* parallèle à SP_1 et divisée en deux parties égales au point *h* par le rayon conjugué SH. Du reste, le point *h* appartient à la fois au plan de la section, au plan SAB, qui sont fixes, et au plan variable SP_1MN; donc le lieu de ce point, qui est le diamètre relatif aux cordes parallèles à SP_1, est la droite d'intersection du plan de la section et du plan SAB qui sont fixes, soit la droite *ab*.

Puisque le pôle P_1 de la droite AB est situé sur XY, la polaire AB de ce point doit passer par le pôle P de XY, et si l'on considère le plan variable dans la position SP_1P, on peut en conclure que le diamètre *ab*, divisant en parties égales les cordes parallèles à SP_1, passe par le centre ω de la section.

Prolongeons AB, polaire du point P_1, jusqu'à sa rencontre avec XY en P_2, la droite P_1CPD, passant par les pôles P_1 et P des droites AB et XY, sera la polaire de leur point commun P_2 ; il en résulte que le faisceau $S.ABPP_2$ est harmonique ; le diamètre *ab* et la droite SP_2 sont parallèles comme intersections de deux plans parallèles par un troisième, et le diamètre *ab* qui divise en parties égales les cordes parallèles à SP_1 passe au centre et est divisé par ce point en deux parties égales.

En cherchant le diamètre qui divise en parties égales les cordes parallèles à SP_2, comme nous l'avons fait pour celui qui divise en parties égales les cordes parallèles à SP_1, nous trouvons la droite *cd* parallèle à SP_1 ; les diamètres de la section elliptique se partagent donc en couples, tels que chaque diamètre d'un couple divise en parties égales les cordes parallèles à l'autre : ils sont *conjugués* deux à deux.

IV. *Propriété des diamètres conjugués de la section elliptique.* — Si nous considérons le triangle PP_1P_2 de la *fig.* 2, nous pouvons remarquer que chacun de ses sommets est le pôle du côté opposé par rapport au cercle directeur du cône ; on peut, d'après cela, lui donner la dénomination de *triangle autopolaire*.

De plus, comme la polaire d'un point par rapport à un cercle est perpendiculaire au diamètre qui passe par le pôle, il en résulte que les droites OP, OP_1, OP_2, sont respectivement perpendiculaires à P_1P_2, PP_2, PP_1, et qu'en conséquence le point O, centre du cercle directeur, est le point de concours des hauteurs du triangle PP_1P_2.

Les points P et P_1 conjugués harmoniques par rapport à C et D sont situés d'un même côté du point milieu de la corde CD, d'où résulte que l'angle P_2PP_1 est obtus, et que la droite OP, perpendiculaire sur P_1P_2, rencontre cette droite au point I entre P_1 et P_2.

Les deux triangles P_1IO, PIP_2, dont nous n'avons pas tracé le côté OP_1, pour ne pas compliquer la figure, sont semblables; car ils sont rectangles en I et leurs angles IOP_1, IP_2P sont égaux comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires; d'où l'on conclut :

$$\frac{IP_1}{IP} = \frac{IO}{IP_2}$$

ou

$$\begin{aligned} IP_1 \times IP_2 = IP \times IO &= (IO - OP) \times IO \\ &= \overline{IO}^2 - OP \times IO = \overline{IO}^2 - R^2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que : *les parallèles à deux diamètres conjugués d'une section elliptique, menées par le sommet du cône, déterminent, sur l'intersection de leur plan avec celui de la directrice circulaire, deux points* P_1, P_2, *situés de part et d'autre de la projection* I *du centre du cercle sur la même droite, et tels que le produit de leurs distances au point* I *soit constant, et égal à la puissance du point* I *par rapport au cercle directeur, au signe près.*

Si l'un des points P_1, P_2 s'éloigne à l'infini, l'autre vient coïncider avec le point I, de sorte que le diamètre conjugué de celui qui est parallèle à XY a la direction de SI.

Remarque. — Si l'on considère le point P comme un centre d'homothétie, le système de deux diamètres conjugués d'une section elliptique a pour homologue le système de leurs parallèles menées par le sommet du cône, le rapport d'homothétie étant $\frac{P\omega}{PS}$ (*fig*. 2); la droite homologue de XY est la trace du plan de la section elliptique sur celui de la directrice circulaire, et il en résulte que deux diamètres conjugués de la section interceptent sur cette dernière droite, à partir de la projection sur elle du centre O, et de part et d'autre, deux segments qui ont avec IP_1, IP_2, le rapport constant $\frac{P\omega}{PS}$; d'où il suit que le produit de ces segments est aussi constant, puisqu'il est égal à $IP_1 \times IP_2 \times \left(\frac{P\omega}{PS}\right)^2$.

V. *Axes de la section elliptique. — Second système de sections circulaires.* — On déduit facilement du numéro précédent la construction des axes de la section elliptique. Observons d'abord que, dans cette section, chaque diamètre ayant un diamètre associé qui lui est conjugué, à chaque axe correspondra un second axe perpendiculaire au premier et qui formera avec lui un système de diamètres conjugués rectangulaires. Dès lors, et d'après le numéro précédent, pour trouver les parallèles aux axes menées par le sommet S du cône, (*fig*. 2), il suffira de mener par ce point, et dans le plan SXY, un système de deux droites rectangulaires interceptant sur XY à partir du point I, et de part et d'autre, deux segments dont le produit soit égal à la puissance du point I par rapport au cercle O, au signe près. D'après cela, si nous prolongeons SI d'une longueur IS_1, telle que le produit $IS \times IS_1$ soit égal à $\overline{OI}^2 - R^2$, les deux points S, S_1, et ceux où un système de parallèles à deux axes conjugués menées par le point S coupent XY, sont situés sur un même cercle dont le centre se trouve sur XY, à sa rencontre avec la perpendiculaire élevée au milieu de SS_1.

De là sa construction : *Au milieu de* SS_1 *et dans le plan* SXY *on élève une perpendiculaire dont on prend le point commun avec* XY, *de ce point comme centre on décrit un cercle passant par* S *et* S_1, *les points où la circonférence de ce cercle rencontre* XY *étant unis au point* S *par des lignes droites, ces droites donneront les directions d'un système d'axes conjugués.*

Le problème admet toujours une solution, il en admet généralement une seule, d'où résulte que la section elliptique admet un et un seul système de deux axes conjugués qui peuvent être construits. Un seul cas d'indétermination peut se présenter : celui où SS_1 serait perpendiculaire à XY et divisé par cette ligne en I en deux parties égales ; dans ce cas tous les systèmes de diamètres conjugués de la section seraient rectangulaires. Pour qu'il en fût ainsi, il faudrait que le plan SOI fût perpendiculaire à XY, en conséquence au plan du cercle directeur et au plan de la section, ou encore que le plan de la section fût perpendiculaire au plan projetant orthogonalement SO sur le plan de la directrice circulaire; en second lieu qu'on eût l'égalité

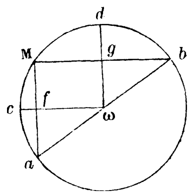
$$IS \times IS_1 = \overline{IS}^2 = \overline{IO}^2 - R^2,$$

ce qui exigerait que la droite IS fût antiparallèle du diamètre IO par rapport aux génératrices du cône passant par les extrémités de ce diamètre.

On peut voir que dans ce cas la section est circulaire ; en effet, considérons cette courbe dans son plan (*fig.* 3) : soit ω son centre. Traçons le diamètre fixe $a\omega b$, et unissons les extrémités a, b à un point quelconque M de la courbe; construisons encore les deux diamètres ωfc, φgd, qui divisent Ma, Mb en parties égales; ωc,

ωd sont respectivement parallèles à Mb et Ma, puisque dans le triangle aMb ces droites unissent les milieux de deux côtés.

Fig. 3.



Les deux diamètres ωc, ωd sont conjugués, puisque chacun d'eux divise en parties égales les cordes parallèles à l'autre; de plus ils sont rectangulaires d'après les hypothèses faites; en conséquence, les droites Mb, Ma, qui leur sont respectivement parallèles, sont rectangulaires, et la courbe lieu des sommets des angles droits dont les côtés passent par deux points fixes, a, b, est une circonférence de cercle.

Cette section et les sections parallèles constituent un nouveau système de sections circulaires du cône.

En dehors de ces sections et de celles qui sont parallèles au cercle directeur, il ne peut se trouver d'autres sections circulaires, car ce sont les seules parmi les sections elliptiques, et les autres, étant illimitées, ne peuvent être circulaires.

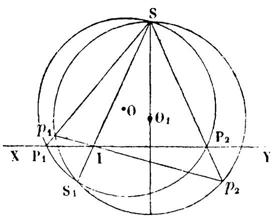
VI. *Construction de deux diamètres conjugués de la section elliptique faisant entre eux un angle donné.* — Si nous nous reportons à la *fig.* 2, et d'après la propriété des diamètres conjugués établie au n° IV, Chap. I, nous voyons que, pour construire les parallèles à deux diamètres conjugués faisant un angle donné menées par le sommet, il suffira, après avoir prolongé SI de IS, satisfaisant à l'égalité

$$IS \times IS_1 = \overline{OI}^2 - R^2,$$

de faire passer par S et S_1 un cercle tel que le segment passant par le point S et intercepté par XY soit capable de l'angle donné, et d'unir au point S ses points communs avec XY.

Ce cercle peut encore être déterminé par les conditions de passer aux points S et S_1 et de couper XY sous l'angle donné. Pour résoudre simplement la question,

Fig. 4.



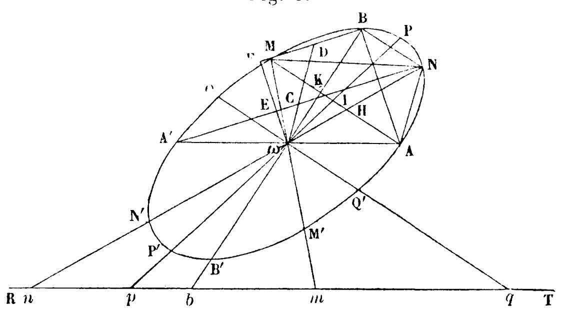
transformons la figure par rayons vecteurs réciproques dans le plan SXY, en prenant S pour pôle et pour puissance le produit $SI \times SS_1$.

Supposant le problème résolu, soit O le cercle cherché, passant par S et S_1, et coupant XY, sous l'angle donné, en P_1 et P_2 (*fig.* 4). La figure inverse de XY sera un cercle O_1 passant par le pôle de transformation S, et par le point S_1 transformé de I, ayant du reste pour diamètre SO_1 perpendiculaire à XY; ce cercle O_1 peut être ainsi facilement construit. La figure inverse du cercle O sera une droite p_1p_2 passant en I point transformé de S_1, et coupant le cercle O_1 sous l'angle donné; cette dernière donnée définit la longueur de la corde p_1p_2 et en conséquence sa distance au centre O_1.

On voit ainsi que le problème admet, généralement, deux solutions, définies par deux positions de $p_1 p_2$ symétriques par rapport à IO_1 ; les rayons cherchés sont les droites Sp_1, Sp_2. On voit toutefois que, le point I étant intérieur au cercle O_1 la corde $p_1 p_2$ ne peut couper ce cercle sous un angle quelconque; l'angle sous lequel se coupent deux diamètres conjugués de la section elliptique a un minimum (aigu), correspondant au minimum de la corde $p_1 p_2$, minimum perpendiculaire à IO_1.

VII. Lemme. — Soit ω une section elliptique, RT la trace de son plan sur celui de la directrice circulaire du cône auquel elle appartient, AA′ le diamètre parallèle à RT, BB′ son conjugué rencontrant RT au point b (*fig.* 5); il résulte de ce que nous avons vu au n° IV,

Fig. 5.



Chap. I, Rem., que deux diamètres conjugués de la courbe interceptent sur RT, à partir du point b, et de part et d'autre, deux segments dont le produit est constant. D'après cela, nous nous proposons de montrer que :

Si par deux des extrémités des diamètres AA′, BB′, *nous menons deux cordes parallèles* AM, BN, *de direction quelconque, les secondes extrémités* M, N *de ces cordes sont aussi celles de deux diamètres conjugués.*

Pour cela, construisons les diamètres MM′, NN′, et prolongeons-les jusqu'à leurs rencontres avec RT en m et n; construisons aussi le diamètre QQ′ parallèle à AM et son conjugué PP′ qui divise AM et BN en parties égales, et prolongeons ces diamètres jusqu'à leurs rencontres avec RT en q et p.

Le faisceau des quatre droites ωP, ωQ, ωA, ωM est harmonique, puisque la parallèle MA au rayon ωQ est divisée par les trois autres en deux parties égales; il en résulte que la parallèle RT au rayon ωA est divisée par les trois autres en deux parties égales; on a donc $mp = mq$, ou, reportant les distances à l'origine b,

$$bp + bm = bq - bm,$$

ou par transposition

$$2bm = bq - bp.$$

Le faisceau formé par les quatre droites ωP, ωQ, ωN, ωB est aussi harmonique, BN parallèle à ωQ étant divisée par les trois autres en deux parties égales; ce faisceau est coupé par RT aux quatre points p, q, b, n, tels que les deux derniers soient conjugués harmoniques des deux premiers, d'où l'on déduit, reportant l'origine des distances au point b,

$$\frac{bp}{bq} = \frac{bn - bp}{bn + bq},$$

ou faisant le produit des extrêmes égal à celui des moyens, transposant et tenant compte de l'égalité précédente,

$$2bp \times bq = bn \times (bq - bp) = 2bm \times bn.$$

$bp \times bq$ est le produit des segments interceptés sur RT à partir du point b par les diamètres conjugués ωP,

ωQ; le produit des segments bm, bn, interceptés de la même manière par les diamètres ωM, ωN, lui étant égal, on doit en conclure que ces diamètres ωM, ωN, sont conjugués, ce qui démontre le lemme énoncé, que nous généraliserons du reste dans le Chapitre suivant.

Premières propriétés métriques des diamètres de l'ellipse. Théorèmes d'Apollonius.

VIII. Considérons toujours la *fig.* 5 : les cordes AM, BN étant parallèles et le diamètre ωP les divisant en parties égales, divise aussi le segment HK de AM en deux parties égales, de sorte que le point I est le milieu commun de AM et de HK; on en conclut $KM = HA$, et $HM = KA$.

De là l'équivalence des triangles $K\omega A$, $H\omega M$, qui ont un sommet commun en ω et leurs bases égales KA, HM, situés sur la même ligne droite; d'où :

$$K\omega A = H\omega M.$$

De même les triangles KAB, HNM sont équivalents, comme ayant les bases KA, HM égales et en ligne droite, et mêmes hauteurs puisque leurs sommets B, N, sont sur une parallèle à la base; d'où :

$$KAB = HMN.$$

Ajoutant membre à membre les deux égalités précédentes,

$$\omega AB = M\omega N,$$

c'est-à-dire que le triangle ayant pour côtés deux demi-diamètres conjugués quelconques a une valeur constante égale à celle du triangle ωAB, d'où l'on peut déduire le premier des Théorèmes d'Apollonius, qui s'énonce ainsi : *le parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués quelconques d'une ellipse est équivalent au rectangle construit sur les deux demi-axes.* On voit, pour les mêmes motifs, les équivalences de triangles :

$$\omega KM = \omega HA, \qquad MKB = HNA,$$

et ajoutant membre à membre :

$$\omega MB = \omega NA\,;$$

du reste ωNA est évidemment équivalent à $\omega NA'$, car ces triangles ont des bases égales de même hauteur; on en déduit

$$\omega MB = \omega NA'.$$

Il résulte du lemme établi au numéro précédent que les cordes BM, NA′ sont parallèles; car, si par A′ on mène une parallèle à BM, elle doit passer par l'extrémité du diamètre conjugué à ωM, c'est-à-dire par le point N. (Voir *la note à la fin du présent numéro.*)

Les cordes BM, NA′ étant parallèles, leurs points milieux D, C sont sur un même diamètre ωCD qui sert de médianes aux triangles équivalents ωMB, ωNA′. Si du point ω nous abaissons la perpendiculaire commune ωEF aux cordes parallèles NA′, BM, on a, d'après un théorème connu, dans chacun des triangles ONA′, ωBM,

$$\overline{\omega N}^2 - \overline{\omega A'}^2 = 2\,NA' \times EC,$$

$$\overline{\omega B}^2 - \overline{\omega M}^2 = 2\,BM \times FD,$$

mais les triangles rectangles ωEC, ωFD sont semblables, et l'on en déduit

$$\frac{FD}{EC} = \frac{F\omega}{E\omega}.$$

Multipliant les deux membres par $\frac{BM}{NA'}$, nous avons

$$\frac{BM \times FD}{NA' \times EC} = \frac{BM \times F\omega}{NA' \times E\omega} = \frac{2\omega BM}{2\omega A'N} = 1\,;$$

d'où $NA' \times EC = BM \times FD$, et introduisant cette égalité dans les deux précédentes,

$$\overline{\omega N}^2 - \overline{\omega A'}^2 = \overline{\omega B}^2 - \overline{\omega M}^2,$$

par transposition et observant que $\omega A' = \omega A$, on a

$$\overline{\omega M} + \overline{\omega N}^2 = \overline{\omega A}^2 + \overline{\omega B}^2,$$

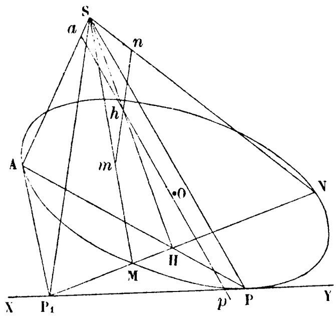
c'est-à-dire que *la somme des carrés de deux demi-diamètres conjugués quelconques d'une section elliptique est constante, et, en conséquence, égale à la somme des carrés des demi-axes,* ce qui est l'énoncé du second des Théorèmes d'Apollonius.

Note. — Nous avons admis que la parallèle à BM menée par le point A' passait en N ; en effet, si elle n'y passait pas, elle passerait par N', d'après le lemme cité ; mais, comme A'N' est parallèle à AN, il faudrait que AN fût parallèle à BM ; dès lors la figure AMBN serait un parallélogramme, dont les diagonales AB, MN devraient passer par le centre ; il faudrait donc que B coïncidât avec A', ce qui est impossible.

Du centre et des diamètres dans la parabole.

IX. *Le centre de la section parabolique passe à l'infini.* — Supposons qu'un plan, passant par le sommet S d'un cône dont la directrice est le cercle O (*fig.* 6), coupe d'abord le plan de la directrice circulaire suivant une droite XY qui ne rencontre pas cette courbe : un plan parallèle coupera le cône suivant une section elliptique dont le centre sera à l'intersection du plan sécant et de la droite unissant la somme S au pôle P de XY (Chap. I, n° II); si nous admettons actuellement que la droite XY se déplace d'une manière continue en se rapprochant du centre et jusqu'à devenir tangente au cercle directeur, son pôle P viendra se placer au point de contact, la droite SP viendra coïncider avec la géné-

Fig. 6.



ratrice de contact du cône et du plan tangent SXY, et, si le plan sécant reste constamment parallèle au plan SXY à l'instant précis où XY deviendra tangente au cercle O, SP deviendra parallèle au plan sécant, et l'intersection de cette droite avec le plan passera à l'infini dans la direction de SP; comme, au même instant, la section deviendra parabolique, on doit considérer le centre de cette section comme situé à l'infini.

X. *Tous les diamètres de la parabole sont rectilignes et parallèles.* — Considérons toujours la *fig.* 6, construisons la droite SP_1 parallèle aux cordes du milieu desquelles nous cherchons le lieu. La droite SP_1, parallèle au plan sécant, est située dans le plan SXY : construisons la polaire AP du point P_1, le point P_1 étant situé sur XY, la polaire AP passera par le pôle P de XY. Par la droite SP_1 faisons passer un plan variable :

dans toutes les positions il coupera le plan sécant suivant une parallèle à SP_1. Soient SMN une de ses positions, SM, SN les génératrices suivant lesquelles il coupe le cône et SH son intersection avec le plan SAP, les quatre droites SM, SN, SP, SH forment un faisceau harmonique; la droite mn, intersection de ce plan SMN et du plan sécant, et dont les extrémités m, n appartiennent à la section, est divisée en deux parties égales par le point h où elle est rencontrée par le rayon SH conjugué de SP_1, puisqu'elle est parallèle à ce dernier rayon. Le point h dont nous cherchons le lieu est situé à la fois dans le plan sécant et dans le plan fixe SAP, le diamètre cherché est dans la droite ap, intersection du plan sécant et du plan SAP; ap est parallèle à SP comme intersection de deux plans parallèles par un troisième : donc dans la parabole tous les diamètres sont des droites parallèles.

XI. *Propriétés des diamètres de la parabole.* — Les diamètres de la parabole ne coupent cette courbe qu'en un point situé à distance finie; en effet, on peut obtenir tous les diamètres de la parabole en coupant son plan par un plan variable tournant autour de SP (*fig.* 6); or chacun de ces plans coupe le cône suivant la génératrice SP, parallèle au diamètre correspondant, et suivant une seconde génératrice non parallèle; le diamètre rencontrera la seconde seule de ces génératrices à distance finie, et la première à l'infini; il n'aura donc avec la parabole qu'un seul point commun à distance finie.

L'angle sous lequel un diamètre d'une parabole coupe les cordes correspondantes est égal à l'angle PSP_1 de la *fig.* 6; cet angle peut passer par tous les états de grandeur.

Il peut passer une seule fois par l'état égal à un angle droit si l'on prend SP_1 perpendiculaire à SP; il en résulte que la section parabolique admet un et un seul axe, et un seul sommet qu'on peut déterminer d'après ce qui précède.

On peut encore, d'après ce qui précède, construire les diamètres de la parabole coupant les cordes correspondantes sous un angle donné; le problème est toujours possible et le nombre des solutions est deux. Dans le cas particulier de l'angle nul, SP_1 vient se réunir avec SP; il en est de même de SA : le plan SPA devient tangent suivant SP, se confond avec SXY, et le diamètre correspondant passe à l'infini, car le plan SXY est parallèle au plan de la courbe. (*A suivre.*)

DÉMONSTRATION ET APPLICATIONS D'UN THÉORÈME DE LIOUVILLE SUR L'ÉLIMINATION;

PAR M. G. FOURET,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

---

1. Liouville, dans un beau Mémoire bien connu sur l'élimination ([1]), a obtenu, entre autres résultats d'une analyse un peu complexe, un théorème d'un grand intérêt, en raison des nombreuses applications auxquelles il se prête. Je me propose de donner de ce théorème une démonstration fort simple, qui le rend en quelque sorte

---

([1]) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1re série, t. VI, p. 359.

intuitif, et d'en déduire ensuite quelques conséquences géométriques.

Occupons-nous d'abord du cas de deux équations à deux variables : le théorème de Liouville peut alors s'énoncer de la manière suivante :

Théorème fondamental. — *Dans l'équation de degré mn résultant de l'élimination d'une variable entre deux équations algébriques à deux variables, dont les degrés sont respectivement m et n, le coefficient du terme de degré mn — i dépend exclusivement des coefficients des termes des deux équations données, qui sont d'un degré égal ou supérieur à m — i pour la première, à n — i pour la seconde.*

Les coefficients des termes de degrés respectivement égaux à m — i et à n — i, dans les équations données, ne peuvent figurer que linéairement et multipliés par des facteurs indépendants des autres coefficients, dans la composition du coefficient du terme de degré mn — i de l'équation résultante.

2. Soient

$$(1)\quad \begin{cases} u_m + z u_{m-1} + z^2 u_{m-2} + \ldots + z^i u_{m-i} + \ldots + z^m u_0 = 0, \\ v_n + z v_{n-1} + z^2 v_{n-2} + \ldots + z^i v_{n-i} + \ldots + z^n v_0 = 0 \end{cases}$$

deux équations algébriques, à deux variables x et y, rendues homogènes par l'introduction d'une troisième variable z, et ayant des degrés respectivement égaux à m et à n. Dans ces équations, les u et les v désignent des polynômes homogènes en x et y, d'un degré marqué par leur indice.

L'équation

$$(2)\quad \begin{cases} a_0 x^{mn} + a_1 z x^{mn-1} + a_2 z^2 x^{mn-2} + \ldots \\ \qquad + a_i z^i x^{mn-i} + \ldots + a_{mn} z^{mn} = 0, \end{cases}$$

résultant de l'élimination de y entre les équations (1), s'obtient, comme on le sait, en égalant à zéro un certain déterminant, dont les éléments sont les polynômes en x et z, qui multiplient les diverses puissances de y dans ces équations. Les seules opérations à effectuer sur ces polynômes, pour en déduire le premier membre de l'équation (2), consistent par suite en multiplications et additions. Il ne saurait donc entrer dans la formation du coefficient a_i de $z^i x^{mn-i}$, aucun des coefficients des équations (1), qui contiennent z à un degré supérieur à i. Autrement dit, le coefficient a_i ne peut dépendre que des coefficients des termes des équations (1), qui sont d'un degré en z égal ou inférieur à i, c'est-à-dire d'un degré en x et y égal ou supérieur à $m - i$ pour la première équation, à $n - i$ pour la seconde.

Pour la même raison, le coefficient a_i est forcément linéaire par rapport à l'ensemble des coefficients de u_{m-i} et de v_{n-i}.

3. Les relations bien connues, qui lient les fonctions symétriques entières des racines d'une équation aux coefficients de cette équation, permettent de conclure immédiatement du théorème qui vient d'être démontré la conséquence suivante :

La somme des produits i à i des mn racines de l'équation résultante ne dépend que des termes des équations données, dont le degré est au moins égal à m — i pour la première et à n — i pour la seconde. Il en est de même de la somme des $i^{\text{èmes}}$ puissances, et, plus généralement, de toute fonction symétrique entière de degré i de ces racines.

Il est essentiel, pour appliquer judicieusement et sans erreur le théorème de Liouville, de s'assurer que l'équation résultante est bien d'un degré égal au produit des degrés des équations entre lesquelles doit se faire l'élimination.

4. Comme première application du théorème fondamental de Liouville, nous allons en déduire immédiatement, et sans calcul, le théorème suivant, dû à Chasles [1] :

Le centre de moyenne distance des points de contact des tangentes menées à une courbe plane algébrique, parallèlement à une même direction, est un point fixe, indépendant de cette direction.

En effet, soit

$$(3) \qquad f(x, y) = 0$$

l'équation de la courbe, supposée du $m^{\text{ième}}$ degré. Les points de contact des tangentes menées à cette courbe parallèlement à une direction de coefficient angulaire α, ont pour coordonnées les systèmes de valeurs de x et y qui vérifient à la fois l'équation (3) et l'équation

$$(4) \qquad f'_x + \alpha f'_y = 0,$$

de degré $m - 1$.

---

[1] C'est, comme on le sait, en transformant géométriquement le théorème de Newton sur les diamètres des courbes ou des surfaces, que Chasles a trouvé ce théorème et son analogue dans l'espace (*Aperçu historique*, p. 624). Il l'a démontré plus tard analytiquement, comme application d'un système particulier de coordonnées tangentielles (*Géométrie supérieure*, 1re édition, p. 358-360). M. d'Ocagne a communiqué récemment à la Société mathématique de France deux démonstrations du même théorème fondées sur l'emploi des coordonnées parallèles et axiales. M. Weill en a également publié une démonstration analytique (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. VI, p. 82). La démonstration de Liouville, après la notable simplification que nous lui faisons subir ici, nous paraît être la plus simple et la plus directe.

Soit

$$a_0 x^{m(m-1)} + a_1 x^{m(m-1)-1} + \ldots = 0$$

l'équation de degré $m(m-1)$ résultant de l'élimination de y entre les équations (3) et (4). L'abscisse x du centre de moyenne distance des points communs aux courbes (3) et (4) est égale à $-\frac{a_1}{m(m-1)a_0}\cdot$ Or les coefficients a_0 et a_1, d'après le théorème fondamental (n° 1), ne dépendent que des coefficients des termes de degrés m et $m-1$ de l'équation (3), ceux-ci entrant exclusivement dans la composition des termes de degrés $m-1$ et $m-2$ de l'équation (4). Par suite, le centre de moyenne distance des points communs aux courbes (3) et (4) ne change pas, lorsqu'on remplace la courbe (3) par une autre ayant les mêmes asymptotes, et notamment par l'ensemble de ces asymptotes. Mais les $m(m-1)$ points de contact des tangentes parallèles à une direction déterminée se confondent alors, par couples, avec les $\frac{m(m-1)}{2}$ points d'intersections mutuelles de ces m asymptotes. Le point fixe, centre de moyenne distance de ces derniers points, coïncide, en conséquence, avec le centre de moyenne distance des points de contact des tangentes menées à la courbe (3) parallèlement à une même direction, quelle que soit cette direction, et le théorème de Chasles se trouve démontré.

On voit, par la démonstration même, que ce théorème s'applique à une courbe possédant des points multiples, quelle qu'en soit la nature, et abstraction faite de ces points considérés comme points de contact multiples de tangentes parallèles à une même direction.

Il est également clair que le théorème n'a plus lieu, lorsque la courbe a une ou plusieurs branches paraboliques.

On peut remarquer en outre que, *dans le cas où les asymptotes de la courbe passent par un même point, ce point est précisément le centre de moyenne distance des points de contact des tangentes parallèles à une même direction.*

5. Imaginons que l'on fasse varier, dans les équations (1), les termes qui renferment z à un degré supérieur au premier, les autres ne changeant pas. Chacune des courbes définies par les équations (1), par rapport à un système d'axes de coordonnées quelconque, varie alors en conservant les mêmes asymptotes. D'ailleurs la somme des x et la somme des y des points communs aux deux courbes ne dépendant que de u_m, u_{m-1}, v_n, v_{n-1}, d'après le théorème fondamental de Liouville (n° 1), on voit que le centre de moyenne distance des points d'intersection des deux courbes reste fixe. On peut donc énoncer le théorème suivant, également dû à Liouville (1) :

Le centre de moyenne distance des points communs à deux courbes algébriques reste fixe, lorsque chacune de ces courbes varie, sans changer d'asymptotes.

Ce centre de moyenne distance est en même temps celui des points d'intersection des asymptotes de l'une des courbes avec les asymptotes de l'autre.

En particulier, *quand les asymptotes de deux courbes géométriques passent toutes par un même point, ce point est le centre de moyenne distance des points de rencontre des deux courbes.*

---

(1) *Loc. cit.*, p. 271. — M. Humbert a donné deux autres démonstrations de ce même théorème (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. III, p. 361, et *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. VI, p. 535).

6. Soit

$$(5) \qquad f(x, y) = 0$$

l'équation d'une courbe algébrique, de degré quelconque m, rapportée à un système d'axes de coordonnées rectangulaires. Les points d'incidence des normales menées à cette courbe par un point dont les coordonnées sont $x = a$, $y = b$, se trouvent à l'intersection de celle-ci avec la courbe de degré m,

$$(6) \qquad (x - a) f'_y - (y - b) f'_x = 0.$$

Supposons que la courbe (5) n'ait pas de branche parabolique et ne passe pas par les *ombilics* ou *points cycliques*, et imaginons que l'on fasse varier cette courbe, en lui conservant ses asymptotes. Les termes de degrés m et $m - 1$ de l'équation (5) ne subissant, dans cette hypothèse, aucune altération, on voit immédiatement qu'il en est de même des termes de degrés m et $m - 1$ de l'équation (6). La courbe (6) varie par suite en conservant ses asymptotes, et l'on en conclut, d'après un théorème précédent (n° 5) que *le centre de moyenne distance des points d'incidence des normales menées d'un même point à une courbe algébrique n'ayant pas de branche parabolique, reste fixe, lorsque la courbe varie en conservant ses asymptotes* (1).

On peut ajouter que *ce centre de moyenne distance est le centre de moyenne distance des pieds des perpendiculaires abaissées du point fixe sur les asymptotes de la courbe et des points d'intersection, considérés*

(1) Les considérations développées plus loin (n° 8) montrent comment ce théorème s'étend aux courbes passant par les points cycliques.

comme doubles, de ces asymptotes prises deux à deux.

Il suffit, pour établir cette dernière partie du théorème, de supposer que la courbe du $m^{\text{ième}}$ degré se réduise à ses asymptotes, et de remarquer qu'alors les pieds des normales, issues d'un même point fixe, viennent coïncider par couples avec les $\frac{m(m-1)}{2}$ points d'intersection des asymptotes prises deux à deux.

Le théorème cesse d'être vrai, lorsque la courbe a une ou plusieurs branches paraboliques : les courbes (5) et (6) ayant alors un ou plusieurs de leurs points communs à l'infini, le centre de moyenne distance de ces points est lui-même à l'infini.

7. En général, le centre de moyenne distance des points d'incidence des normales à une courbe algébrique, issues d'un même point, varie avec la position de ce point; mais il existe une classe remarquable de courbes pour lesquelles ce centre de moyenne distance est fixe, quel que soit le point d'où sont menées les normales. Ce sont les courbes de degré pair dont toutes les directions sont des directions *isotropes,* et que, pour cette raison, M. d'Ocagne a proposé d'appeler *isotropiques* (1).

8. Considérons une courbe algébrique C, de degré m, pour laquelle les directions isotropes soient des directions asymptotiques multiples. Soit r le degré de multiplicité de chacune d'elles. Les normales menées d'un point O quelconque à cette courbe s'obtiennent en joignant le point O aux points d'intersection de la courbe C avec une seconde courbe égale, résultant d'une rotation

---

(1) *Journal de Mathématiques spéciales*, 3e série, t. I, p. 125.

infiniment petite de la première autour du point O. Les points d'intersection des deux courbes, et, par suite, les normales menées de O à C sont au nombre total de m^2. Mais chacune des courbes ayant r branches passant par chacun des points cycliques, il y a r^2 points d'intersection qui coïncident avec chacun de ces points cycliques, et le nombre des normales menées de O à C se trouve réduit à $m^2 - 2r^2$. D'autre part, l'ensemble des asymptotes de la courbe C, admettant également les points cycliques comme points multiples d'ordre r de multiplicité, le nombre des normales menées de O à cette courbe dégénérescente est pareillement réduit à $m^2 - 2r^2$: ces normales comprennent les $m - 2r$ perpendiculaires abaissées de O sur les asymptotes non isotropes, et deux fois les $\frac{m(m-1)}{2} - r(r-1)$ droites qui joignent le point O aux points, autres que les points cycliques, en lesquels se coupent deux à deux les m asymptotes. Les deux groupes, composés chacun de $m^2 - 2r^2$ points à distance finie, que l'on obtient ainsi, ont le même centre de moyenne distance en vertu d'un théorème démontré plus haut (n° 6).

9. Appliquons la conclusion précédente à une courbe isotropique de degré $2n$. Le nombre des normales menées d'un point quelconque O à une pareille courbe est $2n^2$. L'ensemble des $2n$ asymptotes isotropes de cette courbe peut être considéré comme une variété dégénérescente d'une courbe isotropique, et les $2n^2$ normales qu'on peut lui mener du point O se composent de deux fois les n^2 droites qui joignent ce point aux points d'intersection des asymptotes parallèles à l'une des directions isotropes avec les asymptotes parallèles à l'autre direction isotrope (n° 8). Le centre de moyenne distance

de ce dernier groupe de points étant indépendant du point O, on peut énoncer le théorème suivant ([1]) :

Le centre de moyenne distance des points d'incidence des normales menées d'un même point à une courbe isotropique est fixe, quelle que soit la position de ce point.

Ce point peut même s'éloigner à l'infini dans une direction quelconque. On en conclut que, *dans le cas d'une courbe isotropique, le centre de moyenne distance des pieds des normales issues d'un même point coïncide avec celui des points de contact des tangentes parallèles à une même direction.*

On peut ajouter que *ce centre de moyenne distance coïncide avec celui des foyers singuliers réels de la courbe.*

Pour établir cette dernière partie du théorème, il suffit de se rappeler que, suivant une dénomination introduite par Laguerre, les foyers singuliers sont les points réels où les asymptotes parallèles à l'une des directions isotropes coupent respectivement leurs conjuguées, et de remarquer que le centre de moyenne distance de ces n foyers réels coïncide manifestement avec le centre de moyenne distance des n^2 points, tant imaginaires que réels, où les n asymptotes parallèles à une des directions isotropes rencontrent les n asymptotes parallèles à l'autre direction isotrope.

10. Avant d'aller plus loin, nous allons rappeler la solution d'un problème bien simple et bien connu, sur

---

([1]) Ce théorème et le théorème analogue pour les surfaces isotropiques ont été communiqués à la Société mathématique, dans sa séance du 2 novembre 1887, par M. Humbert, qui est arrivé à ces résultats par une voie différente.

laquelle nous aurons à nous appuyer. Soient MN_1, MN_2, ..., MN_n des normales menées d'un même point M à n courbes ou segments de courbes C_1, C_2, ..., C_n. Supposons que le point M se meuve de façon que l'on ait

$$\overline{MN_1}^2 + \overline{MN_2}^2 + \ldots + \overline{MN_n}^2 = k^2$$

ou, pour abréger,

$$\Sigma \overline{MN}^2 = k^2, \tag{7}$$

k désignant une constante.

En différentiant la relation précédente, on obtient

$$\Sigma \overline{MN}\, d\overline{MN} = 0. \tag{8}$$

Considérons le point M comme soumis à n forces représentées, en grandeur, direction et sens, par MN_1, MN_2, ..., MN_n.

La relation (8) exprime que la somme des travaux élémentaires de ces forces est nulle, lorsque le point M se déplace sur la courbe définie par la relation (7). Il en est par suite de même du travail élémentaire de la résultante de ces forces, et l'on en conclut que cette résultante est dirigée suivant la normale en M à la courbe considérée [1]. D'autre part, d'après un théorème bien connu, la résultante des forces MN_1, MN_2, ..., MN_n passe par le centre de moyenne distance O des n points N_1, N_2, ..., N_n, et est représentée par n fois la distance MO. On aura donc la normale à la courbe définie par la relation (7), en joignant le point M de cette courbe au centre de moyenne distance des pieds des normales

[1] Cette courbe est une ligne de niveau pour le système de forces que nous considérons, et la fonction des forces correspondante est $\Sigma \overline{MN}^2$.

menées de ce point aux courbes ou portions de courbes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ (¹).

11. Considérons, dans un plan, une courbe C, du $m^{\text{ième}}$ degré, soumise à la seule restriction de n'avoir pas de branches paraboliques, et proposons-nous de trouver le lieu L d'un point M, tel que la somme $\Sigma\overline{\mathrm{MN}}^2$ des carrés des normales qu'on peut lui mener de ce point soit constante. Par chaque point du plan passe un pareil lieu et un seul; de plus, la normale à ce lieu s'obtient par la construction exposée au numéro précédent, c'est-à-dire en joignant le point M au centre de moyenne distance des pieds des normales menées de ce point à la courbe C.

Considérons, d'autre part, le lieu A d'un point tel que la somme des carrés $\Sigma\overline{\mathrm{MP}}^2$ des distances de ce point aux asymptotes de C, augmentée du double de la somme $\Sigma\overline{\mathrm{MQ}}^2$ des carrés des distances du même point aux points d'intersection de ces asymptotes prises deux à deux, soit constante. Par chaque point du plan passe un tel lieu A et un seul. D'un théorème démontré plus haut (nº 6) et de la construction qui vient d'être rappelée (nº 10), il résulte d'ailleurs que les normales et par suite les tangentes, en un même point du plan, aux courbes L et A qui y passent, coïncident. Les deux systèmes de courbes L et A ont, en conséquence, la même équation différentielle, c'est-à-dire ne forment qu'un seul et même système.

12. Cela posé, soient, par rapport à un système d'axes de coordonnées rectangulaires,

$$x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1 - p = 0$$

(¹) Cette solution, comme on le sait, est due à Leibnitz.

l'équation d'une quelconque des asymptotes de la courbe C, et α, β les coordonnées du point d'intersection de deux de ces asymptotes : l'équation du lieu Λ peut s'écrire

$$(9)\quad \Sigma(x\cos\varphi + y\sin\varphi - p)^2 + 2\Sigma[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2] = k^2,$$

k désignant une constante. On reconnaît là l'équation d'une conique, ou plutôt d'une série de coniques concentriques et homothétiques, correspondant aux diverses valeurs de k. Ainsi se trouve démontré un élégant théorème auquel M. Humbert est parvenu par des considérations différant peu des précédentes, et que l'on peut énoncer ainsi (¹) :

Étant donnée une courbe plane algébrique, de degré quelconque, ne possédant aucune branche parabolique, le lieu d'un point du plan de cette courbe, satisfaisant à la condition que la somme des carrés des longueurs des normales menées de ce point à la courbe soit constante est une conique. Les diverses coniques que l'on obtient ainsi, pour une même courbe, sont concentriques et homothétiques.

Pour certaines courbes, ces coniques se réduiront chacune à un couple de droites parallèles équidistantes d'une même droite fixe.

On voit immédiatement, d'après la forme de l'équation (9), que ces coniques seront toujours des ellipses, lorsque les asymptotes de la courbe C seront toutes réelles.

(¹) Ce théorème et le théorème analogue pour les surfaces ont fait l'objet d'une Communication verbale de M. Humbert à la Société mathématique, dans la séance du 16 novembre 1887. M. Laisant, dans la séance du 4 décembre 1889 de cette Société, a donné une démonstration élégante et ingénieuse de ces mêmes propositions.

Il est clair que dans les cas où la courbe C aura soit un centre, soit un axe de symétrie, les coniques dont il vient d'être question admettront elles-mêmes ce centre ou cet axe de symétrie. En dehors de ces circonstances particulières, il est remarquable de trouver, dans le plan d'une courbe algébrique quelconque, un système de deux axes rectangulaires dont la position se trouve liée à la courbe par la propriété si simple remarquée par M. Humbert.

13. M. Desboves avait obtenu, il y a quelques années [1], le théorème précédent dans un cas très particulier, celui où la courbe C est une ellipse.

Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

l'équation d'une ellipse rapportée à ses axes.

Le lieu d'un point tel que la somme des carrés des longueurs des normales menées de ce point à la courbe soit égale à une constante k^2, a pour équation

$$\frac{a^2 - 2b^2}{c^2} x^2 + \frac{2a^2 - b^2}{c^2} y^2 = \frac{k^2}{2} - a^2 - b^2.$$

Ce lieu est une ellipse, un système de droites parallèles à l'axe des x, et équidistantes de cet axe, ou une hyperbole, suivant que a est supérieur, égal ou inférieur à $b\sqrt{2}$. On vérifie, en outre, sur la dernière équation, que le lieu reste homothétique à lui-même, lorsque k^2 varie.

Le changement de b^2 en $-b^2$ montre bien que, dans le cas de l'hyperbole, le lieu est toujours une ellipse.

---

(1) *Théorèmes et problèmes sur les normales aux coniques*, p. 16.

Enfin, lorsque l'hyperbole est équilatère, le lieu est un cercle. Cette remarque sera généralisée plus loin.

La même question a été résolue et étendue au cas de la parabole par M. Recoq (¹). L'équation de la parabole rapportée à son axe et à sa tangente au sommet, étant

$$y^2 = 2px,$$

on trouve pour équation du lieu

$$x^2 + 3y^2 + 4px = 2p^2 + k^2.$$

On obtient donc, dans ce cas, une série d'ellipses homothétiques et concentriques, ayant pour centre commun le point de l'axe de la parabole situé à la distance $2p$ du sommet de cette courbe, du côté de la directrice.

Le théorème de M. Humbert, dont nous venons de nous occuper (n° 12), s'étend, du reste, ainsi que l'auteur l'a reconnu, non seulement à la parabole du second degré, mais à toutes les courbes possédant une ou plusieurs branches paraboliques. Nous avons dû laisser de côté ici ce cas spécial.

14. Imaginons, dans le plan d'une courbe algébrique C, supposée du $m^{\text{ième}}$ degré et dénuée de branches paraboliques, un point mobile, constamment sollicité par des forces représentées géométriquement par les normales MN. Un pareil système de forces admet, comme nous en avons déjà fait la remarque, une fonction qui n'est autre que la somme $\Sigma\overline{MN}^2$ des carrés des longueurs des normales menées du point mobile à la courbe, et, d'après le théorème de M. Humbert (n° 12), les lignes de niveau correspondantes sont des coniques concentriques

---

(¹) *Nouvelles Annales*, 2ᵉ série, t. IV, p. 112.

et homothétiques. Nous les appellerons *coniques de niveau* de la courbe C.

Cela posé, on sait, d'une manière générale, que si le point mobile subit un déplacement infiniment petit quelconque, l'accroissement correspondant de la fonction des forces est égal au produit de la résultante des forces par le segment compris, sur la ligne d'action de cette résultante, entre les deux courbes de niveau qui passent respectivement par les positions initiale et finale du point mobile. Or cette résultante n'est pas modifiée, si l'on remplace le système, défini plus haut (n° 10), des forces telles que MN, par un autre système, comprenant un premier groupe de forces représentées par les perpendiculaires MP menées du point mobile aux asymptotes de C, et un second groupe de forces dirigées vers les points Q d'intersection de ces asymptotes prises deux à deux, et représentées géométriquement par les doubles des longueurs MQ. D'ailleurs, comme on l'a vu (n° 11), les lignes de niveau sont les mêmes pour les deux systèmes de forces; par suite, pour tout déplacement infiniment petit du point mobile, les sommes $\Sigma\overline{MN}^2$ et $\Sigma\overline{MP}^2 + 2\Sigma\overline{MQ}^2$ subissent le même accroissement. On en conclut, par une intégration immédiate, que $\Sigma\overline{MN}^2$ ne diffère de $\Sigma\overline{MP}^2 + 2\Sigma\overline{MQ}^2$ que par une constante. Ce résultat peut s'énoncer ainsi :

Étant donnée une courbe plane algébrique, ne possédant aucune branche parabolique, il y a une différence constante entre la somme des carrés des longueurs des normales menées d'un point quelconque à cette courbe et la somme des carrés des distances du même point à ses asymptotes, augmentée de deux fois la somme des carrés des distances de ce point aux *points d'intersection des asymptotes prises deux à deux* (¹).

Le centre commun des coniques définies par l'équation (9) est évidemment le point pour lequel la somme $\Sigma\overline{MP}^2 + 2\Sigma\overline{MQ}^2$ est la plus petite possible. De cette remarque et du dernier théorème énoncé il résulte que *le centre commun des coniques de niveau d'une courbe plane algébrique est un point tel que la somme des carrés des longueurs des normales menées de ce point à la courbe soit la plus petite possible.*

Par suite, en vertu d'un théorème de Statique bien connu, *le centre commun des coniques de niveau est le centre de moyenne distance des pieds de normales menées de ce point à la courbe algébrique.*

15. Il existe deux classes particulières de courbes algébriques dont les coniques de niveau sont des cercles. L'une de ces classes se compose des courbes *isotropiques;* l'autre comprend les courbes dont toutes les asymptotes sont réelles, distinctes, et forment un polygone équiangle.

Pour la première de ces deux classes de courbes, la particularité signalée résulte de ce que la normale à la ligne de niveau, en l'un quelconque de ses points, passe par le centre de moyenne distance des pieds des normales menées de ce point à la courbe isotropique (nº 10) et de ce que ce centre de moyenne distance est fixe (nº 9). De là ce théorème :

Étant donnée dans un plan une courbe isotropique,

(¹) Cette différence constante est égale à $2(a^2 \pm b^2)$, lorsque la courbe est une ellipse ou une hyperbole, dont les axes ont pour longueurs respectives $2a$ et $2b$.

le lieu d'un point du plan, tel que la somme des carrés des normales menées de ce point à la courbe soit constante, est un cercle ayant pour centre le centre de moyenne distance des foyers singuliers de la courbe isotropique.

Des considérations exposées dans le numéro précédent (n° 14), on conclut en outre immédiatement les conséquences suivantes :

La somme des carrés des normales menées d'un point quelconque à une courbe isotropique de degré $2n$ diffère d'une quantité constante de $2n$ fois la somme des carrés des distances du même point aux n foyers singuliers de la courbe.

Le centre de moyenne distance des foyers singuliers d'une courbe isotropique est tel que la somme des carrés des normales menées de ce point à la courbe est un minimum.

16. Considérons maintenant une courbe plane algébrique C, dont toutes les asymptotes soient réelles, distinctes et forment un polygone équiangle. Dans l'équation (9), le coefficient de xy est égal à $2\Sigma\sin\varphi\cos\varphi$, c'est-à-dire à $\Sigma\sin 2\varphi$; les coefficients de x^2 et de y^2 sont respectivement égaux à $m(m-1)+\Sigma\cos^2\varphi$ ou $m(m-1)+\frac{1}{2}\Sigma(1+\cos 2\varphi)$ et à $m(m-1)+\Sigma\sin^2\varphi$ ou $m(m-1)+\frac{1}{2}\Sigma(1-\cos 2\varphi)$. Or les angles 2φ, d'après les hypothèses faites sur les asymptotes de la courbe C, forment une progression arithmétique dont la raison est $\frac{4\pi}{m}$. Il en résulte, comme on le sait, que $\Sigma\sin 2\varphi$ et $\Sigma\cos 2\varphi$ sont nuls. Par suite, le terme en xy disparaît de l'équation (9), et les coefficients de x^2 et y^2 sont tous deux égaux à $\frac{m(2m-1)}{2}$. Le lieu défini par l'équa-

tion (9) est donc bien un cercle. De là le théorème suivant :

Étant donnée une courbe plane algébrique, dont toutes les asymptotes sont réelles, distinctes, et forment un polygone équiangle, le lieu d'un point tel que la somme des carrés des normales menées de ce point à la courbe soit égale à une constante, est un cercle dont le centre est fixe, quelle que soit la valeur de la constante.

Dans le cas où le polygone formé par les asymptotes est régulier, le centre commun des cercles est le centre du polygone régulier. Cela résulte de ce que le lieu d'un point tel que la somme des carrés des distances de ce point aux côtés d'un polygone régulier soit constante est un cercle ayant pour centre le centre de ce polygone. Il est clair que le cas particulier où les asymptotes de la courbe C formerait une rose des vents est compris dans le précédent.

17. Passons maintenant à une autre application du théorème de Liouville. Soit

$$u_m + z u_{m-1} + z^2 u_{m-2} + \ldots + z^m u_0 = 0 \tag{10}$$

l'équation, rendue homogène, d'une courbe algébrique fixe, coupée par un faisceau ponctuel de courbes ayant toutes les mêmes directions asymptotiques, dont l'équation est, par suite, de la forme

$$\begin{aligned}(1+\lambda)v_n + z(v_{n-1} + \lambda w_{n-1})& \\ + z^2(v_{n-2} + \lambda w_{n-2}) + \ldots + z^n(v_0 + \lambda w_0) &= 0,\end{aligned}$$

ou bien

$$\left\{\begin{aligned} & v_n + z\,\frac{v_{n-1} + \lambda w_{n-1}}{1+\lambda} \\ & \qquad + z^2\,\frac{v_{n-2} + \lambda w_{n-2}}{1+\lambda} + \ldots + z^n\,\frac{v_0 + \lambda w_0}{1+\lambda} = 0.\end{aligned}\right. \tag{11}$$

Les lettres u, v, w désignent ici des polygones homogènes en x et y d'un degré marqué par leur indice; λ est un paramètre variable.

D'après le théorème de Liouville (n° 1), la somme des x et la somme des y des points d'intersection d'une quelconque des courbes du faisceau (11) avec la courbe fixe (10) dépendent exclusivement des coefficients des termes de l'équation (11) compris dans v_n et $\frac{v_{n-1}+\lambda w_{n-1}}{1+\lambda}$; de plus, les coefficients de ce dernier groupe de termes y figurent linéairement. Les coordonnées ξ et η du centre de moyenne distance des points communs à la courbe (10) et à l'une quelconque des courbes (11) ont par suite des expressions de la forme

$$\xi = \frac{a\lambda + b}{\lambda + 1}, \qquad \eta = \frac{c\lambda + d}{\lambda + 1}, \tag{12}$$

a, b, c, d désignant des constantes.

On en conclut que le lieu de ce centre de moyenne distance est une droite. De là le théorème suivant, que M. Humbert a établi antérieurement par des considérations différentes (¹) :

Le lieu du centre de moyenne distance des points communs à une courbe plane algébrique fixe et à l'une quelconque des courbes d'un faisceau ponctuel, ayant toutes les mêmes directions asymptotiques, est une ligne droite (²).

Il est intéressant de remarquer que, dans le cas particulier ($n = 1$) où le faisceau est formé de droites pa-

(¹) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4ᵉ série, t. III, p. 362.

(²) Dans certains cas spéciaux, ce centre de moyenne distance sera fixe; c'est ce qui aura lieu, par exemple, dans le cas d'un faisceau de courbes ayant toutes les mêmes asymptotes.

rallèles à une direction fixe, on retrouve un théorème bien connu dû à Newton (diamètre de Newton).

De la forme des relations (12) on conclut encore immédiatement qu'*il y a correspondance anharmonique entre les courbes du faisceau et les centres de moyenne distance de leurs points d'intersection avec la courbe fixe.*

On peut généraliser le théorème précédent à l'aide de l'homographie. On obtient alors une propriété, facile à énoncer, du centre harmonique, par rapport à une même droite, des points communs à une courbe fixe et aux courbes d'un faisceau ponctuel coupant toutes cette droite aux mêmes points.

18. Soit, par rapport à un système d'axes de coordonnées rectangulaires,

$$(13) \qquad f(x, y) = 0$$

l'équation d'une courbe algébrique quelconque C. Les points d'incidence des normales menées à cette courbe par un point dont les coordonnées sont $x = \alpha\lambda$, $y = \beta\lambda$, se trouvent à la rencontre de celle-ci avec la courbe

$$(14) \qquad (x - \alpha\lambda) f'_y - (y - \beta\lambda) f'_x = 0.$$

Or, lorsque λ varie, c'est-à-dire lorsque le point $(\alpha\lambda, \beta\lambda)$ décrit une droite (¹), l'équation (14) définit un faisceau de courbes ayant toutes les mêmes directions asymptotiques. Donc, en vertu d'un théorème démontré précédemment (nº 17), *le centre de moyenne distance des points d'incidence des normales, menées d'un point mobile à une courbe algébrique plane quelconque,*

(¹) Il est clair que l'on ne restreint pas la généralité de la démonstration, en supposant que la droite passe par l'origine.

décrit une droite, lorsque le point mobile décrit lui-même une droite (¹).

Il y a correspondance anharmonique entre le point mobile et le centre de moyenne distance qui en résulte.

On peut donner à ce théorème une forme plus concise et plus élégante, en l'énonçant de la manière suivante :

Étant donnée, dans un plan, une courbe algébrique, un point variable et le centre de moyenne distance des pieds des normales, menées de ce point à la courbe, décrivent deux figures homographiques.

19. On a vu précédemment (nº 14) qu'il existe dans le plan de la courbe C un point possédant la propriété d'être le centre de moyenne distance des pieds des normales qui en sont issues. Ce point, centre commun des coniques de niveau, est donc un des trois points en chacun desquels se trouvent réunis deux points homologues des deux figures homographiques. Les deux autres sont à l'infini : on voit, en effet, immédiatement qu'à tout point à l'infini de l'une des figures correspond un point à l'infini dans l'autre. La droite de l'infini, considérée comme appartenant à l'une quelconque des deux figures, coïncide donc avec son homologue. Il existe deux autres droites jouissant de la même propriété : ce sont évidemment les axes communs des coniques de niveau. D'une construction donnée plus haut (nº 10) il résulte, en effet, que le centre de moyenne distance des pieds des normales menées à la courbe C d'un point quelconque d'un de ces axes est situé sur cet axe. La relation qui unit les deux figures homographiques que nous venons de considérer est, comme on le voit, du genre de

(¹) HUMBERT, *loc. cit.*, p. 362.

celles auxquelles Euler a donné le nom d'*affinité*. On peut ajouter que cette affinité se changera en *homothétie*, lorsque la courbe C, sans être isotropique ([1]), sera de telle nature que ses coniques de niveau soient des cercles.

20. Le théorème d'Algèbre, que nous avons établi au commencement de cette Note, s'étend sans difficulté et, au moyen d'un raisonnement tout semblable à celui qui nous a déjà servi, au cas d'un nombre quelconque d'équations algébriques, contenant un nombre au moins égal de variables. On obtient ainsi le théorème suivant, sous une forme un peu plus générale que celle qui lui avait été donnée par Liouville :

Théorème fondamental généralisé. — *Dans l'équation de degré $mn\ldots r$, résultant de l'élimination de $k-1$ variables entre k équations algébriques, dont les degrés sont respectivement m, n, ..., r, les coefficients des termes de degré $mn\ldots r - i$ dépendent exclusivement des coefficients des termes des k équations données, qui sont d'un degré au moins égal à $m-i$ pour la première, à $n-i$ pour la seconde, ..., à $r-i$ pour la $k^{\text{ième}}$ de ces équations.*

Les coefficients des termes de degrés respectivement égaux à $m-i$, $n-i$, ..., $r-i$, dans les équations données, ne peuvent figurer que linéairement, et multipliés par des quantités indépendantes des autres coefficients, dans la composition des termes de degré $mn\ldots r - i$ de l'équation résultante.

21. Il est facile, en s'appuyant sur ce théorème,

([1]) Dans ce cas spécial, l'une des deux figures se réduit à un point (nº 9).

d'étendre aux surfaces quelques-unes des considérations que nous avons développées plus haut pour les courbes planes. C'est ainsi, par exemple, que l'on en conclut très aisément ce théorème de Chasles :

Le centre de moyenne distance des points de contact des plans tangents menés à une surface algébrique parallèlement à un même plan est un point fixe, quel que soit ce plan.

Soit

$$f(x, y, z) = 0 \tag{15}$$

l'équation de la surface, supposée du $m^{\text{ième}}$ degré. Les points de contact des plans tangents menés à cette surface parallèlement au plan

$$ax + by + cz = 0 \tag{16}$$

ont pour coordonnées les systèmes de valeurs de x, y, z qui vérifient à la fois l'équation (15) et deux des équations

$$\frac{f'_x}{a} = \frac{f'_y}{b} = \frac{f'_z}{c}, \tag{17}$$

qui sont de degré $m - 1$.

Imaginons que l'on élimine deux des variables, y et z, par exemple, entre les équations (15) et (17). Dans l'équation de degré $m(m-1)^2$ en x, que l'on obtiendra ainsi, les coefficients des termes de degrés $m(m-1)^2$ et $m(m-1)^2 - 1$ ne dépendront que des coefficients des termes de degrés m et $m - 1$ de l'équation (15) [n° 20], ceux-ci, comme il est aisé de le voir, fournissant exclusivement les termes de degrés $m - 1$ et $m - 2$ des équations (17). Par suite, le centre de moyenne distance des points de contact des plans tangents, menés à la surface (15) parallèlement au plan (16), ne change pas, lorsque l'on remplace cette surface par toute autre admettant la même développable asymptote, et en particulier par cette développable elle-même. Mais les points de contact des plans tangents deviennent alors les points considérés comme doubles, de l'arête de rebroussement, en lesquels la tangente est parallèle au plan (16). Or le centre de moyenne distance de ces points est indépendant de l'orientation du plan, en vertu du théorème suivant, que nous allons démontrer, sur les courbes gauches algébriques.

22. *Le centre de moyenne distance des points d'une courbe gauche algébrique, en chacun desquels la tangente est parallèle à un certain plan, est un point fixe, indépendant de l'orientation du plan.*

Ce théorème se déduit aisément du théorème analogue pour les courbes planes (n° 4). Soient C la courbe gauche, (P) et (P′) deux plans quelconques, non parallèles. Projetons la courbe C sur un plan (Q) arbitraire, parallèlement à la droite d'intersection des plans (P) et (P′). Soient Γ la projection obtenue de la courbe C, D et D′ les traces respectives des plans (P) et (P′) sur (Q). Les points m de la courbe C, où la tangente est parallèle au plan (P), se projettent en des points μ de Γ où la tangente est parallèle à D. De même, les points m' de C, où la tangente est parallèle au plan (P′), se projettent en des points μ' de Γ où la tangente est parallèle à D′. Le centre de moyenne distance des points μ étant le même que celui des points μ' (n° 4), on en conclut que les centres de moyenne distance respectifs des points m et des points m' ou bien coïncident, ou bien sont sur une même parallèle à la droite d'intersection des plans (P) et (P′). Or il est facile de voir que la seconde de ces conclusions ne peut être admise. Il en résulterait, en effet, que, lorsque le plan (P) varierait, en restant parallèle à une certaine direction, le centre de moyenne distance correspondant décrirait une droite parallèle à cette direction, et, par suite, qu'à l'ensemble des directions parallèles à un même plan correspondrait, comme lieu du centre de moyenne distance, un plan parallèle à ce dernier plan. Le lieu du centre de moyenne distance correspondant à toutes les orientations possibles du plan (P) se composerait donc d'une infinité de plans, ce qui est impossible, vu que, l'orientation du plan (P) ne dépendant que de deux paramètres, le centre de moyenne distance en question, à moins d'être fixe, devrait engendrer une surface ou, tout au moins, une ligne algébrique. Donc ce centre de moyenne distance est fixe.

23. Soient

$$(18)\quad \begin{cases} u_m + tu_{m-1} + t^2 u_{m-2} + \ldots + t^m u_0 = 0, \\ v_n + tv_{n-1} + t^2 v_{n-2} + \ldots + t^n v_0 = 0, \\ w_r + tw_{r-1} + t^2 w_{r-2} + \ldots + t^r w_0 = 0 \end{cases}$$

les équations, rendues homogènes à l'aide d'une quatrième variable t, de trois surfaces algébriques, les lettres u, v, w désignant des polynômes entiers homogènes, en x, y, z d'un degré marqué par leur indice.

Supposons que l'on fasse varier, dans les équations (18), les termes qui contiennent t à un degré supérieur au premier, les autres ne changeant pas. Chacune des surfaces définies par les équations (18), par rapport à un système d'axes de coordonnées quelconque, varie alors en conservant la même développable asymptote. D'ailleurs, les sommes des x, des y et des z des points communs aux trois surfaces ne dépendant que de u_m, u_{m-1}, v_n, v_{n-1}, w_r, w_{r-1} (n° 20), on voit que le centre de moyenne distance des points d'intersection des trois surfaces restera fixe. Ainsi se trouve établi le théorème suivant, dû à Liouville ([1]), et tout semblable à celui que l'illustre géomètre a donné pour les courbes planes (n° 5) :

Le centre de moyenne distance des points communs à trois surfaces algébriques reste fixe, lorsque chacune de ces surfaces varie, en conservant la même développable asymptote.

24. Soit

$$f(x, y, z) = 0 \tag{19}$$

l'équation d'une surface algébrique de degré quelconque m, rapportée à un système d'axes de coordonnées rectangulaires.

Les pieds des normales menées à cette surface par un point de coordonnées $x = a$, $y = b$, $z = c$, sont à l'intersection de celle-ci avec la courbe de degré m^2, définie par les équations

$$\frac{x - a}{f'_x} = \frac{y - b}{f'_y} = \frac{z - c}{f'_z}. \tag{20}$$

Supposons que la surface (9) ne possède aucune nappe parabolique ([2]), et déformons-la, en lui laissant la même développable asymptote. Les termes de degrés m et $m - 1$ de l'équation (19) ne subissent, dans cette hypothèse, aucun changement, et il en est manifestement de même des termes de degrés m et $m - 1$ des équations

---

([1]) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1re série, t. VI, p. 391.

([2]) Nous supposerons de plus que la surface ne contienne pas l'*ombilicale*, c'est-à-dire la conique à l'infini commune à toutes les sphères. Il y aurait une démonstration spéciale à faire, pour étendre le théorème aux surfaces présentant cette particularité.

(20), mises sous forme entière. La courbe (20) conserve par suite les mêmes asymptotes, et l'on en conclut, en vertu du théorème démontré plus haut (nº 23), que *le centre de moyenne distance des points d'incidence des normales menées d'un même point à une surface algébrique, ne possédant pas de nappe parabolique, reste fixe, lorsque la surface se déforme, tout en conservant la même développable asymptote.*

Ce théorème ne s'applique pas à une surface ayant une ou plusieurs nappes paraboliques, c'est-à-dire tangente, en un ou plusieurs points, au plan de l'infini, parce qu'alors la courbe (20) passe par ces points et que le centre de moyenne distance considéré est rejeté à l'infini.

25. Soient, en coordonnées homogènes,

$$(21)\qquad u_m + tu_{m-1} + t^2 u_{m-2} + \ldots + t^m u_0 = 0$$

l'équation d'une surface algébrique fixe,

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &(1+\lambda) v_n + t(v_{n-1} + \lambda w_{n-1}) \\ &\quad + t^2(v_{n-2} + \lambda w_{n-2}) + \ldots + t^n(v_0 + \lambda w_0) = 0, \\ &(1+\lambda) p_r + t(p_{r-1} + \lambda q_{r-1}) \\ &\quad + t^2(p_{r-2} + \lambda q_{r-2}) + \ldots + t^r(p_0 + \lambda q_0) = 0 \end{aligned}\right.$$

les équations de deux faisceaux de surfaces, dépendant d'un même paramètre variable λ, et telles que les surfaces de chacun des faisceaux aient les mêmes directions asymptotiques. Dans les équations précédentes, les lettres u, v, w, p et q désignent des polynômes entiers en x, y, z, d'un degré marqué par leur indice; t est une quatrième coordonnée introduite pour l'homogénéité.

Pour chaque valeur de λ, les équations (22) définissent une courbe, intersection complète de deux surfaces qui se correspondent anharmoniquement; et les diverses courbes qu'on obtient ainsi ont les mêmes directions asymptotiques.

D'après le théorème fondamental de Liouville (n° 20), la somme des x, la somme des y et la somme des z des points de rencontre d'une quelconque des courbes (22) avec la surface (21) ne dépendent que des coefficients des termes des équations (22) compris dans v_n, p_r, $\frac{v_{n-1} + \lambda w_{n-1}}{1+\lambda}$ et $\frac{p_{r-1} + q_{r-1}}{1+\lambda}$; on sait de plus que les coefficients de ces deux derniers groupes de termes n'entrent que linéairement dans l'évaluation de ces sommes. Par suite, les coordonnées ξ, η, ζ du centre de moyenne distance des points communs à la surface (21) et à l'une quelconque des courbes (22) ont des expressions de la forme

$$(23) \qquad \xi = \frac{a\lambda + b}{\lambda + 1}, \qquad \eta = \frac{c\lambda + d}{\lambda + 1}, \qquad \zeta = \frac{e\lambda + f}{\lambda + 1},$$

a, b, c, d, e, f désignant des constantes. On en conclut que le lieu de ce centre de moyenne distance est une droite. On peut donc énoncer le théorème suivant qui est, pour l'espace, l'analogue d'un théorème démontré plus haut (n° 17) pour le plan :

Etant donnés une surface algébrique fixe et deux faisceaux de surfaces algébriques, ayant respectivement les mêmes directions asymptotiques, le lieu du centre de moyenne distance des points communs à la surface fixe et à la courbe d'intersection de deux surfaces, se correspondant anharmoniquement dans les deux faisceaux, est une ligne droite (¹).

(¹) On voit immédiatement que, si les surfaces de chacun des deux faisceaux avaient la même développable asymptote, le centre de moyenne distance, dont il est ici question, serait un point fixe (n° 23).

De la forme des relations (23) on en conclut en outre qu'*il y a correspondance anharmonique entre les courbes et les centres de moyenne distance de leurs points d'intersection avec la surface fixe.*

26. Soit

$$f(x, y, z) = 0 \tag{24}$$

l'équation d'une surface algébrique quelconque, rapportée à un système d'axes de coordonnées rectangulaires. Les normales menées à cette surface par un point dont les coordonnées sont $x = \alpha\rho$, $y = \beta\rho$, $z = \gamma\rho$, ont leurs points d'incidence respectifs à la rencontre de celle-ci avec la courbe

$$\frac{x - \alpha\lambda}{f'_x} = \frac{y - \beta\lambda}{f'_y} = \frac{z - \gamma\lambda}{f'_z}, \tag{25}$$

qui peut être considérée comme l'intersection complète des deux surfaces

$$(x - \alpha\lambda)f'_y - (y - \beta\lambda)f'_x = 0,$$
$$(x - \alpha\lambda)f'_z - (z - \gamma\lambda)f'_x = 0.$$

Or, lorsque λ varie, c'est-à-dire lorsque le point $(\alpha\lambda, \beta\lambda, \gamma\lambda)$ décrit une droite, les deux dernières équations définissent deux faisceaux de surfaces, satisfaisant aux conditions du dernier théorème démontré (n° 25). Donc, en vertu de ce théorème, on peut dire que *le centre de moyenne distance des points d'incidence des normales, menées d'un point mobile à une surface algébrique quelconque, décrit une droite, lorsque le point mobile décrit lui-même une droite.*

Il y a correspondance anharmonique entre le point mobile et le centre de moyenne distance qui s'en déduit.

Plus simplement :

Étant donnée une surface algébrique, un point variable et le centre de moyenne distance des pieds des normales menées de ce point à la courbe décrivent deux figures homographiques.

L'homographie est d'ailleurs ici, comme dans le cas analogue relatif au plan (n° 19), de l'espèce particulière désignée sous le nom d'*affinité*.

27. Je ne pousserai pas plus loin ces développements : le but que j'avais en vue, dans la présente étude, était moins de faire connaître, quelque intéressants qu'ils soient, des résultats dont plusieurs ne m'appartiennent pas, que de montrer comment, dans un ordre de questions qui semble exiger l'intervention du calcul, il est possible, sans rien sacrifier de la rigueur, de remplacer les développements analytiques par de simples raisonnements synthétiques. Des considérations de même nature m'ont servi récemment dans une Note *Sur quelques propriétés involutives des courbes algébriques* [1].

---

[1] *Rendiconti del circolo matematico di Palermo* (t. III, p. 42 à 48). Le principal théorème de cette Note a été démontré et généralisé dernièrement (p. 125 de ce Volume), par M. Émile Borel, élève à l'École Normale supérieure, qui a employé avec succès des procédés de démonstration analogues à ceux dont j'avais déjà fait usage à cette occasion, et qui font l'objet principal du présent travail.

DEUX THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES TRAJECTOIRES DE POINTS ET LES ENVELOPPES DE DROITES DANS LE PLAN (¹);

Par M. M. d'OCAGNE,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

1. Si une droite issue du point M coupe la courbe C au point P sous l'angle θ, je dis que MP est une *distance sous l'angle* θ du point M à la courbe C.

Lorsque $\theta = 0$, la distance correspondante est dite *tangentielle;* lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$, elle est dite *normale.*

Soient $l_1, l_2, \ldots, l_n$ les distances sous l'angle θ du point M à une ou plusieurs courbes C. Si ces distances sont liées par la relation

$$\varphi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = 0,$$

le point M décrit une courbe (M) dont nous allons déterminer la normale.

Considérons une des distances $MP_i = l_i$. Soit Ω_i le centre de courbure répondant au point P_i. L'angle de la normale $P_i\Omega_i$ avec MP_i étant constant, on a le point H_i où MP_i touche son enveloppe en abaissant sur cette droite, du point Ω_i, la perpendiculaire $\Omega_i H_i$. Soit N_i le point où $\Omega_i H_i$ coupe la normale cherchée; on a, en appelant ds la différentielle de l'arc de la courbe (M), $d\alpha_i$ la différentielle de l'angle que fait MP_i avec un axe fixe

(¹) Les énoncés de ces théorèmes ont été communiqués à l'Académie des Sciences (voir *Comptes rendus*, séance du 23 décembre 1889).

quelconque du plan

$$dl_i = N_i \Omega_i \, d\alpha_i,$$
$$ds = MN_i \, d\alpha_i;$$

d'où

$$dl_i = \frac{N_i \Omega_i}{MN_i} \, ds.$$

Mais, si Ω'_i est le pied de la perpendiculaire abaissée de Ω_i sur la tangente en M à la courbe (M), on a

$$\frac{N_i \Omega_i}{MN_i} = \frac{M\Omega'_i}{MH_i};$$

par suite

$$dl_i = \frac{M\Omega'_i}{MH_i} \, ds.$$

Si donc, dans l'équation obtenue par différentiation de la relation donnée, on remplace $dl_1, dl_2, \ldots, dl_n$ par leurs valeurs tirées de la formule précédente, on obtient, après suppression du facteur commun ds,

$$\frac{M\Omega'_1}{MH_1} \frac{d\varphi}{dl_1} + \frac{M\Omega'_2}{MH_2} \frac{d\varphi}{dl_2} + \ldots + \frac{M\Omega'_n}{MH_n} \frac{d\varphi}{dl_n} = 0.$$

Cette équation exprime, en vertu du théorème des moments, que le centre de gravité des masses $\frac{1}{MH_1} \frac{d\varphi}{dl_1}$, $\frac{1}{MH_2} \frac{d\varphi}{dl_2}, \ldots, \frac{1}{MH_n} \frac{d\varphi}{dl_n}$, respectivement appliquées en $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$, se trouve sur la normale $MN_1N_2 \ldots N_n$.

De là ce théorème :

Théorème I. — *Si les distances sous l'angle* θ, $MP_1 = l_1$, $MP_2 = l_2, \ldots, MP_n = l_n$, *d'un point* M *à une ou plusieurs courbes* C, *sont liées par la relation*

$$\varphi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = 0$$

et si les centres de courbure $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ *répondant* *aux points* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *se projettent respectivement en* $H_1, H_2, \ldots, H_n$ *sur* $MP_1, MP_2, \ldots, MP_n$, *la normale à la trajectoire du point* M *passe par le centre de gravité des masses* $\frac{1}{MH_1}\frac{d\varphi}{dl_1}, \frac{1}{MH_2}\frac{d\varphi}{dl_2}, \ldots, \frac{1}{MH_n}\frac{d\varphi}{dl_n}$, *respectivement appliquées en* $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$.

2. Lorsque $\theta = 0$ (distances tangentielles), $H_1, H_2, \ldots, H_n$ coïncident respectivement avec $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Remarquons alors que

$$\frac{1}{l_i}\frac{d\varphi}{dl_i} = \frac{d\varphi}{d\left(\frac{l_i^2}{2}\right)};$$

on tombe sur le théorème obtenu récemment par M. J. Pomey dans les *Nouvelles Annales* (1889, p. 527) par une tout autre voie.

3. Lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$ (distances normales), $H_1, H_2, \ldots, H_n$ coïncident respectivement avec $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ qui se trouvent alors sur $MP_1, MP_2, \ldots, MP_n$. Or, d'après le théorème de Lagrange et Leibnitz, le centre de gravité des masses $\frac{1}{M\Omega_1}\frac{d\varphi}{dl_1}, \frac{1}{M\Omega_2}\frac{d\varphi}{dl_2}, \ldots, \frac{1}{M\Omega_n}\frac{d\varphi}{dl_n}$ appliquées en $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ se trouve sur la résultante des vecteurs $\frac{d\varphi}{dl_1}, \frac{d\varphi}{dl_2}, \ldots, \frac{d\varphi}{dl_n}$ issus de M et respectivement dirigés suivant $M\Omega_1, M\Omega_2, \ldots, M\Omega_n$, ou, ce qui revient au même, $MP_1, MP_2, \ldots, MP_n$. Cette résultante se confond donc avec la normale en M à la courbe (M) et l'on retrouve ainsi le classique théorème de Poinsot [1], généralisé pour le cas du plan.

---

[1] *Journal de l'École Polytechnique*, XIII[e] Cahier, p. 206-241.

4. De même, si la perpendiculaire élevée en A à la droite D coupe la courbe C au point P sous l'angle θ, je dis que AP est une distance sous l'angle θ de la droite D à la courbe C.

Cherchons à déterminer la normale à l'enveloppe d'une droite D dont les distances, sous l'angle θ, l_1, l_2, ..., l_n à diverses courbes C sont liées par la relation

$$\varphi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = 0.$$

Soient $A_i P_i = l_i$ une de ces distances, et Ω_i le centre de courbure répondant au point P_i; l'angle de $A_i P_i$ avec la normale $P_i \Omega_i$ étant constant, le point H_i où $A_i P_i$ touche son enveloppe est le pied de la perpendiculaire abaissée sur cette droite, du centre de courbure Ω_i.

Soit M le point où la droite D touche son enveloppe (D). La normale à la courbe (D), c'est-à-dire la perpendiculaire élevée en M à la droite D coupant $H_i \Omega_i$ en N_i, ce point est le centre instantané de rotation de l'angle droit $P_i A_i M$, et $N_i A_i$ est la normale à la courbe décrite par le point A_i. On a donc, en appelant $d\alpha$ la différentielle de l'angle que fait la droite D avec un axe fixe quelconque du plan

$$dl_i = N_i \Omega_i \, d\alpha,$$

ou, si Ω'_i est le pied de la perpendiculaire abaissée de Ω_i sur la droite D,

$$dl_i = M\Omega'_i \, d\alpha.$$

La différentiation de la relation donnée conduit donc, en tenant compte de cette formule et supprimant le facteur commun $d\alpha$, à l'équation

$$\frac{d\varphi}{dl_1} M\Omega'_1 + \frac{d\varphi}{dl_2} M\Omega'_2 + \ldots + \frac{d\varphi}{dl_n} M\Omega'_n = 0,$$

qui montre que le centre de gravité des masses $\frac{d\varphi}{dl_1}$,

$\frac{d\varphi}{dl_2}, \ldots, \frac{d\varphi}{dl_n}$. respectivement appliquées en Ω_1, Ω_2, ..., Ω_n se trouve sur la normale cherchée $MN_1N_2\ldots N_n$. On peut donc énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME II. — *Si les distances sous l'angle* θ, l_1, l_2, ..., l_n *d'une droite* D *à une ou plusieurs courbes* C, *sont liées par la relation*

$$\varphi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = 0,$$

la normale à l'enveloppe de la droite D *passe par le centre de gravité des masses* $\frac{d\varphi}{dl_1}, \frac{d\varphi}{dl_2}, \ldots, \frac{d\varphi}{dl_n}$, *respectivement appliquées aux centres de courbure correspondants des courbes* C.

5. Lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$ (distances normales), $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ sont respectivement situés sur A_1P_1, A_2P_2, ..., A_nP_n; on voit donc alors, en projetant sur la droite D, que le point de contact M est le centre de gravité des masses $\frac{d\varphi}{dl_1}, \frac{d\varphi}{dl_2}, \ldots, \frac{d\varphi}{dl_n}$ respectivement appliquées en A_1, A_2, ..., A_n.

On retrouve ainsi un théorème que M. H. Laurent a obtenu par la voie analytique ([1]).

([1]) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XIII, 1874.

SUR L'ÉTUDE INTRINSÈQUE DES SURFACES RÉGLÉES;

PAR M. E. CESARO.

Nos *Remarques sur les surfaces gauches* [1] contiennent, sous une forme plus ou moins explicite, les théorèmes énoncés par M. Bioche dans une Communication *Sur les surfaces réglées passant par une courbe donnée,* qui vient d'être faite à l'Académie des Sciences [2]. On sait combien il est commode, pour étudier les surfaces gauches, de prendre pour axes la tangente, la binormale et la normale principale en un point mobile de la ligne de striction. Si

$$a = \cos\theta, \qquad b = \sin\theta\sin\varphi, \qquad c = \sin\theta\cos\varphi,$$

sont, par rapport à ces axes, les cosinus directeurs de la génératrice, on a, avec les notations de M. Bioche,

$$\frac{da}{ds} = \omega c, \qquad \frac{db}{ds} = (\pi - G_0)c, \qquad \frac{dc}{ds} = -\omega a - (\pi - G_0)b,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\theta}{ds} = -\omega\cos\varphi, \qquad \frac{d\varphi}{ds} = \pi + \omega\cot\theta\sin\varphi - G_0,$$

G_0 étant la valeur de la courbure totale G sur la ligne de striction. Plus généralement

$$\frac{d\theta}{ds} = -\omega\cos\varphi + \frac{\delta\theta}{ds}, \qquad \frac{d\varphi}{ds} = \pi + \omega\cot\theta\sin\varphi + \frac{\delta\varphi}{ds},$$

quelle que soit la courbe fondamentale, en désignant

---

(1) *Nouvelles Annales*, 1889; p. 445-458.

(2) *Comptes rendus*, 10 mars 1890.

par $\delta\theta$ et $\delta\varphi$ les variations éprouvées par θ et φ lorsqu'on passe du point s au point $s + ds$, les axes restant fixes.

Soit $\delta\psi$ l'angle des génératrices issues de ces points, et D l'inclinaison du plan tangent sur la commune perpendiculaire aux deux droites, de sorte que $D = 0$ sur la ligne de striction, $D = 90^\circ$ à l'infini. On sait que la courbure totale en tout point de la surface est

$$G = G_0 \cos^2 D,$$

et il est aisé de voir que

$$\delta\theta = \delta\psi \sin D, \qquad \delta\varphi = \delta\psi \frac{\cos D}{\sin\theta}.$$

Cela étant, en vertu de la définition du paramètre distributeur des plans tangents, la distance de deux génératrices consécutives, évidemment égale à

$$-\sin\theta \cos D \, ds,$$

est, d'autre part, exprimée par $\dfrac{\delta\psi}{G_0}$. En conséquence,

$$\frac{\delta\psi}{ds} = -G \frac{\sin\theta}{\cos D}, \qquad \frac{\delta\theta}{ds} = -G \sin\theta \operatorname{tang} D, \qquad \frac{\delta\varphi}{ds} = -G.$$

Les formules fondamentales pour l'étude intrinsèque des surfaces réglées sont donc

$$\frac{d\theta}{ds} = -\omega\cos\varphi - G\sin\theta \operatorname{tang} D, \qquad \frac{d\varphi}{ds} = \pi + \omega\cot\theta\sin\varphi - G.$$

Lorsque la génératrice est invariablement liée aux axes mobiles, ces formules donnent

$$G = \pi + \omega\cot\theta\sin\varphi = -\omega\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\cot D.$$

Si l'on observe que la longueur du segment de génératrice, intercepté par la courbe à partir du point central, est

$$r = -\frac{\tan D}{G_0} = -\frac{\sin D \cos D}{G},$$

on obtient, par élimination de G et D, l'équation

$$(\omega a + \pi b)^2 + (\omega^2 + \pi^2)c^2 = \frac{\omega c}{r},$$

qui représente le cylindre signalé par M. Bioche et, avant lui, par d'autres (¹). De même, l'observation de M. Bioche, relative au changement de π en $\pi - G$, est comprise parmi les *Remarques sur les surfaces gauches* (²). Quelques énoncés de cette Note contiennent, à vrai dire, des restrictions inutiles, dues au choix particulier qu'on a voulu faire de la courbe fondamentale; mais, en ne rien supposant sur cette ligne, il est facile de restituer aux énoncés dont il s'agit toute la généralité dont ils sont susceptibles, et l'on peut alors étudier fort aisément les lignes asymptotiques ($\varphi = 0$), les géodésiques ($\varphi = 90°$), les lignes de courbure, etc., en attribuant à G, successivement, les formes

$$\pi, \quad \pi + \omega \cot\theta, \quad \omega \cot\theta \sin\varphi.$$

Soient Γ et Δ les valeurs de G et D, relatives à la surface formée par les normales à la première surface, le long de la ligne considérée. Si l'on change θ et φ en $90°$ et $\varphi + 90°$ dans les formules fondamentales, on obtient les relations

$$\Gamma = G - \omega \cot\theta \sin\varphi, \qquad \Gamma \tan\Delta = \omega \sin\varphi,$$

(¹) *Mathesis*, 1885, p. 199; *Nouvelles Annales*, 1889, p. 456.
(²) *Nouvelles Annales*, 1889, p. 447.

qui expliquent comment il se fait que l'équation $\Gamma = 0$ caractérise les lignes de courbure de la surface. On s'en rend compte aussi en remarquant que Δ est l'angle que la tangente à la courbe fondamentale fait avec sa conjuguée, génératrice de la développable circonscrite : l'équation $\Delta = 90^\circ$ caractérise aussi les lignes de courbure.

SUR LES TRAJECTOIRES ORTHOGONALES D'UNE LIGNE MOBILE;

PAR M. GEMINIANO PIRONDINI.

1. Soit L une ligne quelconque à double courbure : désignons respectivement par (x, y, z), $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $(\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)$, $(\cos l, \cos m, \cos n)$, s, ρ, r les coordonnées d'un point arbitraire de la ligne, les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale, l'arc, le rayon de courbure et le rayon de torsion.

On peut construire en un point quelconque de L le trièdre trirectangle formé par la tangente, par la normale principale et par la binormale (trièdre fondamental).

Considérons le mouvement déterminé par ce trièdre qui se déplace de manière à rester toujours le trièdre fondamental de L. Si Λ est une ligne liée invariablement au trièdre mobile T, et si l'on désigne par ξ, η, ζ les coordonnées d'un point quelconque P de Λ par rapport à ce trièdre, les coordonnées de P, rapporté à un système d'axes fixes, sont

$$X = x + \xi\cos\alpha + \eta\cos\lambda + \zeta\cos l, \qquad \ldots;$$

d'où, par dérivation,

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial \sigma} = \xi' \cos\alpha + \eta' \cos\lambda + \zeta' \cos l, \\[2mm] \dfrac{\partial X}{\partial s} = \left(1 - \dfrac{\eta}{\rho}\right)\cos\alpha + \left(\dfrac{\xi}{\rho} + \dfrac{\zeta}{\rho}\right)\cos\lambda - \dfrac{\eta}{r}\cos l, \qquad \ldots, \end{cases}$$

σ étant l'arc de A. Ces formules donnent

$$F = \sum \frac{\partial X}{\partial \sigma}\frac{\partial X}{\partial s} = \xi' + \frac{1}{\rho}(\xi\eta' - \xi'\eta) - \frac{1}{r}(\eta\zeta' - \eta'\zeta).$$

Sur la surface engendrée par la ligne mobile les lignes représentées par les équations $\sigma = \text{const.}$, $s = \text{const.}$ sont orthogonales lorsqu'on a la relation

$$(2)\qquad F = \xi' + \frac{1}{\rho}(\xi\eta' - \xi'\eta) + \frac{1}{r}(\eta\zeta' - \eta'\zeta) = 0.$$

Si l'on dérive (2) par rapport à la variable s, on obtient l'égalité

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)'(\xi\eta' - \xi'\eta) - \left(\frac{1}{r}\right)'(\eta\zeta' - \eta'\zeta) = 0.$$

que l'on peut écrire

$$\frac{\left(\frac{1}{\rho}\right)'}{\left(\frac{1}{r}\right)'} = \frac{\eta\zeta' - \eta'\zeta}{\xi\eta' - \xi'\eta}.$$

Le premier membre est une fonction de σ, tandis que le second est une fonction de s; on doit donc avoir

$$\frac{\left(\frac{1}{\rho}\right)'}{\left(\frac{1}{r}\right)'} = a, \qquad \frac{\eta\zeta' - \eta'\zeta}{\xi\eta' - \xi'\eta} = a,$$

a étant une constante arbitraire. La première équation donne

$$(3)\qquad \frac{1}{\rho} = \frac{a}{r} + b,$$

b étant une nouvelle constante, ce qui démontre que les deux courbures de la directrice L sont liées entre elles par une relation linéaire. La seconde équation peut s'écrire

$$\frac{\eta'}{\eta} = \frac{\zeta' + a\xi'}{\zeta + a\xi};$$

d'où, par intégration,

$$\log\eta = \log c + \log(\zeta + a\xi),$$

c'est-à-dire

$$(4) \qquad \eta = c(a\xi + \zeta),$$

c étant une constante arbitraire.

La relation (2) se réduit alors à

$$\frac{\xi'}{\xi} = b\,\frac{\eta'}{b\eta - 1};$$

d'où, en intégrant,

$$\log\xi = \log e + \log(b\eta - 1),$$

c'est-à-dire

$$(5) \qquad \xi = e(b\eta - 1),$$

e étant une constante quelconque. Les équations (4), (5) représentent une droite dont la position dépend des constantes a, b, c, e; d'ailleurs a, b sont données aussitôt que l'on donne la courbe L directrice du mouvement.

Si l'on considère a et b fixes et les constantes arbitraires c et e comme des fonctions d'un paramètre indépendant t, les équations (4), (5) représentent une surface réglée S.

Les lignes demandées sont les génératrices rectilignes d'une telle surface réglée et chaque ligne plane ou à double courbure que l'on peut considérer comme l'enveloppe d'un système de ces droites. Cherchons donc si les droites dont on vient de parler peuvent engendrer des surfaces développables.

Les équations (4), (5) peuvent s'écrire

$$(6)\quad \xi(1 - abce) = bce\,\zeta - e, \qquad \eta(1 - abce) = c\zeta - ace,$$

et la surface représentée par ces équations est développable lorsqu'on a

$$\frac{d}{dt}\frac{bce}{1 - abce}\,\frac{d}{dt}\frac{ace}{1 - abce} - \frac{d}{dt}\frac{e}{1 - abce}\,\frac{d}{dt}\frac{c}{1 - abce} = 0.$$

Si l'on développe cette égalité, on trouve

$$(1 - abce)^2 \frac{dc}{dt}\,\frac{de}{dt} = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{dc}{dt} = 0, \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{de}{dt} = 0, \qquad \text{ou bien} \qquad abce = 1.$$

Lorsque $\frac{dc}{dt} = 0$, le plan (4) reste invariable de position et la surface réglée S se réduit à ce plan ; les génératrices de cette surface sont les intersections du plan fixe (4) et du plan mobile (5).

Si l'on remarque que ce plan passe toujours par la droite fixe

$$\xi = 0, \qquad b\eta = 1,$$

on conclut que les génératrices rectilignes de la surface S, placées sur le plan (4), enveloppent un point.

Si l'on suppose

$$\frac{de}{dt} = 0,$$

le plan (5) est invariable de position et la surface réglée se réduit à ce plan ; les génératrices rectilignes de cette surface sont les intersections du plan fixe (5) et du plan mobile (4), qui passe toujours par la droite fixe

$$\eta = 0, \qquad a\xi + \zeta = 0.$$

Donc l'enveloppe des génératrices rectilignes de la surface S, sur le plan (5), est aussi un point.

Considérons maintenant la condition $abce = 1$; les relations (4), (5) deviennent

$$\eta = ac\,\xi + c\zeta,$$
$$ac\xi = \eta - ace;$$

d'où

$$\zeta = ae.$$

Le système (4), (5) équivaut donc au suivant

$$\zeta = ae, \qquad \xi = e(b\eta - 1).$$

La première équation représente un plan parallèle au plan coordonné $\zeta = 0$; les intersections du plan variable $\zeta = ae$ et du plan variable $\xi = e(b\eta - 1)$ forment donc une surface réglée à plan directeur.

Par conséquent les génératrices n'enveloppent aucune ligne.

On a donc ce théorème :

Si l'on pose la condition qu'une ligne Λ, *liée invariablement au trièdre fondamental d'une courbe de l'espace soit toujours orthogonale aux trajectoires décrites par ses points, lorsque le mouvement s'effectue de manière que le trièdre mobile soit toujours le trièdre fondamental de la ligne* L, *cette ligne doit avoir ses courbures liées entre elles par une équation linéaire* $\frac{1}{\rho} = \frac{a}{r} + b$, *et la ligne mobile* Λ *est une génératrice rectiligne quelconque de la surface réglée représentée par les équations* (4), (5), *dans lesquelles* c, e *sont des fonctions d'un paramètre indépendant quelconque* t.

Lorsque la directrice est plane, $\frac{1}{r} = 0$, et la condition à vérifier devient

$$\xi' + \frac{1}{\rho}(\xi\eta' - \xi'\eta) = 0,$$

ce qui exige que la directrice soit un cercle.

Or nous avons

$$\frac{\xi'}{\xi} = \frac{\eta'}{\eta - \rho};$$

d'où par intégration

$$\log\xi = \log m + \log(\eta - \rho),$$

c'est-à-dire

$$\xi = m(\eta - \rho),$$

m étant une constante arbitraire.

Cette équation représente un plan passant par la perpendiculaire élevée du centre sur le plan du cercle; la génératrice est une ligne quelconque placée sur ce plan, et le mouvement est une rotation autour de la perpendiculaire susdite.

Lorsque la directrice est une droite, $\frac{1}{\rho} = 0$ et $\frac{1}{r}$ devient indéterminé; si l'on considère $\frac{1}{r}$ comme constant, l'égalité (2) devient

$$\zeta\eta' - \zeta'\eta + r\xi' = 0;$$

c'est l'équation d'une ligne qui, dans le mouvement hélicoïdal autour de $\Omega\xi$ pour lequel le rapport de la vitesse de translation à celle de rotation est r, reste orthogonale aux hélices décrites par ses points.

Si l'on considère $r = 0$, on a

$$\eta\zeta' - \eta'\zeta = 0; \qquad \text{d'où} \qquad \eta = p\zeta,$$

équation d'un plan qui passe par l'axe des ξ. La surface est donc une surface de révolution quelconque dont la courbe mobile est la ligne méridienne.

2. On peut donner une généralisation du théorème démontré au n° 1. Supposons que le mouvement du trièdre ait lieu de manière que l'origine Ω parcoure une ligne L, que les arêtes $\Omega\xi$, $\Omega\zeta$ forment deux surfaces réglées Σ, Σ_1 conjuguées, ayant L pour ligne de striction commune. L'arête $\Omega\eta$ est alors toujours normale aux surfaces Σ, Σ_1 le long de la ligne de striction. On peut construire dans l'espace une ligne H, dont les tangentes, les binormales et les normales principales soient parallèles aux arêtes $\Omega\xi$, $\Omega\zeta$, $\Omega\eta$.

Si l'on conserve les notations précédentes, les coordonnées d'un point arbitraire de la ligne mobile Λ, dans une de ses positions, sont

$$X = x + \xi \cos\alpha_0 + \eta \cos\lambda_0 + \zeta \cos l_0, \qquad \ldots,$$

où les quantités α_0, λ_0, l_0, ..., relatives à la directrice H, ont la signification établie au n° 1. Si s, σ sont l'arc de la ligne L parcourue par Ω et celui de la ligne mobile Λ, on a

$$\frac{\partial X}{\partial \sigma} = \xi' \cos\alpha_0 + \eta' \cos\lambda_0 + \zeta' \cos l_0,$$

$$\frac{\partial X}{\partial s} = \cos\alpha - \eta \frac{ds_0}{\rho_0} \frac{\cos\alpha_0}{ds}$$
$$+ \left(\xi \frac{ds_0}{\rho_0} + \zeta \frac{ds_0}{r_0}\right) \frac{\cos\lambda_0}{ds} - \eta \frac{ds_0}{r_0} \frac{\cos l_0}{ds},$$

....

Or $\frac{ds_0}{\rho_0}$ est l'angle infinitésimal formé par deux tangentes consécutives de H, et par conséquent il est égal à l'angle ω de deux génératrices consécutives de Σ. Pareillement $\frac{ds_0}{r_0}$ est égal à l'angle infinitésimal ω_1 de deux génératrices consécutives de Σ; on a donc

$$\frac{\partial X}{\partial s} = \cos\alpha - \eta\,\frac{\omega}{ds}\cos\alpha_0 + \frac{\xi\omega + \zeta\omega_1}{ds}\cos\lambda_0 - \eta\,\frac{\omega_1}{ds}\cos l_0,$$

. . . . :

d'où l'on déduit

$$F = \sum \frac{\partial X}{\partial \sigma}\,\frac{\partial X}{\partial s} = \xi'\Sigma\cos\alpha\cos\alpha_0 + \eta'\Sigma\cos\lambda_0 + \zeta'\Sigma\cos\alpha\cos l_0$$
$$+ \frac{\omega}{ds}(\xi\eta' - \xi'\eta) - \frac{\omega'}{ds}(\eta\zeta' - \eta'\zeta).$$

Si l'on remarque que

$$\Sigma\cos\alpha\cos\alpha_0 = \cos i, \qquad \Sigma\cos\alpha\cos l_0 = \sin i,$$

i étant l'angle sous lequel la ligne de striction L coupe les génératrices de Σ, et que $\Sigma\cos\alpha\cos\lambda_0 = 0$, on a, pour condition d'orthogonalité des lignes $s = \text{const.}$, $\sigma = \text{const.}$,

$$(7)\quad F = \xi'\cos i + \zeta'\sin i + \frac{\omega}{ds}(\xi\eta' - \xi'\eta) - \frac{\omega'}{ds}(\eta\zeta' - \eta'\zeta) = 0.$$

Si l'on fait $i = 0$, on obtient la relation (2); si l'on suppose i constant, la ligne de striction est géodésique sur les surfaces gauches Σ, Σ_1.

Dans cette hypothèse, une dérivation par rapport à s réduit (7) à

$$\left(\frac{\omega}{ds}\right)'(\xi\eta' - \xi'\eta) - \left(\frac{\omega_1}{ds}\right)'(\eta\zeta' - \eta'\zeta) = 0.$$

Cette égalité, par des considérations analogues à celles développées précédemment, donne

$$(8)\qquad \frac{\omega}{ds} = a\,\frac{\omega_1}{ds} + b, \qquad \eta = c(a\xi + \zeta),$$

ce qui réduit l'égalité (7) à la suivante

$$\xi'\cos i + \zeta'\sin i + b(\xi\eta' - \xi'\eta) = 0.$$

Or la deuxième égalité (8) nous offre

$$\zeta = \frac{\eta}{c} - a\xi; \qquad \text{d'où} \qquad \zeta' = \frac{\eta'}{c} - a\xi',$$

et l'égalité précédente devient

$$\frac{b\xi'}{b\xi + \frac{\sin i}{c}} = \frac{b\eta'}{b\eta + a\sin i - \cos i};$$

d'où, par intégration,

$$\xi + \frac{\sin i}{c} = e(b\eta + a\sin i - \cos i). \tag{9}$$

La première équation (8) sert à caractériser la ligne L parcourue par le sommet du trièdre mobile. En effet, l'angle infinitésimal ω, formé par deux génératrices consécutives d'une surface réglée dont la ligne de striction est géodésique, est donné de la manière suivante

$$\omega = \left(\frac{\cos i}{\rho} - \frac{\sin i}{r}\right) ds,$$

ρ étant le rayon de courbure et r celui de torsion de la ligne de striction.

Pour obtenir l'angle ω_1, il suffit que l'on change i en $i - \frac{\pi}{2}$ dans l'égalité qui précède. On a de la sorte

$$\omega_1 = \left(\frac{\sin i}{\rho} + \frac{\cos i}{r}\right) ds,$$

et l'équation (8) nous donne alors

$$(\cos i - a\sin i)\frac{1}{\rho} = (\sin i + a\cos i)\frac{1}{r} + b. \tag{10}$$

Donc :

Si l'on pose la condition que, dans le mouvement d'un trièdre trirectangle s'effectuant de la manière *qu'on vient d'indiquer, une ligne invariablement liée à ce trièdre soit orthogonale aux trajectoires décrites par ses points, le sommet du trièdre parcourt une ligne dont la courbure et la torsion sont liées entre elles par une équation linéaire et la ligne mobile est une génératrice rectiligne quelconque de la surface réglée représentée par les équations*

$$\eta = c(a\xi + \zeta), \qquad \xi + \frac{\sin i}{bc} = c(bq + a\sin i \cos i),$$

c et e étant des fonctions d'un paramètre indépendant.

3. Considérons un point A invariablement lié au trièdre fondamental d'une ligne à double courbure quelconque L et désignons par ξ, η, ζ les coordonnées de A par rapport à la tangente, à la normale principale et à la binormale de L. Dans le mouvement du trièdre, le point A décrit une ligne Λ, dont nous désignons par σ l'arc. La première des relations (1) et ses analogues nous donnent

$$\frac{\partial X}{\partial \sigma}\frac{d\sigma}{ds} = \left(1 - \frac{\eta}{\rho}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\xi}{\rho} + \frac{\zeta}{r}\right)\cos\lambda - \frac{\eta}{r}\cos l, \qquad \ldots,$$

et, si l'on désigne par $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ les cosinus directeurs de la tangente de Λ, il vient

$$\cos\alpha_1 = \frac{\partial X}{\partial \sigma} = \frac{\left(1 - \frac{\eta}{\rho}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\xi}{\rho} + \frac{\zeta}{r}\right)\cos\lambda - \frac{\eta}{r}\cos l}{\sqrt{\left(1 - \frac{\eta}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\xi}{\rho} + \frac{\zeta}{r}\right)^2 + \frac{\eta^2}{r^2}}}, \qquad \ldots.$$

Si donc D désigne le dénominateur de cette fraction, on a

$$\Sigma \cos\alpha_1 \cos\alpha = \frac{1 - \frac{\tau_1}{\rho}}{D},$$

$$\Sigma \cos\alpha_1 \cos\lambda = \frac{\frac{\xi}{\rho} + \frac{\zeta}{r}}{D},$$

$$\Sigma \cos\alpha_1 \cos l = -\frac{\frac{\tau_1}{r}}{D}.$$

La condition $\Sigma \cos\alpha_1 \cos\alpha = 0$ équivaut à $\rho = \tau_1$; or τ_1 est constant dans le mouvement du trièdre, par conséquent la ligne L doit être à courbure constante.

La condition $\Sigma \cos\alpha_1 \cos\lambda = 0$ équivaut à $\frac{\rho}{r} = -\frac{\xi}{\zeta}$, qui, à cause de la constance de ξ et ζ, exprime que la ligne L est une hélice.

La condition $\Sigma \cos\alpha_1 \cos l = 0$ équivaut à $\frac{\tau_1}{r} = 0$, qui est vérifiée lorsque $\frac{1}{r} = 0$, ou bien $\tau_1 = 0$; la première condition nous apprend que L est plane et l'autre exprime que le point doit être sur le plan rectifiant de la directrice.

Si l'on remarque que l'équation $\tau_1 = \rho$ représente un plan parallèle au plan rectifiant de L, et que l'équation $\frac{\xi}{\zeta} = -\frac{\rho}{r}$ représente un plan passant par la normale principale et par la droite rectifiante de L, on a le théorème suivant :

Entre les points liés invariablement au trièdre fondamental d'une ligne à double courbure L, *ceux qui, dans le mouvement dont on vient de parler, décrivent une ligne* Λ *dont la tangente est perpendiculaire respectivement à la tangente ou à la normale principale ou à la binormale de* L, *sont placés d'une manière quelconque respectivement sur un plan passant par le* *centre de courbure parallèlement au plan rectifiant de* L, *ou sur un plan déterminé par la normale principale et la droite rectifiante de* L, *ou sur le plan rectifiant de* L.

La directrice L *est respectivement une ligne à courbure constante, ou une hélice, ou une ligne entièrement arbitraire.*

Lorsque la directrice est plane, le point que l'on cherche est arbitraire.

Les points, décrivant des lignes dont la tangente est perpendiculaire à la tangente et à la normale principale, c'est-à-dire parallèle à la binormale de L, sont sur l'intersection des deux premiers plans du théorème que l'on vient d'énoncer; cette intersection est parallèle à la droite rectifiante de L et passe par le centre de courbure de cette ligue. La ligne L doit être une hélice à courbure constante, c'est-à-dire une hélice circulaire.

Les points, décrivant des lignes dont la tangente est perpendiculaire à la normale principale et à la binormale, c'est-à-dire parallèle à la tangente de L, sont sur l'intersection des deux derniers plans du théorème précédent. Cette intersection est la droite rectifiante de L et cette ligne est une hélice.

Donc :

Entre les points invariablement liés au trièdre fondamental d'une ligne L, *ceux qui, dans le mouvement susdit, décrivent une ligne dont la tangente est parallèle respectivement à la binormale ou à la tangente de* L, *sont respectivement sur la droite parallèle à la droite rectifiante d'une hélice circulaire menée par le centre de courbure de cette ligne ou sur la droite rectifiante d'une hélice quelconque. Il n'y a pas de points qui décrivent des lignes ayant leur tangente parallèle à la normale principale de la courbe directrice.*

4. Soit Λ une courbe plane liée invariablement au système d'axes $\Omega(\xi, \eta)$, dont l'origine Ω parcourt une ligne L; désignons par ξ, η les coordonnées d'un point quelconque de Λ exprimées en fonction de l'arc σ. Les coordonnées de ce point par rapport au système d'axes fixes sont

$$\begin{aligned} X &= x(s) + \xi(\sigma)\cos\theta(\sigma) - \eta(\sigma)\sin\theta(\sigma), \\ Y &= y(s) + \xi(\sigma)\sin\theta(\sigma) + \eta(\sigma)\cos\theta(\sigma), \end{aligned}$$

$\theta(\sigma)$ étant l'angle que l'axe coordonné $\Omega\xi$ forme avec l'axe Ox.

On a ici

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial\sigma} &= \xi'\cos\theta - \eta'\sin\theta, & \frac{\partial X}{\partial s} &= x' - (\xi\sin\theta + \eta\cos\theta)\,\theta', \\ \frac{\partial Y}{\partial\sigma} &= \xi'\sin\theta + \eta'\cos\theta, & \frac{\partial Y}{\partial s} &= y' + (\xi\cos\theta - \eta\sin\theta)\,\theta', \end{aligned}$$

et la condition pour que les lignes $s =$ const. (ligne mobile) et les $\sigma =$ const. (trajectoires décrites par les points de Λ) soient orthogonales est

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial X}{\partial\sigma}\frac{\partial X}{\partial s} + \frac{\partial Y}{\partial\sigma}\frac{\partial Y}{\partial s} \\ &\quad = \xi'(x'\cos\theta + y'\sin\theta) \\ &\qquad - \eta'(x'\sin\theta - y'\cos\theta) + (\xi\eta' - \xi'\eta)\,\theta = 0. \end{aligned} \right.$$

Si l'on suppose que le mouvement de la ligne ne soit pas une translation, θ' est différent de zéro; on peut donc diviser (11) par θ', ce qui donne

$$\xi'\frac{x'\cos\theta + y'\sin\theta}{\theta'} - \eta'\frac{x'\sin\theta - y'\cos\theta}{\theta'} + \xi\eta' - \xi'\eta = 0;$$

d'où, par dérivation par rapport à s,

$$\xi'\left(\frac{x'\cos\theta + y'\sin\theta}{\theta'}\right)'_s = \eta'\left(\frac{x'\sin\theta - y'\cos\theta}{\theta'}\right)'_s.$$

On en déduit

$$\frac{\xi'}{\eta'} = \frac{\left(\dfrac{x'\sin\theta - y'\cos\theta}{\theta'}\right)'_s}{\left(\dfrac{x'\cos\theta + y'\sin\theta}{\theta'}\right)'_s};$$

et puisque le premier membre est une fonction de σ et le second une fonction de s, il faut qu'on ait

$$\xi' = a\eta', \qquad \left(\frac{x'\sin\theta - y'\cos\theta}{\theta'}\right)'_s = a\left(\frac{x'\cos\theta + y'\sin\theta}{\theta'}\right)'_s,$$

a étant une constante arbitraire.

On obtient par intégration

$$\xi = a\eta + b, \qquad x'\sin\theta - y'\cos\theta = a(x'\cos\theta + y'\sin\theta) + \theta c,$$

et conséquemment la condition (11) devient

$$\theta'\eta'(b - c) = 0.$$

Cette relation nous donne $b = c$; et l'on peut dire que la solution la plus générale de l'équation (11) est la suivante

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= a\eta + b, \\ x'\sin\theta - y'\cos\theta &= a(x'\cos\theta + y'\sin\theta) + b\theta'. \end{aligned} \right.$$

La première des équations (12) nous apprend que la ligne mobile se réduit à une droite; la deuxième donne θ en fonction de x' et y' et conséquemment en fonction de s; le mouvement est donc entièrement déterminé.

On peut faire $b = 0$ sans rien perdre en généralité; en effet, la condition $b = 0$ peut être remplie par une translation de l'axe des η parallèlement à sa direction, en vertu de laquelle l'origine Ω se réduit à une nouvelle origine Ω_1. Il suffit alors de remplacer la ligne L parcourue par Ω par la ligne L_1, décrite par la nouvelle origine Ω_1.

On peut donc énoncer le théorème :

Entre les lignes invariables de forme, il n'y a que la droite qui, dans le mouvement sur un plan, puisse rester orthogonale aux trajectoires décrites par ses points; cela a lieu lorsque la droite passe par l'origine Ω *des axes mobiles et le mouvement s'effectue de manière que cette origine parcourt une ligne quelconque* $L(x, y, s)$, *tandis que l'axe* $\Omega\xi$ *fait avec l'axe des* x *un angle* θ *donné par l'équation*

$$\tang\theta = \frac{a\dfrac{dx}{ds} + \dfrac{dy}{ds}}{\dfrac{dx}{ds} - a\dfrac{dy}{ds}}.$$

5. Soient $x = \varphi(u, v), y = 0, z = \psi(u, v)$ les coordonnées d'un point quelconque du plan coordonné xz, exprimées en fonction de deux paramètres indépendants u, v. Considérons la surface représentée par les équations

$$X = x\cos V, \qquad Y = x\sin V, \qquad Z = z,$$

V étant une fonction arbitraire de v. On en déduit

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\cos V, \qquad \frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\sin V, \qquad \frac{\partial Z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\cos V - x\sin V.V', \qquad \frac{\partial Y}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\sin V + x\cos V.V', \qquad \frac{\partial Z}{\partial v} = 0,$$

d'où

$$\sum \frac{\partial X}{\partial u}\,\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\,\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Cette égalité exprime la proposition suivante :

Si $x = \varphi(u, v), y = 0, z = \psi(u, v)$ *sont les coordonnées d'un point quelconque d'un plan, exprimées en fonction des paramètres* u, v *de deux systèmes de* *lignes orthogonales, sur la surface*

$$X = \varphi(u, v)\cos V, \qquad Y = \varphi(u, v)\sin V, \qquad Z = \psi(u, v)$$

(V *étant une fonction arbitraire de* v), *les lignes* $u =$ const., $v =$ const., *sont orthogonales, et réciproquement.*

Nous allons faire quelques applications de ce théorème.

Sur une surface quelconque soient L les lignes que l'on obtient en coupant la surface par une suite de plans passant par l'axe des z. Considérons sur la surface les lignes l trajectoires orthogonales des lignes L; les lignes l, L seront représentées sur la surface respectivement par les équations $u =$ const., $v =$ const. On peut supposer que u indique un paramètre indépendant quelconque et que v représente l'angle que le plan coupant la surface fait avec le plan coordonné $y = 0$.

Les coordonnées d'un point quelconque de la surface peuvent s'exprimer en fonction de u, v, par des égalités de la forme

$$X = \varphi(u, v)\cos v, \qquad Y = \varphi(u, v)\sin v, \qquad Z = \psi(u, v),$$

$\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ étant deux fonctions convenables de u et v.

Si l'on fait tourner les plans coupant la surface autour de l'axe des z jusqu'à ce qu'ils coïncident avec le plan $y = 0$, on obtient sur ce plan une suite de lignes L_0 égales aux sections L. Les points A_1, A_2, A_3, ..., où les lignes L sont coupées par une même ligne l, forment, sur le plan $y = 0$, une ligne l_0, lieu des points a_1, a_2, a_3, ..., où vont coïncider les points A_1, A_2, A_3, ... Les lignes planes L_0, l_0 sont, en vertu du théorème énoncé, orthogonales.

Donc :

Que l'on coupe une surface quelconque par une suite de plans qui passent par une même droite R, *et que l'on considère les lignes* l, *trajectoires orthogonales des sections* L; *si l'on fait tourner chaque plan coupant, autour de la droite* R, *de manière à l'amener sur un plan fixe passant par cette droite, les lignes* L, l *donnent lieu, sur ce plan, à un double système de lignes orthogonales.*

Sur un plan considérons une ligne L_0 et le système de ses développantes. Ces développantes et les tangentes à la ligne L_0 forment un double système de lignes orthogonales; si donc on fait application du théorème que l'on vient de démontrer, on a :

Si une ligne plane quelconque L *change de forme et de position de manière à rester géodésiquement parallèle à elle-même, tandis que son plan tourne autour d'une droite placée sur ce plan, la ligne mobile* L *reste toujours orthogonale aux trajectoires décrites par ses points dans le double mouvement considéré.*

Soit A une ligne plane quelconque placée sur le plan coordonné $y = 0$; considérons une droite qui se déplace sur ce plan de manière à rester toujours tangente à A. La droite mobile, dans ses différentes positions, et les trajectoires décrites par ses points forment un double système de lignes orthogonales. Si donc on applique le théorème énoncé, on a :

Si une droite roule sur une ligne plane quelconque, tandis que le plan de la courbe tourne autour d'une droite placée sur ce plan, la droite mobile reste tou-

jours orthogonale aux trajectoires décrites par ses points.

Si l'on suppose que la ligne A se réduise à un point, nous avons :

Si une droite D *tourne autour d'un point sur un plan, tandis que ce plan tourne autour d'une de ses droites, la ligne* D *est toujours orthogonale aux trajectoires décrites par ses points.*

Supposons que la droite mobile soit placée sur le plan coordonné $y = 0$, et que le point A, autour duquel a lieu la rotation de la droite, soit placé sur l'axe des x à la distance a de l'origine. Les coordonnées d'un point quelconque M de la droite sont

$$\begin{aligned} x &= a - v\cos\sigma, \\ y &= 0, \\ z &= -v\sin\sigma, \end{aligned}$$

v désignant le segment AM et σ l'angle de AM avec Ox.

Nous aurons pour les coordonnées d'un point de la surface engendrée

$$\begin{aligned} X &= (a - v\cos\sigma)\cos\varphi(\sigma), \\ Y &= (a - v\cos\sigma)\sin\varphi(\sigma), \\ Z &= -v\sin\sigma, \end{aligned}$$

$\varphi(\sigma)$ étant une fonction arbitraire de σ. On en déduit

$$\frac{\partial X}{\partial \sigma} = v\sin\sigma\cos\varphi - (a - v\cos\sigma)\sin\varphi . \varphi', \qquad \frac{\partial X}{\partial v} = -\cos\sigma\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \sigma} = v\sin\sigma\sin\varphi + (a - v\cos\sigma)\cos\varphi . \varphi', \qquad \frac{\partial Y}{\partial v} = -\cos\sigma\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \sigma} = -v\cos\sigma, \qquad \frac{\partial Z}{\partial v} = -\sin\sigma,$$

et

$$E = \sum \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 = v^2 + (a - v\cos\sigma)^2 \varphi'^2,$$

$$F = \sum \frac{\partial X}{\partial \sigma}\frac{\partial X}{\partial v} = 0,$$

$$G = \sum \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 = 1.$$

Si dS est la distance entre deux points consécutifs de la surface, nous avons, en vertu des égalités précédentes,

$$dS^2 = [v^2 + (a - v\cos\sigma)^2 \varphi'^2]\, d\sigma^2 + dv^2.$$

Si l'on considère la surface réglée formée par les normales principales d'une ligne L, on a, pour le carré de la distance infinitésimale entre deux points consécutifs de la surface,

$$dS_1^2 = \left[\frac{v^2}{r^2} + \left(1 - \frac{v}{\rho}\right)^2\right] ds^2 + dv^2,$$

s, ρ, r étant l'arc, le rayon de courbure et le rayon de torsion de L, et v les portions des normales principales de L, comptées à partir de cette ligne.

Pour comparer les expressions de dS^2 et de dS_1^2, on remarque que l'on peut écrire

$$dS^2 = \left[\frac{v^2}{a^2\varphi'^2} + \left(1 - \frac{v}{\frac{a}{\cos\sigma}}\right)^2\right] a^2\varphi'^2\, d\sigma^2 + dv^2.$$

On rend dS^2 égal à dS_1^2 si l'on prend

$$\rho = \frac{a}{\cos\sigma}, \qquad r = a\varphi', \qquad a\varphi'\, d\sigma = ds.$$

Ces conditions équivalent aux suivantes

$$\rho = \frac{a}{\cos\sigma}, \qquad \varphi(\sigma) = \frac{s}{a} + b, \qquad d\sigma = \frac{ds}{r}.$$

La dernière égalité donne

$$\sigma = \int \frac{ds}{r} + c$$

et, conséquemment,

$$\rho = \frac{a}{\cos\left(c + \int \frac{ds}{r}\right)}.$$

Donc :

La surface, lieu des normales principales d'une ligne pour laquelle est vérifiée la relation

$$\rho \cos\left(c + \int \frac{ds}{r}\right) = a,$$

est applicable sur la surface engendrée par une droite qui tourne autour d'un point A, *l'angle de rotation* σ *étant donné par la formule*

$$\sigma = c + \int \frac{ds}{r},$$

tandis que le plan de la figure tourne autour d'une droite perpendiculaire à celle d'où l'on compte les angles σ, *placée à la distance* a *de* A, *avec la loi exprimée par l'égalité*

$$\varphi(\sigma) = \frac{s}{a} + b.$$

On a encore

$$s = a\varphi(\sigma) - ab, \qquad r\frac{ds}{d\sigma} = a\varphi'(\sigma),$$

et conséquemment :

La surface réglée engendrée par une droite tournant autour d'un point A, *tandis que le plan de la figure tourne autour d'une droite selon la loi exprimée* *par la fonction* $\varphi(\sigma)$ *de l'angle* σ, *est applicable sur la surface gauche des normales principales d'une ligne, dont le rayon de courbure et celui de torsion sont exprimés de la manière suivante*

$$\rho = \frac{a}{\cos\sigma}, \qquad r = a\varphi'(\sigma),$$

σ *s'exprimant par s moyennant l'égalité* $\varphi(\sigma) = \frac{s}{a} + b$.

Exemple. — Si l'on suppose $\varphi(\sigma) = \frac{m}{\sigma}$, on a

$$\sigma = \frac{am}{s + ab};$$

d'où

$$\rho = \frac{a}{\cos\left(\frac{am}{s+ab}\right)}.$$

D'ailleurs : $\varphi'(\sigma) = -\frac{m}{\sigma^2}$, et, par suite,

$$r = -\frac{am}{\sigma^2} = -\frac{(s+ab)^2}{am}.$$

Donc :

La surface engendrée est applicable sur la surface gauche des normales principales de la ligne

$$\rho = \frac{a}{\cos\left(\frac{am}{s+ab}\right)}, \qquad r = -\frac{(s+ab)^2}{am}.$$

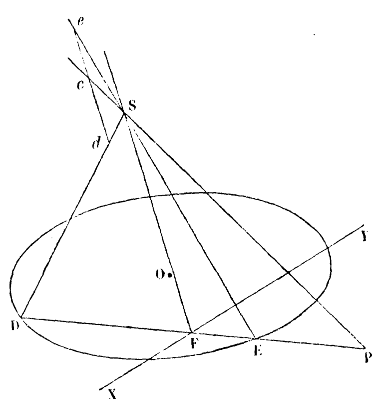
ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES D'APRÈS LEUR DÉFINITION [1];

PAR M. L. MALEYX.

Du centre et des diamètres dans l'hyperbole; premières propriétés de direction.

XII. *La section hyperbolique a un centre.* — Soit S le sommet d'un cône dont O est le cercle directeur (*fig.* 7) : considérons une section hyperbolique, le plan parallèle au plan sécant mené par le sommet coupera le

Fig. 7.



plan de la base suivant une droite XY rencontrant la directrice en deux points réels. Soit P le pôle de XY par rapport au cercle directeur, il lui sera extérieur; unissons le pôle P au sommet S par une droite rencon-

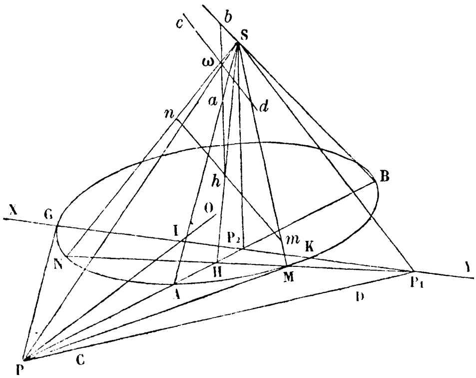
[1] Voir même Tome, p. 240.

trant le plan de la section en c, et faisons passer par cette droite un plan variable dans des limites telles qu'il rencontre le cercle O en deux points D, F, et la polaire XY de P en F. Construisons les génératrices SD, SE, intersection du cône et du plan auxiliaire, et aussi la droite SF : le plan auxiliaire coupera le plan de la section, qui est parallèle au plan SXY, suivant une droite de parallèle à SF et passant par le point c; les points d, e, appartiendront à la section, puisqu'ils sont situés à l'intersection d'une droite du plan sécant et de deux génératrices du cône. Mais le faisceau S.DEFP est harmonique, dès lors la droite dce, parallèle au rayon SF, est divisée par le point c en deux parties égales; on en conclut, par les motifs donnés à l'occasion de la section elliptique (Ch. I, n° II), que le point c est un centre de la section hyperbolique.

XIII. *La section hyperbolique n'admet que des diamètres rectilignes; ces diamètres passent tous par le centre; ils sont conjugués deux à deux. Sur deux diamètres conjugués de l'hyperbole l'un rencontre la courbe et l'autre ne la rencontre pas.* — Soit S le sommet d'un cône dont le cercle directeur est O (*fig.* 8) : proposons-nous de trouver les diamètres d'une section hyperbolique; pour cela menons par le sommet du cône un plan parallèle à celui de la section, il coupera le plan du cercle directeur suivant la droite XY rencontrant la circonférence en G et K. Menons encore par le sommet S une parallèle à la direction des cordes dont le milieu décrit le diamètre que nous cherchons; cette parallèle coupera XY en un point P_1 ou P_2, qui peut être extérieur ou intérieur au cercle; considérons d'abord le point extérieur P_1.

Construisons la polaire AB du point P_1, et faisons tourner un plan variable autour de SP_1 ; considérons-le dans la position où il coupe le plan du cercle directeur suivant MN, il coupe le cône suivant les génératrices SM, SN, et le plan SAB suivant SH formant avec SP_1

Fig. 8.



le faisceau harmonique $S.NMHP_1$. Il coupe, en outre, le plan de la section suivant la droite mn, corde de l'hyperbole parallèle à SP_1 et dont le milieu h est déterminé par son intersection avec SH, rayon conjugué de SP_1. Le point h, qui décrit le diamètre cherché, se trouve à la fois dans le plan SAB et dans le plan de la section, qui sont fixes : donc ce diamètre est une ligne droite.

Si la trace du plan variable sur le plan du cercle directeur tourne autour de P_1 depuis la position $P_1 A$, où elle est tangente à ce cercle, jusqu'à la position $P_1 X$, les extrémités de la corde mn restent sur la nappe inférieure du cône, et la corde se déplace parallèlement à elle-même depuis la position où elle est tangente en a jusqu'à l'infini; et, si cette trace tourne depuis la position $P_1 B$ jusqu'à $P_1 X$, les extrémités de la corde mn restent sur la nappe supérieure, et la corde mn se déplace parallèlement à elle-même depuis la position où elle est tangente en b jusqu'à l'infini; les autres positions du plan variable, et en particulier la position SP_1P, passant par le pôle P de la droite XY, coupent le plan de la section suivant des droites parallèles à mn situées entre les deux branches de la courbe et ne la rencontrant pas.

Le point P_1, pôle de la droite AB, étant situé sur XY, la droite AB passe par le pôle P de XY; et P_2 étant l'intersection des droites AB et XY sera le pôle de la droite P_1P qui unit les pôles de ces droites.

La droite SP_2 et le diamètre ab, dont nous venons d'établir l'existence, sont parallèles, comme intersections du plan de la section et du plan SXY, qui sont parallèles, par le plan SAB; et, comme le faisceau $S.ABPP_2$ est harmonique, ab, parallèle à SP_2, est divisée en deux parties égales par le rayon SP, au point ω qui est le centre de la section.

On verrait de même, en faisant tourner un plan variable autour de SP_2, que les cordes de l'hyperbole qui lui sont parallèles sont divisées par cd en deux parties égales; dès lors cd est le diamètre divisant en parties égales les cordes parallèles à SP_2 qui toutes coupent la courbe en deux points situés un sur chaque branche; ab et cd sont donc deux diamètres conjugués dont l'un rencontre la courbe pendant que l'autre ne la rencontre pas.

XIV. *Propriétés des diamètres conjugués de l'hyperbole. Asymptotes.* — Comme nous l'avons vu pour l'ellipse, n° IV, Chap. I, le triangle PP_1P_2 de la *fig.* 8 est tel que chacun de ses sommets est le pôle du côté opposé; on peut donc aussi lui conserver la qualification d'*autopolaire*.

Les points P_1 et P_2 étant conjugués harmoniques par rapport à G et K sont situés d'un même côté du milieu I de GK, et l'on a la relation $IP_1 \times IP_2 = \overline{IK}^2 = R^2 - \overline{OI}^2$, plus immédiate que dans le cas de la section elliptique.

On peut, comme dans le cas de l'ellipse, s'en servir pour déterminer les axes et les sommets, et aussi deux diamètres conjugués faisant un angle donné, observant que dans le cas actuel : 1° le système des deux axes est toujours déterminé; 2° le minimum de l'angle aigu de deux diamètres conjugués est zéro, car les directions des deux diamètres conjugués menées par le sommet, soit SP_1 et SP_2, peuvent coïncider suivant SK ou SG.

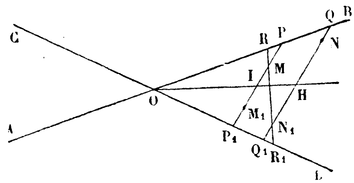
Les mêmes questions peuvent être résolues plus simplement en se fondant sur la remarque importante qui suit.

Remarque. — Les tangentes au cercle O en G et K (*fig.* 8) vont se couper au pôle P de la droite GK, puisque la droite GK passe par les pôles G et K des tangentes. Les plans SPG, SPK sont tangents au cône suivant les génératrices SG, SK qui rencontrent le plan de la section à l'infini. Ces plans tangents coupent le plan de la section suivant les parallèles à SG et SK menées par le centre ω, et tangentes à l'hyperbole aux points situés à l'infini; ces droites prennent le nom d'*asymptotes*. Les deux diamètres conjugués ab, cd, et les deux asymptotes, étant respectivement parallèles aux rayons du faisceau harmonique $S.GKP_2P_1$, sont quatre droites formant elles-mêmes un faisceau harmonique, et l'on peut en conclure que ab et cd, diamètres conjugués de l'hyperbole, forment aussi un système de diamètres conjugués du système des asymptotes. Dès lors, pour résoudre les questions, précédant la présente remarque, pour l'hyperbole, il suffit de les résoudre pour le système des asymptotes, et elles n'offrent alors aucune difficulté.

Propriétés des sécantes à l'hyperbole et au système de ses asymptotes; construction de la courbe par points; intersection d'une droite et d'une hyperbole.

XV. Soient AB, CD les asymptotes d'une hyperbole qui se coupent en son centre O (*fig.* 9), une sécante PP_1 rencontrant les asymptotes aux points P et P_1, et la

Fig. 9.



courbe aux points M et M_1, OI le diamètre divisant MM_1 et les cordes parallèles en deux parties égales; il résulte de la remarque du numéro précédent que OI divise aussi PP_1 en deux parties égales; d'où

$$IP = IP_1,$$
$$IM = IM_1,$$

et, retranchant membre à membre, $PM = PM_1$.

C'est-à-dire que *les segments d'une sécante compris entre ses points communs avec la courbe et avec les asymptotes sont égaux.*

La démonstration s'applique évidemment si les points M et M_1 appartiennent à deux branches différentes.

Corollaire. — Si la sécante tourne autour du point M jusqu'à ce que le point M_1 vienne se réunir avec lui, à cet instant elle devient tangente à la courbe en M, et, comme l'égalité $PM = P_1M_1$ a constamment lieu, il en résulte que : *le point de contact d'une tangente à une hyperbole, limitée aux asymptotes, divise cette droite en deux segments égaux.*

Considérons actuellement une seconde sécante QQ_1 parallèle à la première : soient N et N_1 ses points communs avec la courbe; unissons MN_1 par une ligne droite rencontrant les asymptotes en R et R_1 ; d'après ce qui précède, nous aurons les égalités

$$PM = P_1M_1, \qquad PM_1 = P_1M;$$
$$RM = R_1N_1, \qquad RN_1 = R_1M;$$
$$QN = Q_1N_1, \qquad QN_1 = Q_1N.$$

Les deux triangles PRM, QRN_1 sont semblables, et l'on en déduit

$$\frac{PM}{QN_1} = \frac{RM}{RN_1};$$

de la similitude des triangles $R_1N_1Q_1$, R_1MP_1, on tire aussi

$$\frac{Q_1N_1}{MP_1} = \frac{R_1N_1}{R_1M};$$

mais, d'après les égalités précédentes, les seconds membres des deux dernières égalités sont identiques; les deux premiers membres sont donc égaux, d'où :

$$\frac{PM}{QN_1} = \frac{Q_1N_1}{MP_1},$$

ou, en tenant compte des égalités précédentes,

$$\frac{PM}{Q_1N} = \frac{QN}{MP_1}, \qquad \text{et} \qquad MP \times MP_1 = NQ \times NQ_1.$$

C'est-à-dire que *le produit des segments d'une droite* *compris entre un point de la courbe et les asymptotes reste invariable quand la droite se déplace parallèlement à une direction fixe.*

Corollaire. — Ce produit des deux segments d'une sécante est égal au carré du segment de tangente parallèle, et compris entre le point de contact et une asymptote.

On peut déduire de la première de ces propriétés un moyen de construire la courbe par points, quand on connaît ses asymptotes et un point.

Considérons, en effet, les asymptotes AB, CD d'une hyperbole, et un point M de la courbe (*fig.* 9), en menant par le point M la sécante RMR_1 et prenant à partir de R_1 le segment $R_1N_1 = RM$, nous aurons, en N_1, le second point commun de la sécante et de la courbe, et nous pourrons en construire ainsi autant que nous voudrons.

D'après la seconde de ces propriétés, on peut construire, au moyen des mêmes données, les points communs d'une hyperbole et d'une droite quelconque.

Soient à trouver les points communs de l'hyperbole dont on connaît les asymptotes AB, CD, et le point M, (*fig.* 9), avec la droite QQ_1 ; menons par le point M la parallèle PP_1 à QQ_1, il suffira de partager QQ_1 en deux parties QN, NQ_1 ou QN_1, N_1Q_1, telles qu'on ait les égalités

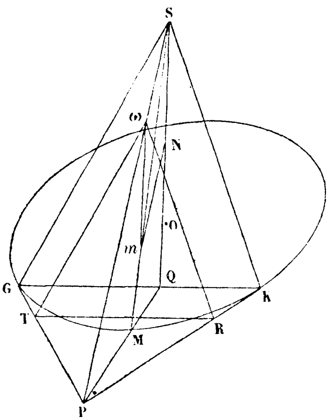
$$QN \times NQ_1 = PM \times MP_1 = QN_1 \times N_1Q_1,$$

ce qui revient à construire un rectangle équivalent à un rectangle donné, connaissant la somme des côtés, problème dont la solution est anciennement connue.

XVI. *Deux droites qui se coupent, considérées comme asymptotes, et un point, définissent une hyperbole.* — Il s'agit de démontrer que, étant données deux droites qui se coupent et un point, on peut construire une hyperbole ayant ces deux droites pour asymptotes et passant par le point.

Pour cela, prenons un cône dont le sommet soit S et le cercle directeur O, et tel qu'il existe sur sa surface

Fig. 10.



deux génératrices SG, SK, faisant un angle égal à celui des droites données, qui comprend le point donné, (*fig.* 10).

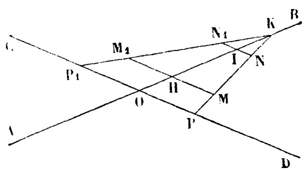
La figure composée des deux droites données et du point donné pourra s'appliquer sur GSK, soit N la position que prendra le point donné après cette superposition. Déterminons le pôle P de la droite GK, menons la droite SP et faisons passer un plan par SP et le point N; ce plan coupera le cône suivant la génératrice SM; menons par le point N la parallèle Nm à SP, et par le point m, où cette droite rencontre SM, la droite $m\omega$ parallèle à SN; enfin par le point ω un plan parallèle à GSK, qui coupera les plans SPG, SPK, suivant les droites ωT, ωR.

La figure formée par les trois droites ωT, ωR, ωm est superposable sur celle qui est composée de SG, SK, SN, car ces droites sont parallèles deux à deux comme intersections de deux plans parallèles par un troisième, et de plus $\omega m = SN$, comme côtés opposés d'un parallélogramme. Il en résulte que les deux droites et le point donnés peuvent s'appliquer simultanément sur ωT, ωR et m, et, comme le plan $T\omega R$ coupe le cône suivant une hyperbole ayant pour asymptotes ωT, ωR et passant par le point m, le théorème se trouve démontré.

Premières propriétés métriques des diamètres de l'hyperbole.

XVII. *Définition de l'hyperbole conjuguée d'une hyperbole donnée.* — Si l'on considère une hyperbole ayant pour asymptotes AB, CD, et passant par le point M (*fig.* 11), que par chacun de ses points on mène des parallèles à une des asymptotes, CD par exemple,

Fig. 11.



et qu'on les prolonge d'une longueur égale au delà de leur point de rencontre avec l'autre asymptote, de sorte que $HM_1 = HM$, $IN_1 = IN$, ..., les points M_1, N_1 ainsi obtenus décrivent une autre hyperbole ayant les mêmes asymptotes et qui est dite conjuguée de la première.

Il suffit, pour justifier cette définition, d'établir que le lieu des points M_1, N_1, ... est une nouvelle hyperbole, ou que, considérant M_1 comme fixe et N_1 comme variable, on a, pour toutes les positions de N sur la première hyperbole, $P_1M_1 = N_1K$, d'après la proposition démontrée au numéro précédent et la construction par points de l'hyperbole établie au n° XV.

Or, les droites MM_1, NN_1 étant parallèles et divisées en parties égales par les points H, I, les droites M_1N_1, MN, vont concourir en un même point K de OB; et les segments P_1M_1, N_1K, proportionnels à PM et NK qui sont égaux (n° XV, Chap. I), sont eux-mêmes égaux.

Il est évident, d'après un théorème connu, que les droites MN, M_1N_1 interceptent sur la deuxième asymptote des segments égaux OP, OP_1 ; dès lors, si l'on unissait le point O aux milieux respectifs de KP, KP_1, on formerait un parallélogramme dont les côtés issus de O constitueraient un système de diamètres conjugués de chacune des hyperboles conjuguées.

Si l'on supposait que le point N se déplaçât sur l'hyperbole à laquelle il appartient jusqu'à ce qu'il vînt coïncider avec M, en même temps N_1 se réunirait à M_1, les deux droites PM, P_1M_1 deviendraient simultanément tangentes aux deux hyperboles et seraient divisées par les points M et M_1 en deux parties égales.

Dans ces conditions, et par définition, OM et OM_1 sont ce qu'on appelle les *longueurs de deux demi-diamètres conjugués* de l'une ou de l'autre des deux hyperboles conjuguées, observant qu'un seul des deux rencontre chaque courbe.

On peut encore remarquer dans cette figure limite que le parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués a une de ses diagonales en coïncidence avec une de ses asymptotes, et la seconde diagonale parallèle avec l'autre asymptote.

Et il en résulte qu'une demi-tangente limitée au point de contact et à une asymptote est égale et parallèle au demi-diamètre qui ne rencontre pas la courbe, et qui est conjugué de celui qui aboutit au point de contact.

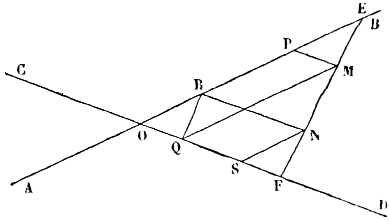
Théorèmes d'Apollonius dans l'hyperbole.

XVIII. D'après ce que nous venons de voir au numéro précédent, il est évident que le parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués est équivalent au triangle ayant pour base une tangente à l'extrémité de l'un d'eux limitée aux asymptotes, et pour côtés les segments qu'elle intercepte sur les asymptotes; ce triangle est lui-même le double du parallélogramme construit en menant par le milieu de sa base, extrémité du diamètre conjugué de sa direction, des parallèles aux asymptotes.

Il est facile de voir que ce dernier parallélogramme a une surface constante, et qu'en conséquence il en est de même de celle du parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués, qui est le double de celle du précédent.

En effet, soient M et N les extrémités de deux diamètres d'une hyperbole ayant pour asymptotes AB et

Fig. 12.



CD (*fig.* 12), construisons les deux parallélogrammes MPOQ, NROS, dont les côtés sont parallèles aux asymptotes, je dis qu'ils sont équivalents. Pour le démontrer, joignons MN par une ligne droite rencontrant les asymptotes en E et F, et unissons QR par une ligne droite; les deux triangles ERN, MQF sont égaux, puisqu'ils sont équiangles et ont des bases égales, $EN = MF$; il en résulte qu'ils ont même hauteur, et que QR est parallèle à EF; dès lors les figures ERQM, NRQF sont des parallélogrammes équivalents comme ayant les bases EM et NF égales, et même hauteur. Or les parallélogrammes ERQM, POQM d'une part, NRQF, NROS d'autre part, sont équivalents deux à deux; donc de l'égalité $ERQM = NRQF$, on peut déduire

$$POQM = NROS.$$

ce qu'il fallait démontrer.

D'après cela, le parallélogramme construit sur OM et son demi-conjugué, et le parallélogramme construit sur ON et son demi-conjugué, qui sont les doubles des précédents, sont équivalents.

On en conclut que *le parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués d'une hyperbole est égal au rectangle construit sur les demi-axes,* ce qui constitue le premier des Théorèmes d'Apollonius.

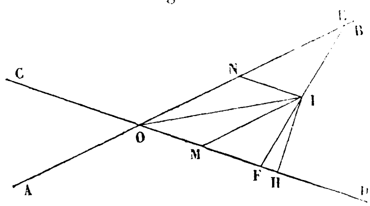
Soit encore EF une tangente à une hyperbole dont les asymptotes sont AB et CD (*fig.* 13), le point de contact I est placé au milieu de EF; OI et IF sont les longueurs des deux demi-diamètres conjugués.

Menons, par le point I, IM et IN respectivement parallèles à AB et CD; IM sera médiane du triangle, et, si nous traçons IH perpendiculaire à OF, nous aurons, d'après un théorème connu,

$$\overline{OI}^2 - \overline{IF}^2 = 4\,OM \times MH.$$

Dans le triangle rectangle IMH, l'angle en M est égal à celui des asymptotes et en conséquence fixe; il en ré-

Fig. 13.



sulte que le rapport des côtés de l'angle droit est constant, soit $\frac{MH}{IH} = \alpha$; nous pouvons dans l'égalité précédente remplacer MH par son égal $\alpha \times IH$, ce qui donne

$$\overline{OI}^2 - \overline{OF}^2 = 4\alpha \times OM \times IH = 4\alpha\,OMIN,$$

OMIN étant le parallélogramme que nous avons démontré être constant dans le théorème précédent.

De là résulte que *la différence des carrés de deux demi-diamètres conjugués de l'hyperbole est constante et égale à la différence des carrés des demi-axes*, ce qui est le second des Théorèmes d'Apollonius.

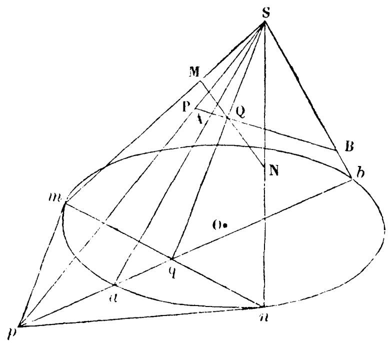
Pôle et polaire dans les coniques.

XIX. Si par un point ou pôle fixe pris dans le plan d'une conique on mène à la courbe une suite de sécantes, on donne le nom de *polaire de ce point* au lieu du point de chaque sécante conjugué harmonique du pôle par rapport à ses points de rencontre avec la courbe. Ce lieu est une droite.

Les propositions connues sur pôles et polaires au cercle sont également vraies pour les coniques.

Soit S le sommet d'un cône dont O est le cercle directeur (*fig.* 14); considérons un plan sécant, et soit P un point de ce plan. Joignons S et P par une ligne droite que nous prolongeons jusqu'à sa rencontre, *p*, avec le plan du cercle directeur. Par SP faisons passer un plan variable coupant le cône suivant les génératrices SA, SB, et le plan de la section suivant PAB; nous cherchons le lieu du point Q, conjugué harmonique de P, par rapport à A et B. Le faisceau S.PQAB est harmonique, ses rayons prolongés rencontrent le plan de la base circulaire sur la droite *pb*, intersection du plan variable et de ce plan

Fig. 14.



de base; les traces *a* et *b* de SA et SB sont situées sur la circonférence O, et le point *q*, trace de SQ, est conjugué harmonique de *p* par rapport à *a* et *b*. Il en résulte que *q* décrit la polaire *mn* de *p* par rapport au cercle O, qu'en conséquence Q se déplace dans le plan S*mn* et décrit l'intersection de ce plan fixe et du plan de la section, qui est la droite fixe MN.

La polaire du point P par rapport à la conique est donc une droite, perspective, sur le plan de la conique, de la polaire par rapport au cercle O, de la perspective du point P sur le plan de ce cercle.

Il en résulte immédiatement, en remontant aux propriétés des pôles et polaires par rapport au cercle :

Que si le pôle P d'une droite D, par rapport à une conique, est situé sur une droite D_1, réciproquement le pôle P_1 de la droite D_1 est situé sur la droite D;

Que si une droite D_1 tourne autour d'un point fixe P, son pôle P_1 décrit la polaire D du point P;

Que si le pôle P_1 d'une droite D_1 décrit une droite fixe D, cette droite D_1 tourne autour d'un point fixe P, pôle de la droite D.

CHAPITRE II.

De l'involution et de ses usages. Théorèmes et applications.

I. Définitions; deux théorèmes de Géométrie.

Si l'on considère trois points sur une ligne droite, on donne le nom de *puissance* du premier, qui est aussi désigné par un des mots *pôle* ou *centre,* par rapport aux deux autres, au produit des segments interceptés entre le premier et chacun des deux autres; la puissance est considérée comme positive ou négative suivant que les segments sont de mêmes sens ou de sens contraires.

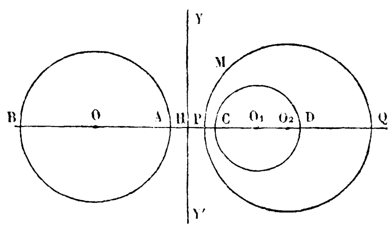
On sait que, si par un point fixe du plan d'un cercle on lui mène une sécante variable, la puissance du point fixe par rapport aux points de rencontre de la sécante et du cercle est un nombre constant, qui a reçu le nom de *puissance* du point par rapport au cercle. Cette *puissance* est représentée en grandeur et en signe par l'excès positif ou négatif du carré de la distance du point au centre sur le carré du rayon; il en résulte que le lieu géométrique des points d'égale puissance par rapport à un cercle est un cercle concentrique.

On sait encore que le lieu des points d'égale puissance par rapport à deux cercles, situés dans un même plan, est une droite perpendiculaire à la ligne des centres et qui porte le nom d'*axe radical.*

THÉORÈME I. — *Le lieu géométrique des points dont les puissances, par rapport à deux cercles, situés dans le même plan, sont dans un rapport constant, est un troisième cercle ayant avec eux même axe radical.*

Soient O et O_1 les deux cercles donnés, α le rapport caractérisant un point M du lieu (*fig.* 15), YY' l'axe ra-

Fig. 15.



dical des deux cercles O et O_1, on doit avoir par définition, R et R_1 étant les rayons des cercles O et O_1,

$$\frac{\overline{MO}^2 - R^2}{\overline{MO}_1^2 - R_1^2} = \alpha$$

ou

$$\overline{MO}^2 - \alpha\overline{MO}_1^2 = R^2 - \alpha R_1^2. \tag{1}$$

Or on sait que *le lieu des points dont la somme des produits des carrés des distances à deux points fixes* *par des coefficients positifs ou négatifs donnés est constante est une circonférence de cercle dont le centre est sur la droite qui unit les deux points, sauf le cas où la somme des coefficients est nulle, cas auquel le lieu est l'axe radical.*

Le lieu est donc un cercle dont le centre est situé sur la droite qui unit les centres des deux premiers, reste à établir qu'il a avec eux même axe radical. La proposition est évidente pour le cas où les cercles se coupent réellement; car l'égalité (1) est visiblement satisfaite si le point M vient se placer en un des points communs des deux cercles. Pour le démontrer dans le cas où ils ne se coupent pas réellement, exprimons que chacun des points P et Q, où le lieu rencontre le diamètre OO_1, satisfait à l'égalité qui les caractérise, nous aurons

$$\frac{PA \times PB}{PC \times PD} = \alpha, \quad \text{et} \quad \frac{QA \times QB}{QC \times QD} = \alpha;$$

ou, reportant l'origine au point H, où l'axe radical des deux premiers cercles rencontre la ligne des centres,

$$(PH + HA)(PH + HB) = \alpha(HC - HP)(HD - HP),$$
$$(QH + HA)(QH + HB) = \alpha(QH - HC)(QH - HD).$$

Ordonnons ces deux égalités, lues au premier membre, par rapport aux puissances décroissantes de HP et HQ, respectivement, observant que $HA \times HB = HC \times HD$, que de plus $HA + HB = 2HO$ et $HC + HD = 2HO_1$, on a

$$\overline{HP}^2(1 - \alpha) + 2HP(HO + \alpha HO_1) + HA \times HB(1 - \alpha) = 0,$$
$$\overline{HQ}^2(1 - \alpha) + 2HQ(HO + \alpha HO_1) + HA \times HB(1 - \alpha) = 0;$$

multipliant les deux membres de la première par HQ, les deux membres de la seconde par HP, et retranchant, on trouve

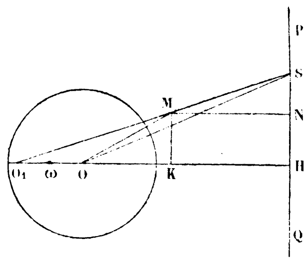
$$(\mathrm{HP} \times \mathrm{HQ} - \mathrm{HA} \times \mathrm{HB})(\mathrm{HP} - \mathrm{HQ})(1 - \alpha) = 0,$$

qui entraîne $\mathrm{HP} \times \mathrm{HQ} = \mathrm{HA} \times \mathrm{HB}$, et établit la proposition, le point H étant d'égale puissance par rapport aux cercles O et O_2.

THÉORÈME II. — *Le lieu géométrique des points dont la puissance par rapport à un cercle donné est à la distance à une droite donnée, comptée parallèlement à une direction donnée, dans un rapport donné, est un cercle ayant la droite donnée pour axe radical avec le cercle donné.*

Soit O le cercle donné dont le rayon est R, PQ la droite donnée, M un point du lieu (*fig.* 16).

Fig. 16.



Remarquons que la distance de M à PQ, comptée parallèlement à une direction donnée, est dans un rapport constant avec la distance MN, normale à PQ; il suffit donc de chercher le lieu demandé pour le cas de la distance normale.

Abaissons, du point O, OH perpendiculaire à PQ, et du point M, MK perpendiculaire à OH; on doit avoir, par définition,

$$\overline{\mathrm{MO}}^2 - \mathrm{R}^2 = a \times \mathrm{MN},$$

a étant une longueur résultant des données.

Prenons sur OH, en sens contraire de OH si le point M est extérieur au cercle O, et dans le même sens s'il est intérieur, une longueur $\mathrm{OO_1}$ égale à $\frac{a}{2}$, puis désignons par ω le point milieu de $\mathrm{OO_1}$; joignons $\mathrm{O_1M}$ par une droite rencontrant PQ en S, et SO par une deuxième droite.

Dans le triangle $\mathrm{O_1OM}$, nous avons

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{O_1M}}^2 - \overline{\mathrm{OM}}^2 = \overline{\mathrm{O_1K}}^2 - \overline{\mathrm{OK}}^2 &= (\mathrm{O_1K} - \mathrm{OK})(\mathrm{O_1K} + \mathrm{OK}) \\ &= \frac{a}{2} \times 2\,\omega\mathrm{K} = a \times \omega\mathrm{K}.\end{aligned}$$

Dans le triangle $\mathrm{O_1SO}$, on trouve de même

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{O_1S}}^2 - \overline{\mathrm{OS}}^2 = \overline{\mathrm{O_1H}}^2 - \overline{\mathrm{OH}}^2 &= (\mathrm{O_1H} - \mathrm{OH})(\mathrm{O_1H} + \mathrm{OH}) \\ &= a \times \omega\mathrm{H} = a \times (\omega\mathrm{K} + \mathrm{KH}).\end{aligned}$$

Retranchant ces deux égalités membre à membre,

$$\overline{\mathrm{O_1S}}^2 - \overline{\mathrm{O_1M}}^2 + \overline{\mathrm{OM}}^2 - \overline{\mathrm{OS}}^2 = a \times \mathrm{KH} = a \times \mathrm{MN};$$

et, d'après l'égalité de définition,

$$\overline{\mathrm{O_1S}}^2 - \overline{\mathrm{O_1M}}^2 + \overline{\mathrm{OM}}^2 - \overline{\mathrm{OS}}^2 = \overline{\mathrm{OM}}^2 - \mathrm{R}^2.$$

Cette égalité peut s'écrire

$$\overline{\mathrm{O_1S}}^2 - \overline{\mathrm{O_1M}}^2 = \overline{\mathrm{OS}}^2 - \mathrm{R}^2;$$

elle exprime que le point M du lieu appartient à un cercle fixe ayant $\mathrm{O_1}$ pour centre et PQ pour axe radical avec le cercle O. (*A suivre.*)

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1889).

Mathématiques élémentaires.

On donne deux droites concourantes OA, OB et un point P pris dans leur plan :

1° Construire sur OA un point M, tel que les deux cercles S et S′ passant par les points P et M et tangents à la droite OB se coupent sur un angle donné ω.

2° Étudier la variation de l'angle dans lequel se coupent les deux cercles S et S′ quand le point M se déplace sur la droite OA.

3° Soient Q et Q′ les deux autres points d'intersection des deux cercles S et S′ avec la droite OA. Démontrer que le cercle circonscrit au triangle PQQ′ est tangent à une droite qui reste fixe quand le point M décrit la droite OA.

Mathématiques spéciales.

On donne un cône du second degré C et deux quadriques A, A′, inscrites dans ce cône; on considère une quadrique variable S inscrite dans le même cône, et touchant les quadriques données A et A′ en des points variables α et α' :

1° Démontrer que la droite $\alpha\alpha'$ passe par un point fixe.

2° Trouver le lieu de la droite d'intersection des plans tangents à la surface S aux points α et α'.

3° Démontrer que le lieu du pôle d'un plan fixe P par rapport à la surface S se compose de deux quadriques bitangentes.

4° Trouver le lieu de la droite qui passe par les points de contact de ces deux quadriques, lorsque le plan P se déplace, en restant parallèle à un plan tangent au cône C.

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

Théorie. — Exposer le principe de la méthode donnée par Laplace pour l'intégration de l'équation (E) aux dérivées partielles

$$\text{(E)} \qquad \frac{d^2 z}{dx\, dy} + a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} + cz = 0,$$

où a, b, c désignent des fonctions quelconques de x et de y.

On définira les fonctions h et k des coefficients a, b, c, qui ont été appelées *invariants*, et l'on justifiera cette dénomination ; enfin on établira les conditions nécessaires et suffisantes pour que la suite de Laplace se termine dans les deux sens.

Application. — Soient h et k les invariants de l'équation aux dérivées partielles (E), et h_1, k_1 les invariants de l'équation (E_1) obtenue en appliquant la méthode de Laplace.

Trouver les formes que doivent avoir les invariants h et k pour que l'on ait les deux relations

$$h_1 = lh, \qquad k_1 = mk,$$

l et m étant des constantes.

Déterminer les formes que prennent, dans ces conditions, les coefficients a, b, c de l'équation (E).

Composition de Mécanique rationnelle.

On donne une surface S dont l'équation, par rapport à trois axes rectangulaires ox, oy, oz est

$$z = e^{x+y},$$

e désignant la base des logarithmes népériens.

Un point matériel M dont on prend la masse pour unité est assujetti à se mouvoir sur la surface S ; il est en outre soumis à l'action de forces extérieures données.

La surface S tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour de la droite OA dont les équations, par rapport aux axes ox, oy, oz sont

$$x = y = z.$$

1° Former les équations différentielles qui définissent le mouvement relatif du point M sur la surface mobile S;

2° Calculer la réaction N de cette surface;

3° Étudier ce mouvement relatif en supposant le point M attiré vers le point O par une force F proportionnelle à la distance MO, et vers le plan P mené par le point O perpendiculairement à la droite OA, par une force F_1 proportionnelle à la distance Mm du point M à ce plan P.

Les intensités des forces F et F_1, à l'unité de distance, ont respectivement pour valeur ω^2 et $3\omega^2$.

A l'origine du temps le mobile M se trouve au point ayant pour coordonnées

$$x = y = 0, \qquad z = 1;$$

de plus on a, au même instant,

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2\omega}{\sqrt{3}}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{2\omega}{\sqrt{3}}.$$

AGRÉGATION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL (CONCOURS DE 1889).

Algèbre et Trigonométrie.

1° Quelles sont la plus grande et la plus petite valeur que l'on puisse attribuer à l'un des côtés d'un triangle dont le périmètre est égal à 12^m et dont la surface mesure 6^{mq}?

2° Soient a, b, c les trois côtés d'un triangle : on désigne par a le plus grand côté et par c le plus petit, de sorte que l'on a $a > b > c$.

On demande entre quelles limites reste compris a, entre quelles limites restent compris b et aussi c, lorsque l'on considère tous les triangles dont le périmètre est égal à 12^m et dont la surface mesure 6^{mq}?

Nota. — La solution exigeant la résolution d'équations de degré supérieur au second, les candidats devront résoudre ces équations numériques, à 0,001 près, par approximations successives.

Géométrie descriptive.

Un tétraèdre ABCD a ses arêtes opposées égales deux à deux, savoir, en centimètres,

$$AB = CD = 9, \qquad AC = BD = 8, \qquad AD = BC = 7.$$

1° On demande de placer ce tétraèdre de manière que les arêtes AB et CD soient horizontales, AB au-dessus de CD, et que l'arête AC soit parallèle au plan vertical de projection, le tétraèdre tout entier étant en avant du plan vertical contenant AC; enfin le sommet A devra être à gauche et le sommet C à droite de l'épure. Trouver les centres et les rayons des sphères circonscrite, inscrite et exinscrite au tétraèdre; dire quelle est la figure formée par les centres et les sommets du tétraèdre.

2° Des sommets du tétraèdre on abaisse les perpendiculaires sur les faces opposées; ces quatre hauteurs sont sur un même hyperboloïde. On demande de représenter la portion de cet hyperboloïde, qui est intérieure au parallélépipède rectangle formé par les plans horizontaux qui contiennent les arêtes AB et CD, par les plans parallèles au plan vertical qui contiennent l'un l'arête AC, l'autre le sommet B, et par les plans de profil entre lesquels le tétraèdre est contenu.

Nota. — On espacera le plus possible les portions horizontale et verticale.

Mécanique.

L'arbre A d'une machine a $0^{m},25$ de rayon. Une poulie B, de $0^{m},10$ de rayon, est calée sur un axe qui est parallèle à l'arbre et qui a $0^{m},01$ de rayon. La tangente commune MN aux circonférences de l'arbre et de la poulie est horizontale.

1. Sur l'arbre et sur la poulie on place une barre MN, pesant 50^{kg}, et portant un poids P de 750^{kg}, lequel est suspendu au-dessous du centre de gravité de MN. Au point N de MN est fixé, par une de ses extrémités, un cordon dont l'autre extrémité est attachée à un dynamomètre.

Après avoir supprimé la liaison entre l'arbre et les différents appareils dont il commande le mouvement, on met la machine en marche. L'arbre fait alors 20 tours par minute; la verticale du centre de gravité de la barre MN est équidistante des axes de l'arbre et de la poulie; enfin le dynamomètre indique que la tension T du cordon, supposé horizontal, est égale à 200^{kg}. Quelle est, en chevaux, et à l'allure de 20 tours par minute, la force de la machine?

1° En supposant que l'axe de la poulie, préalablement calé, ne puisse pas tourner sur ses coussinets;

2° En supposant que l'axe de la poulie soit libre de tourner sur ses coussinets. Le coefficient de frottement de la barre sur la poulie est égal à $\frac{1}{2}$; celui de l'axe de la poulie sur ses coussinets est égal à $\frac{1}{5}$. On néglige le poids de la poulie.

2. On enlève la barre MN et l'on enroule sur l'arbre A une corde qui fait $2\frac{1}{2}$ tours sur la circonférence de cet arbre. L'une des extrémités de la corde est attachée à un point fixe du sol, l'autre extrémité porte un poids Q. Dans ces conditions, la machine fait 10 tours à la minute et sa force est de 3 chevaux. On demande quelle est la valeur du poids Q.

Le coefficient de frottement de la corde sur l'arbre est égal à $\frac{1}{5}$. On néglige le poids de la corde.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1889.

Mathématiques.

1. Déterminer un polynôme entier en x du septième degré $f(x)$, sachant que $f(x)+1$ est divisible par $(x-1)^4$ et $f(x)-1$ par $(x+1)^4$. Quel est le nombre des racines réelles de l'équation $f(x)=0$?

2. On considère dans un plan une parabole (P) et une ellipse (E), représentées respectivement par les deux équations

$$(P)\qquad y^2-8x=0,$$

$$(E)\qquad y^2+4x^2-4=0,$$

et un point M de coordonnées (α, β). On demande de trouver sur la parabole (P) un point Q tel que le pôle de la droite MQ par rapport à l'ellipse (E) soit situé sur la tangente en Q à la parabole.

Trouver le nombre des solutions réelles du problème suivant la position du point M dans le plan.

Physique.

1. Au milieu d'une enceinte entourée de glace fondante est placé un vase solide en laiton, entièrement clos, qui contient un certain poids d'eau privée d'air. Le vase et l'eau qu'il contient ayant été chauffés, on demande de décrire les différentes phases du refroidissement, et d'indiquer les particularités présentées par la vitesse de refroidissement suivant la quantité d'eau contenue dans le vase.

On admettra :

Que le rayonnement obéit à la loi de Newton;

Que la densité de la vapeur d'eau reste constante et égale à 0,622.

On négligera les variations du volume du vase ainsi que les variations du poids spécifique et de la chaleur spécifique de l'eau avec la température. On négligera aussi la différence des deux chaleurs spécifiques de la vapeur d'eau.

Données numériques générales :

Chaleur spécifique de la vapeur d'eau...	0,37 par gramme
Chaleur latente de vaporisation.........	606,5 t. 0,695 t.

Tension maximum de la vapeur d'eau en millimètres de mercure,

	ϖ.	$\frac{d\varpi}{dt}$.
à 80°........	355	14,4
100........	760	27,2
120........	1491	47,0

Application numérique. — Calculer les vitesses de refroidissement à 100° et à 120°, en prenant pour unité la vitesse de refroidissement à 80°, dans le cas suivant :

Poids du vase...............	1^{kg}
Chaleur spécifique du laiton..	0,086
Volume intérieur............	1^{lit}
Poids de l'eau contenue......	$0^{gr},5886$

2. Oculaires doubles.

Pour les figures, on supposera que l'objectif associé à l'oculaire est rigoureusement achromatique.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (1889).

Mathématiques (3h).

1. Dans un triangle ABC, on donne

$$A = 32456^{m},2, \qquad B = 75^{\circ}28'38'',4, \qquad C = 72^{\circ}13'11'',6.$$

Calculer la hauteur qui correspond au côté BC, et la longueur de la bissectrice de l'angle A.

2. On donne un triangle isoscèle ABC, un point P sur la base BC; menons parallèlement à BC une droite rencontrant AB en M et AC en N, de manière que le rapport $\frac{PM}{NP}$ soit égal à un nombre donné k. Discussion du problème. (On choisira comme données la longueur $AP = l$, les angles $BAP = \beta$, $CAP = \gamma$, et comme inconnue la longueur AM.)

On peut aussi déterminer la position de MN par une construction géométrique très simple et indépendante de la solution algébrique; donner encore cette solution géométrique de la question.

3. Étant données deux circonférences O et O′ et une tangente commune extérieure AB, on prolonge OO′ jusqu'en C et D, et l'on mène les droites CA et DB qui se coupent en M. Démontrer que l'angle AMB est droit, et que le point M est sur l'axe radical des deux cercles. Déduire de là une construction des tangentes communes extérieures à deux circonférences et examiner comment il convient de modifier cette construction pour obtenir les tangentes communes intérieures.

Géométrie descriptive ($2^h 30^m$).

On donne un plan $P\alpha P'$, dont les traces font avec la ligne de terre xy deux angles $P\alpha y$ et $P'\alpha y$ égaux chacun à 45°; sur la trace horizontale, un point A dont l'éloignement est 40^{mm}, et sur la trace verticale, un point B dont le côté est 62^{mm}. La droite AB est le côté d'un carré situé dans le plan $P\alpha P'$, à droite de AB; ce carré est la base d'un cube situé au-dessus du plan.

Construire l'intersection de ce cube avec le cylindre droit ayant pour trace verticale un cercle de 65^{mm} de rayon, situé au-dessus de la ligne de terre et tangent à cette ligne au point a', projection verticale du point A.

On représentera la partie du solide cubique comprise dans le cylindre.

CONCOURS POUR LES BOURSES DE LICENCE (PARIS, 1889).

1° Construire la courbe définie par l'équation

$$(1) \qquad y = \frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(x-1)^2}.$$

2° Si l'on coupe cette courbe par une parallèle à l'axe des x et si l'on désigne par a l'abscisse de l'un des points d'intersection, les abscisses des cinq autres points d'intersection seront

$$\frac{1}{a}, \quad 1 - a, \quad 1 - \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{1-a}, \quad \frac{a}{a-1}.$$

Distinguer, sur la figure, les points qui correspondent aux formules précédentes en supposant que a soit la plus grande des abscisses des points d'intersection.

3° La résolution de l'équation (1), où l'on regarde y comme un nombre donné et x comme l'inconnue, peut, de diverses manières, être ramenée à la résolution d'une équation du troisième degré et d'une équation du deuxième degré.

4° Lieu de la projection du point d'intersection des tangentes à la courbe (1), en des points dont les abscisses sont inverses l'une de l'autre, sur la droite qui joint ces deux points.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1889.

PREMIÈRE SESSION.

Géométrie analytique.

Soient Ox, Oy deux axes rectangulaires et une droite LL' parallèle à Oy dont l'équation est $x - a = 0$. On considère le faisceau des paraboles qui passent par le point O et qui ont la droite LL' pour directrice.

1° Trouver le lieu du foyer et le lieu du sommet de chacune de ces paraboles.

2° Par un point quelconque du plan xOy passent deux des paraboles considérées, réelles ou imaginaires; déterminer la région du plan dans laquelle doit être ce point pour que les deux paraboles soient réelles.

3° Étant données les coordonnées d'un point M du plan xOy, former l'équation qui a pour racines les coefficients angulaires des tangentes au point O aux deux paraboles du faisceau considéré qui passent par ce point M. En déduire l'équation de la ligne S sur laquelle doit se trouver le point M pour que les tangentes au point O aux deux paraboles du faisceau qui passent au point M soient rectangulaires.

4° Soit M un point situé sur la ligne S, et soit F, F' les foyers des deux paraboles du faisceau considéré qui passent par ce point, démontrer que, lorsque le point M se déplace sur la ligne S, la droite FF' tourne autour d'un point fixe.

Calcul trigonométrique.

On donne deux côtés b et c d'un triangle, ainsi que l'angle A qu'ils comprennent :

$$b = 87253,37,$$
$$c = 99467,95,$$
$$A = 39°9'19'',8.$$

On demande de calculer les angles B et C, le côté a, l'aire du triangle et le rayon du cercle circonscrit.

Épure.

Intersection d'un cône et d'un cylindre.

Placer la ligne de terre parallèlement aux grands côtés du cadre, à 171^{mm} du grand côté supérieur.

Le sommet (SS') du cône est à 81^{mm} au-dessus du plan horizontal et à 12^{mm} en avant du plan vertical : la ligne de rappel SS' est à 93^{mm} à partir du côté droit du cadre.

Ce cône est circonscrit à une sphère dont le centre (OO') est à 81^{mm} au-dessus du plan horizontal et à 39^{mm} en avant du plan vertical; la ligne de rappel OO' est à 147^{mm} à partir du côté droit du cadre et la sphère est tangente au plan de front qui passe par le sommet du cône. On ne considère que la nappe du cône qui s'étend du sommet vers le côté gauche du cadre.

Le cylindre est de révolution, et son axe, parallèle à la ligne de terre, est à 54^{mm} au-dessus du plan horizontal et à 48^{mm} en avant du plan vertical; ce cylindre passe par le sommet du cône.

On demande de représenter par ses deux projections le cylindre supposé plein et limité, d'une part au plan de profil ss', d'autre part au côté gauche du cadre, en supprimant la partie de ce corps comprise dans le cône.

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour déterminer :

1° Un point quelconque de l'intersection des deux surfaces et la tangente en ce point;

2° Les points de l'intersection situés sur les contours apparents des deux surfaces;

3° La tangente en (ss') à l'intersection;

4° L'asymptote de l'intersection :

Titre extérieur : intersection de surfaces.
Titre intérieur : cylindre troué par un cône.

Physique.

1° Deux arcs pareils, de forme quelconque AB, BC, forment une voûte symétrique en s'articulant aux points A, B, C, qui servent d'axe de rotation.

La distance AB reste invariablement égale à 116^m; le point C est à 45^m de l'horizontale AB.

Calculer la variation de niveau du point C lorsque la température s'élève de $45°$, et la comparer à la variation de longueur d'une tige de fer de 45^m de longueur?

Coefficient de dilatation du fer : $k = 0{,}0000118$.

2° Établir (sans la discuter) la formule élémentaire des miroirs sphériques concaves.

Chimie.

1° On met dans un eudiomètre à mercure 50^{cc} d'un gaz sulfuré avec 100^{cc} d'oxygène sec.

On enflamme, il se dépose de l'eau sur les parois de l'eudiomètre et il reste un résidu de 75^{cc}.

Dans ce résidu on place un bâton de phosphore qui absorbe 25^{cc} d'oxygène.

Les 50^{cc} qui forment le résidu final sont constitués par un gaz soluble dans l'eau, éteignant les corps en combustion, absorbable par le permanganate de potasse, qui est alors décoloré.

On demande de déduire de ces expériences la *formule* du gaz primitif.

2° *Du cyanogène.* — Sa préparation, ses propriétés; les relations qui existent entre le cyanogène, ses composés, et les sels ammoniacaux.

SECONDE SESSION.

Géométrie descriptive.

Intersection d'un tore et d'un cône.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à 180^{mm} du petit côté supérieur.

L'axe du tore est vertical et se projette en O à égale distance des grands côtés du cadre et à 145^{mm} en avant de la ligne de terre.

Le centre du tore est à 50^{mm} au-dessus du plan horizontal.

Le centre du cercle générateur du tore est à 85^{mm} de l'axe et le rayon de ce cercle est de 45^{m}.

Le sommet du cône est sur l'axe du tore à 135^{mm} au-dessus du plan horizontal. La directrice du cône est la section faite dans le tore par un plan perpendiculaire à la ligne de terre et situé à droite de l'axe à une distance de cet axe égale à 85^{mm}.

On demande de représenter par ses deux projections le tore supposé plein, en supprimant la portion de ce corps comprise à l'intérieur du cône.

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour déterminer un point quelconque de l'intersection des deux surfaces et la tangente en ce point.

Titre extérieur : Intersection de surfaces.
Titre intérieur : Tore troué par un cône.

Géométrie analytique.

1. Démontrer que les coniques représentées par l'équation

$$(A) \qquad (1-m^2)x^2+y^2+2mrx-r^2=0,$$

où l'on suppose m variable, ont deux points communs et que, si les axes de coordonnées sont rectangulaires, elles ont en outre un foyer commun.

2. Trouver l'équation (B) de la conique assujettie aux conditions suivantes : passer par l'origine, être tangente à une des coniques représentées par (A) en un point $P(x', y')$ pris sur cette courbe, et enfin passer par les deux projections du point P sur les axes de coordonnées.

3. Trouver le lieu des points de contact, avec les courbes représentées par (A), des tangentes issues d'un point

$$x=0, \qquad y=h$$

de l'axe des y lorsqu'on fait varier m.

4. Trouver le lieu des centres des courbes (B) correspondant à une courbe fixe (A) quand on fait varier la position du point P sur cette courbe.

3. Discuter l'équation (B) en supposant que l'on déplace le point P sur une des courbes représentées par l'équation (A); séparer les parties qui répondent à des ellipses de celles qui répondent à des hyperboles, et trouver le lieu des points de séparation lorsque l'on fait varier m.

Calcul trigonométrique.

On donne deux côtés a, b d'un triangle et l'angle compris c,

$$a = 34543,74,$$
$$b = 25674,67,$$
$$c = 121^\circ 43' 55'' 7.$$

Calculer les deux autres angles, le troisième côté, la surface et le rayon du cercle inscrit.

Physique.

1. On veut construire un thermomètre centigrade à mercure dont l'échelle comporte 300° C.

On emploie, comme tige, un tube capillaire déjà divisé en 360 parties d'égale capacité et l'on sait qu'une colonne de mercure à 0° occupant 25 divisions du tube pèse $1^{gr},2$.

On demande quel doit être le volume intérieur du réservoir qu'il faut souder sur la tige, pour que les 360 divisions déjà tracées sur le tube correspondent à 300° C. de l'échelle.

On donne le coefficient de la dilatation apparente du mercure dans le verre $\gamma = \frac{1}{6480}$ et la densité du mercure $\Delta = 13,596$.

2. Énoncer et vérifier expérimentalement les lois de la réfraction simple.

Chimie.

1. Transformations allotropiques, combinaisons, décompositions produites par l'action des étincelles et des effluves électriques.

2. Un courant d'un ampère décompose $0^{mq},09316$ d'eau à la seconde.

Quel sera le nombre de centimètres cubes de gaz, mesurés à la température de 0° et sous la pression de 760^{mm} de mercure, dégagés par un courant d'un ampère pendant une minute ?

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1889.

Mathématiques élémentaires.

Soient a et b ($a \geqq b$) les rayons de deux cercles situés dans un même plan, et soit d la distance des centres A et B de ces cercles.

On fait mouvoir une portion de droite PQ, de longueur l, de façon que l'extrémité P reste sur la circonférence du cercle de rayon a et que l'extrémité Q reste sur la circonférence du cercle de rayon b. Soient, pour une position de la droite PQ, α l'angle PAB et β l'angle QBX, BX étant le prolongement de AB au delà de B dans le sens AB.

Former l'équation qui lie les angles variables de α et β à a, b, d, l, et déduire de cette équation les limites entre lesquelles peut varier chacun des angles α et β.

Discuter le problème et trouver, réduites au plus petit nombre possible, les conditions que doivent remplir les données :

1° Pour que chacun des points P et Q puisse parcourir toute la circonférence sur laquelle il se meut;

2° Pour que l'un de ces deux points, seul, puisse parcourir toute la circonférence sur laquelle il se meut;

3° Pour que chacun des deux points ne puisse parcourir qu'une portion de circonférence;

4° Pour qu'une droite, de longueur l, ne puisse être placée de façon à avoir une extrémité sur chacune des circonférences données.

Philosophie.

1. Construire un triangle ABC, connaissant les longueurs b et c des côtés AC, AB, et la longueur l de la partie de la droite BC qui est comprise entre les bissectrices des angles formés par les droites AB et AC.

Les longueurs b et c étant supposées invariables, et la première étant supposée supérieure à la seconde, entre quelles limites doit être comprise la longueur l pour que le problème soit possible?

2. On donne deux droites RR', SS' non situées dans un même plan, et l'on mène le plan P parallèle à ces deux droites et équidistant de l'une et de l'autre. Trouver le lieu des centres de toutes les sphères tangentes à la fois aux deux droites données et ayant leurs cercles dans le plan P.

Enseignement secondaire spécial.

La droite Az est l'axe d'une parabole inconnue dont le sommet est A; deux points M et M' de cette courbe se projettent sur Az aux points donnés N et N'; on a

$$AN = a, \qquad AN' = a' :$$

1° Construire le point P où la corde MM' rencontre Az; réciproquement, construire le sommet A connaissant N, N' et P.

2° On considère en particulier la parabole du sommet A qui admet pour normale en M la corde inconnue MM'; on lui mène, par le point M, une autre normale; soit R le point d'incidence. Calculer la distance du sommet A à la projection S de R sur Az; discuter.

3° Prouver que, si MR et MR' sont deux normales aux points R et R', issues du point M de la courbe, le système pesant, formé par la parabole et par des poids égaux appliqués en M, R, R', et supposé mobile autour de Az, droite horizontale et fixe, est en équilibre indifférent.

NOUVELLES REMARQUES SUR DIVERS ARTICLES CONCERNANT LA THÉORIE DES SÉRIES ([1]);

PAR M. E. CESARO.

1. Dans mes précédentes remarques ([2]), je me suis occupé de la *série de Lerch*

$$(1) \qquad \sum_1^\infty q^{n-(\log n)} x^{\frac{1}{2}(\log n)[(\log n)+1]},$$

convergente pour $0 < q < 1 < x$, bien que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ surpasse toute limite lorsque n parcourt une succession convenable de valeurs entières. Ces valeurs sont *infiniment rares* parmi les nombres entiers, ce qui n'a pas lieu pour d'autres séries de Lerch, et, à ce point de vue, on peut dire que la série (1) est *moins* remarquable que les autres, car *on doit être d'autant moins surpris de la convergence d'une série que les symptômes de divergence s'y manifestent plus rarement*. M. Auguste Gutzmer affirme, au contraire, que la série (1) est la *plus* remarquable de toutes, *parce que les termes où le quotient* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *cesse d'être inférieur à l'unité deviennent par degrés plus rares* ([3]) !

2. Il est vrai que M. Gutzmer, dans un article récent ([4]), explique mieux son argumentation en faveur de la série (1); mais je n'ai pas à m'occuper de ces rai-

---

([1]) Cet article nous a été envoyé en avril 1889.

([2]) *Nouvelles Annales*, 1888, p. 401.

([3]) *Journal de Teixeira*, 1887, p. 36.

([4]) *Nouvelles Annales*, 1889, p. 26.

sons *nouvelles*, mon intention n'ayant jamais été, évidemment, de donner la mesure de l'intérêt plus ou moins grand qu'on peut attacher à la série (1), que je trouve du reste fort intéressante, mais seulement de faire observer que, si la série en question pouvait être appelée *peu remarquable,* elle le serait justement pour la raison que M. Gutzmer invoque dans un but contraire.

3. Il est encore vrai que, si le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ peut, dans la série (1), surpasser toute limite, il ne devient pas, par compensation, arbitrairement petit pour d'autres valeurs de n, comme dans les séries que j'ai proposées. Mais cela tient à ce que la *compensation,* dans la série de Lerch, se fait par une autre voie : elle consiste précisément dans la rareté des valeurs de n, qui rendent le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ supérieur à tout nombre. C'est là un fait général, qu'on pourrait démontrer avec rigueur, mais dont on se rend compte immédiatement comme il suit. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers λ ou vers μ, suivant que n parcourt une succession de fréquence ϖ ou la succession complémentaire, $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers $\lambda^{\varpi}\mu^{1-\varpi}$. Si λ est infini, cette limite ne peut être finie, à moins que $\varpi = 0$ ou $\mu = 0$. La série (1) est dans le premier cas, les autres dans le second.

4. En poursuivant les recherches initiées par M. Lerch, j'ai pu construire des séries *convergentes,* telles que, en excluant certaines valeurs de n, *infiniment rares* parmi les nombres entiers, *le rapport* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *se maintient supérieur à un nombre plus grand que*

l'unité. Voici un exemple fort simple. La série

$$q_1 + q_1^2 + q_2^3 + q_1^4 + q_2^5 + q_3^6 + q_1^7 + \ldots,$$

où

$$q_n = q^{1+\frac{4}{n}}, \qquad (0 < q < 1),$$

est convergente, parce que ses termes sont positifs et inférieurs aux termes correspondants de la série convergente $q + q^2 + q^3 + \ldots$. Si n est un nombre triangulaire,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq \frac{q_1^{n+1}}{q_2^n}, \qquad \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

Dans le cas contraire, soit ν le plus grand nombre triangulaire inférieur à n. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{q_n^{n-\nu}}{q_{n+1}^{n-\nu+1}} = q^{1-\frac{4\nu}{(n-\nu)(n-\nu+1)}};$$

puis, en observant que $(n - \nu)(n - \nu + 1)$ ne surpasse pas 2ν,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{1}{q} > 1.$$

C'est ce qu'il fallait montrer.

5. Quant au *théorème de Weyr*, je ne puis croire que le dernier article de M. Gutzmer tende à lui ôter une partie de l'intérêt qu'il mérite; car c'est M. Gutzmer lui-même qui a posé la question en ces termes : *Il serait très intéressant d'avoir une série convergente à termes positifs, telle que, pour un nombre infini de valeurs de n le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ surpasse l'unité, et que cette propriété ne se perde pas par une transformation quelconque* (1). M. Édouard Weyr a immédiatement ré-

(1) *Journal de Teixeira*, 1887, janvier-février.

pondu ([1]) que de telles séries ne peuvent exister, et l'on appréciera d'autant mieux ce petit résultat lorsqu'on saura que, malgré l'extrême facilité qu'il y avait de l'obtenir, les efforts des géomètres cités par M. Gutzmer et connus de tout le monde sont restés longtemps infructueux. Il suffit de dire que M. Gutzmer n'était pas même parvenu à démontrer le théorème de Weyr pour la seule série (1), car il avait eu besoin de s'imposer la restriction *inutile* $q\sqrt{x} < 1$. Il était pourtant facile de s'en passer.

6. Je me suis occupé, à plusieurs reprises, du théorème de convergence, relatif à la limite de nu_n. Il n'y a rien de plus simple, pour établir ce théorème indépendamment de la considération de séries particulières, que d'écrire, en appliquant un théorème de Cauchy,

$$\lim \frac{n\,S_n}{n} - \lim[n\,S_n - (n-1)\,S_{n-1}] = \lim(nu_n + S_{n-1}).$$

Si la série est convergente, le premier membre est la somme S de la série. Si la limite λ de nu_n existe, le dernier membre est $\lambda + S$, donc $\lambda = 0$. Il est regrettable que le *théorème de Cauchy*, auquel je fais allusion ici, ne figure pas dans la plupart des Traités, alors qu'il devrait y jouer un rôle prépondérant. Il constitue une féconde règle de calcul : c'est la *règle de L'Hospital* pour les fonctions de variable entière. En l'introduisant dans mon *Cours* j'ai pu obtenir de remarquables simplifications dans diverses théories d'Analyse algébrique.

7. On pourrait imiter la démonstration précédente

([1]) *Loc. cit.*, 1887, mars-avril.

pour le théorème plus général, relatif à la limite de $a_n u_n$, la fonction positive a_n étant choisie de manière que la série

$$(2) \qquad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots$$

soit divergente. Dans ce cas la fonction

$$p_n = \left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\left(1 + \frac{1}{a_2}\right)\left(1 + \frac{1}{a_3}\right)\cdots$$

croît indéfiniment avec n, et le théorème de Cauchy donne

$$\lim \frac{p_n S_n}{p_n} = \lim \frac{p_n S_n - p_{n-1} S_{n-1}}{p_n - p_{n-1}} = \lim \left(S_n + \frac{p_{n-1} u_n}{p_n - p_{n-1}}\right),$$

c'est-à-dire

$$S = \lim(S_n + a_n u_n) = S + \lambda,$$

d'où $\lambda = 0$. Mais cette démonstration n'a pas de raison d'être, du moment qu'on suppose connue la divergence de la série (2).

8. Soit σ_n la somme des n premiers termes de la série (2). C'est encore le théorème de Cauchy qui permet de constater rapidement la divergence de

$$(3) \qquad \frac{1}{a_1 \sigma_1} + \frac{1}{a_2 \sigma_2} + \frac{1}{a_3 \sigma_3} + \ldots,$$

établie la première fois par Abel, au moyen du principe général de convergence. Si τ_n est la somme des n premiers termes de la série (3), on a

$$\lim \frac{\tau_n}{\log \sigma_n} = \lim \frac{1}{a_n \sigma_n \log \frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}}} = \frac{1}{\lim \log \left(1 - \frac{1}{a_n \sigma_n}\right)^{-a_n \sigma_n}};$$

d'où, en observant que $a_n \sigma_n$ croît indéfiniment avec n,

$$\lim \frac{\tau_n}{\log \sigma_n} = 1.$$

Donc τ_n croît sans limite, comme le logarithme de σ_n.

9. Si les termes de (2) vont en décroissant, on peut écrire

$$\frac{1}{a_{n+1}\sigma_{n+1}} < \log\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} < \frac{1}{a_n \sigma_n},$$

et, par suite, la série

$$\frac{1}{a_1\sigma_1} - \log\frac{\sigma_2}{\sigma_1} + \frac{1}{a_2\sigma_2} - \log\frac{\sigma_3}{\sigma_2} + \frac{1}{a_3\sigma_3} - \ldots$$

est convergente. Soit C sa somme. On trouve sans peine

$$(4) \qquad \lim(\tau_n - \log\sigma_n) = C.$$

Lorsque $a_n = 1$, C est la *constante d'Euler*. Pour $a_n = n$, $n \log n$, ..., on obtient une infinité d'autres constantes, qui ont été considérées par M. F. Giudice [1].

10. Si les carrés des termes de la série (3) forment une série convergente, l'égalité (4) permet de définir une fonction analogue à la fonction Γ, comme il suit :

$$G(1+x) = \lim \frac{\sigma_n^x}{\left(1+\frac{x}{a_1\sigma_1}\right)\left(1+\frac{x}{a_2\sigma_2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{a_n\sigma_n}\right)}.$$

Elle permet ensuite de mettre $\frac{1}{G(1+x)}$ sous la forme caractéristique des fonctions holomorphes du premier

---

[1] *Journal de Battaglini*, 1889.

genre

$$\frac{1}{G(1+x)} = e^{Cx} \prod_{1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{a_n \sigma_n}\right) e^{-\frac{x}{a_n \sigma_n}} \right].$$

En particulier, pour $a_n = 1$, on retrouve la *formule de Weierstrass,* relative à la fonction Γ.

11. Supposons que, à partir d'une certaine valeur de n, on ait constamment

$$(5) \qquad \left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right) \sigma_n < 1.$$

Si v_n est le terme général de la série (3), on a identiquement

$$\left(a_n \frac{v_n}{v_{n+1}} - a_{n+1}\right) \sigma_n = 1,$$

et, par suite, l'inégalité (5) devient

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Donc la série $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ est *plus divergente* que la série (3). On voit, par exemple, pour $a_n = n$, que, dans une série convergente à termes positifs, l'expression

$$\left[n \frac{u_n}{u_{n+1}} - (n+1)\right] \log n$$

ne peut finir par être constamment inférieure à l'unité, et, par suite, l'expression

$$n \left[n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right]$$

doit croître à l'infini avec n. C'est le *théorème de Cahen* ([1]).

([1]) *Nouvelles Annales*, novembre 1886.

12. Si, au contraire, l'expression considérée finit par surpasser quelque nombre $1+k$, supérieur à l'unité, on peut toujours construire une série *moins convergente* que la série proposée. Soit

$$w_n = \frac{v_n}{(1+kv_1)(1+kv_2)\ldots(1+kv_n)}.$$

On a identiquement

$$a_n \frac{w_n}{w_{n+1}} - a_{n+1} = a_n \frac{v_n}{v_{n+1}} - a_{n+1} + ka_n v_n = \frac{1+h}{\sigma_n}.$$

Conséquemment l'inégalité

$$\left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right)\sigma_n > 1+k \tag{6}$$

revient à celle-ci :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{w_{n+1}}{w_n}.$$

Il reste donc à prouver que la série $w_1+w_2+w_3+\ldots$ est convergente. Cela résulte immédiatement de l'identité

$$k(w_1+w_2+\ldots+w_n) = 1 - \frac{1}{(1+kv_1)(1+kv_2)\ldots(1+kv_n)}.$$

Si k est positif, l'expression

$$(1+kv_1)(1+kv_2)\ldots(1+kv_n) > 1+k(v_1+v_2+\ldots+v_n)$$

surpasse toute limite, lorsque n croît à l'infini. Conséquemment

$$\lim(w_1+w_2+\ldots+w_n) = \frac{1}{k}.$$

13. Les moyens de démonstration employés dans les remarques précédentes servent seulement à mettre en évidence la possibilité de construire une série moins divergente ou moins convergente que la série proposée.

Mais le *théorème de Kummer* suffit à tout. Lorsqu'on remplace, dans l'expression considérée par ce théorème, la fonction a_n par $a_n\sigma$, on peut écrire

$$a_n \sigma_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\sigma_{n+1} = \left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right)\sigma_n = 1,$$

et l'on voit que la série $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ est divergente ou convergente, suivant qu'on finit par avoir l'une ou l'autre des inégalités (5), (6), respectivement. On appliquera habituellement ce théorème en cherchant d'abord la limite de l'expression

$$\left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right)\sigma_n,$$

puis, si on la trouve égale à l'unité, celle des expressions

$$\left[\left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right)\sigma_n - 1\right]\log\sigma_n,$$

$$\left\{\left[\left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right)\sigma_n - 1\right]\log\sigma_n - 1\right\}\log\log\sigma_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

successivement. A la première limite qu'on trouvera différente de 1, on saura que la série $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ est convergente ou divergente, suivant que la limite trouvée est supérieure ou inférieure à l'unité. L'introduction des fonctions $\log\sigma_n$, $\log\log\sigma_n$, ... est justifiée par une remarque précédente.

14. Le théorème de Cauchy permet d'étudier aisément les relations qui existent entre les tendances de $a_n u_n$ et de l'expression envisagée par le théorème de Kummer. Si la série $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ est divergente, on a

$$(7)\qquad \begin{cases} \lim \dfrac{a_n u_n}{S_n} = \lim \dfrac{a_{n+1} u_{n+1} - a_n u_n}{u_{n+1}} \\ \qquad\qquad = -\lim \left(a_n \dfrac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right). \end{cases}$$

Si $a_n u_n$ admet une limite différente de zéro, ce qui permet d'affirmer immédiatement la divergence de la série, le théorème de Kummer ne dit rien, parce que, d'après (7), la limite considérée par ce théorème est nulle, si elle existe. Si cette limite existe pour une série convergente, et qu'elle soit $\lambda > 0$, prenons $0 < k < \lambda$. Il existe aussi un nombre ν, tel que, pour $n > \nu$,

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} > k,$$

c'est-à-dire

$$k_n a_n u_n < k_\nu a_\nu u_\nu,$$

où

$$k_n = \left(1 + \frac{k}{a_1}\right)\left(1 + \frac{k}{a_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{k}{a_n}\right).$$

Si l'on observe que, d'après le théorème de Cauchy, on a

$$\lim \frac{\sigma_n}{k_n} = \frac{1}{k} \lim \frac{1}{k_n} = 0,$$

on voit que $a_n \sigma_n u_n$ tend nécessairement vers zéro.

15. Dans les mêmes conditions où l'on a pu définir la fonction G, on peut dire que, pour n croissant à l'infini, l'expression

$$\frac{\sigma_n^h}{\left(1 + \frac{x}{a_1 \sigma_1}\right)\left(1 + \frac{x}{a_2 \sigma_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{x}{a_n \sigma_n}\right)}$$

tend vers zéro ou surpasse toute limite suivant que $h < x$ ou $h > x$. Cela étant, supposons que l'on ait trouvé

$$\lim \left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right) \sigma_n = \lambda. \tag{8}$$

Si $\lambda > 1$, la série est convergente, et l'on pourra fixer deux nombres $1 + \alpha$, $1 + \beta$, supérieurs à l'unité et comprenant entre eux le nombre λ. Dès lors on aura, pour n surpassant un certain nombre ν,

$$\alpha < a_n \sigma_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\sigma_{n+1} < \beta.$$

Donc, A et B étant deux nombres indépendants de n,

$$a_n \sigma_n^r u_n < \frac{A\sigma_n^{r-1}}{\left(1+\frac{\alpha}{a_1\sigma_1}\right)\left(1+\frac{\alpha}{a_2\sigma_2}\right)\cdots\left(1+\frac{\alpha}{a_n\sigma_n}\right)},$$

$$a_n \sigma_n^r u_n > \frac{B\sigma_n^{r-1}}{\left(1+\frac{\beta}{a_1\sigma_1}\right)\left(1+\frac{\beta}{a_2\sigma_2}\right)\cdots\left(1+\frac{\beta}{a_n\sigma_n}\right)}.$$

Il en résulte

$$\lim a_n \sigma_n^r u_n = 0,$$

si $r < 1 + \alpha < \lambda$, et

$$\lim a_n \sigma_n^r u_n = \infty,$$

si $r > 1 + \beta > \lambda$. Ainsi, lorsqu'on a pu constater la convergence de la série $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ au moyen de (8), non seulement $a_n u_n$ tend vers zéro, mais encore le produit de cette fonction par toute puissance de σ_n, dont l'exposant, inférieur à λ, est aussi voisin de λ qu'on veut. Par exemple, si λ est la limite considérée par la règle de Raabe et Duhamel, on a $\lim n^r u_n = 0$ pour $r < \lambda$. Lorsque $\lambda = 1$, on cherche

$$\lim \left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right]\log n = \mu.$$

Si $\mu > 1$, la série est convergente, et l'on a

$$\lim n(\log n)^r u_n = 0$$

pour $r < \mu$, ...

16. Il serait très intéressant de pouvoir assigner quelque condition *suffisante* pour l'existence de la

limite de

$$\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n), \tag{9}$$

pour n infini. On connaît une condition : c'est l'existence de la limite de a_n ; mais il faudrait la remplacer par une condition plus générale, pouvant servir dans les cas où a_n n'a pas de limite. J'ai cherché en vain une telle condition en la restreignant même aux fonctions a_n finies. Les n premiers nombres de la succession a_1, a_2, a_3, ... étant représentés sur une droite, le nombre (9) est représenté par leur centre de gravité, qui se déplace, lors de l'adjonction de a_{n+1} aux nombres précédents, vers la droite ou vers la gauche suivant que

$$a_{n+1} - \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)$$

est positif ou négatif. Ce déplacement tend vers zéro lorsque n croît. Toute oscillation de (9), qui s'effectue constamment dans un sens déterminé, tend aussi vers zéro, si

$$\lim \frac{p_n}{n} = 0, \tag{10}$$

p_n étant le nombre de termes consécutifs de la succession

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1, \quad a_2 - a_1, \quad a_3 - \frac{1}{2}(a_1 + a_2), \\ \quad a_4 - \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3), \quad \ldots, \end{array} \right. \tag{11}$$

qui ont même signe que le premier d'entre eux, $n^{\text{ième}}$ de la suite.

On conçoit par là qu'en introduisant d'autres conditions simples, on pourrait en constituer, avec (10), un système suffisant pour l'existence de la limite de (9).

Mais il est de la dernière évidence que la condition (10) ne saurait suffire à elle seule pour affirmer, d'une manière générale, l'existence dont il s'agit. Il peut se faire, en effet, que par une infinité d'oscillations dans les deux sens le nombre (9) parvienne, quelque grand que soit n, à se déplacer d'un intervalle fini. Appelons $b_1, b_2, b_3, \ldots$ les termes de (11). On trouve sans peine

$$a_n = b_1 + \frac{1}{2}\,b_2 + \frac{1}{3}\,b_3 + \ldots + \frac{1}{n-1}\,b_{n-1} + b_n,$$

et l'on voit que la convergence de la série

$$(12) \qquad b_1 + \frac{1}{2}\,b_2 + \frac{1}{3}\,b_3 + \ldots$$

est suffisante et nécessaire pour l'existence de la limite (9).

En conséquence, afin de construire une fonction a_n, telle que la limite de (9) n'existe pas, bien que la condition (10) soit remplie, nous tâcherons de construire une série (12) indéterminée. Considérons d'abord la série

$$(14) \quad 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} - \ldots.$$

Si n est une puissance de 2, la somme des n termes qui suivent le $n^{\text{ième}}$ tend, pour n croissant à l'infini, vers $\log 2$. Donc la série (13) n'est pas convergente. Elle n'est pas divergente; car on trouve, par un calcul élémentaire, que la somme de ses n premiers termes est comprise entre $-\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3} + \log 2$. Donc la série (13) est indéterminée; mais elle ne remplit pas la condition (10). En effet, $p_n = n$, si n est une puissance de 2. Ajoutons aux termes de (13) les termes correspondants de la série $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$, multipliés par des nombres supérieurs à l'unité. Il vient une série indéterminée, à termes alternativement positifs et négatifs. C'est une des séries (12) cherchées; car, à cause de $p_n = 1$, la condition (10) est remplie. Voici une de ces séries :

$$2 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{6} + \frac{2}{7} - \frac{2}{8} + \frac{1}{9} - \frac{2}{10} + \ldots.$$

La somme des n premiers termes est toujours comprise entre 0,87 et 1,72. C'est pourquoi la fonction correspondante a_n est finie.

17. La question posée en dernier lieu permettrait de résoudre plusieurs questions d'arithmétique asymptotique, que j'ai traitées autrefois par des méthodes peu rigoureuses. Ainsi, $\lambda(n)$ étant la *fonction de Liouville*, égale à $+1$ ou à -1, suivant que n est composé d'un nombre pair ou d'un nombre impair de facteurs premiers, égaux ou inégaux, il importerait de savoir si la limite de

$$(14) \qquad \frac{1}{n}[\lambda(1) + \lambda(2) + \lambda(3) + \ldots + \lambda(n)]$$

existe. Fixons q de manière que $\lambda(q) = -\lambda(n)$. Évidemment $\frac{n}{q}$ ne peut être un carré parfait. Soit α^2 le plus petit carré surpassant $\frac{n}{q}$. On a

$$\lambda(q\alpha^2) = \lambda(q) = -\lambda(n).$$

D'autre part, le signe de

$$\lambda(n+1) - \frac{1}{n}[\lambda(1) + \lambda(2) + \ldots + \lambda(n)]$$

étant le même que celui de $\lambda(n+1)$, la fonction p_n est définie par les conditions

$$\lambda(n) = \lambda(n+1) = \ldots = \lambda(n + p_n - 1) = -\lambda(n + p_n).$$

Or il est clair que $q\alpha^2$, supérieur à n, ne peut être inférieur à $n + p_n$. Donc

$$p_n \leqq q\alpha^2 - n < q\left(1 + \sqrt{\frac{n}{q}}\right)^2 - n;$$

puis

$$\lim \frac{p_n}{n} \leqq \lim \left(\frac{q}{n} + 2\sqrt{\frac{q}{n}}\right) = 0.$$

La condition (10) est remplie; mais on a vu que cela ne suffit pas pour affirmer l'existence de la limite du nombre (14). Cependant tout porte à croire que cette limite existe et que sa valeur est zéro.

NOUVELLE MÉTHODE DE DISCUSSION DE L'ÉQUATION EN S;

PAR M. CH. BRISSE.

Considérons les deux fonctions à coefficients réels

$$\varphi = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy,$$
$$\sigma = x^2 + y^2 + z^2,$$

et cherchons pour quelles valeurs du paramètre S l'expression

$$(1) \qquad \varphi - S\sigma$$

se réduit à une somme de moins de trois carrés. On sait qu'il est nécessaire et suffisant que S soit l'une des racines de l'équation du troisième degré

$$(2) \qquad \Delta(S) = \begin{vmatrix} A - S & B'' & B' \\ B'' & A' - S & B \\ B' & B & A'' - S \end{vmatrix} = 0,$$

dite *équation en* S.

Propriétés de l'équation en S.

1° *L'équation en* S *a ses racines réelles.*

Soit, en effet, $(P + Qi)^2 + (U + Vi)^2$ la somme à laquelle $\varphi - S\sigma$ est réductible, P, Q, U, V étant des fonctions linéaires à coefficients réels. En substituant dans l'identité

$$\varphi - S\sigma = (P + Qi)^2 + (U + Vi)^2$$

un système de solutions réelles des équations $Q = 0$, $V = 0$, autre que $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, on a une équation à coefficients réels qui fournit une valeur réelle de S, puisque σ n'est pas nul.

2° *Une racine de l'équation en* S, *pour laquelle l'expression* $\varphi - S\sigma$ *se réduit à une somme de deux carrés distincts, est simple.*

Car elle n'annule pas la dérivée

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{l} -(A' - S)(A'' - S) - (A'' - S)(A - S) \\ \quad -(A - S)(A' - S) + B^2 + B'^2 + B''^2 \end{array} \right.$$

du premier membre de l'équation (2).

L'identité

$$(4)\quad \varphi - S\sigma = \varepsilon(ax + by + cz)^2 + \varepsilon'(a'x + b'y + c'z)^2,$$

où ε et ε' désignent les nombres $+1$, -1, 0, donne en effet

$$A - S = \varepsilon a^2 + \varepsilon' a'^2,$$
$$A' - S = \varepsilon b^2 + \varepsilon' b'^2,$$
$$A'' - S = \varepsilon c^2 + \varepsilon' c'^2,$$

$$B = \varepsilon bc + \varepsilon' b'c', \qquad B' = \varepsilon ca + \varepsilon' c'a', \qquad B = \varepsilon ab + \varepsilon' ab',$$

et, en substituant ces valeurs dans l'expression (3), on trouve, d'après l'identité de Lagrange,

$$(5)\quad -\varepsilon\varepsilon'[(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2],$$

résultat différent de zéro, puisque les fonctions

$$ax + by + cz, \qquad a'x + b'y + c'z$$

sont distinctes.

3° *Une racine de l'équation en* S, *pour laquelle l'expression* $\varphi - S\sigma$ *se réduit à un seul carré, est double.*

Car, ε' étant nul, l'expression (5) est nulle. Cette racine annule donc la dérivée première de $\Delta(S)$, mais elle n'annule pas la dérivée seconde

$$2(A - S) + 2(A' - S) + 2(A'' - S),$$

car elle la réduit à

$$2\varepsilon(a^2 + b^2 + c^2). \tag{6}$$

4° *Une racine de l'équation en* S, *pour laquelle l'expression* $\varphi - S\sigma$ *est identiquement nulle, est triple.*

Car, ε et ε' étant nuls, les expressions (5) et (6) sont nulles. Cette racine annule donc la dérivée première et la dérivée seconde de $\Delta(S)$.

De là résulte que réciproquement :

5° *Une racine simple de l'équation en* S *réduit* $\varphi - S\sigma$ *à deux carrés distincts ;*

6° *Une racine double de l'équation en* S *réduit* $\varphi - S\sigma$ *à un seul carré ;*

7° *Une racine triple de l'équation en* S *réduit* $\varphi - S\sigma$ *à zéro ;*

et, d'après les propriétés des formes quadratiques, que :

8° *Une racine simple de l'équation en* S *n'annule pas tous les mineurs du second ordre du déterminant* $\Delta(S)$, *et réciproquement ;*

9° *Une racine double de l'équation en S annule tous les mineurs du second ordre et n'annule pas tous ceux du premier ordre du déterminant $\Delta(S)$, et réciproquement ;*

10° *Une racine triple de l'équation en S annule tous les mineurs du premier ordre du déterminant $\Delta(S)$, et réciproquement.*

CONSÉQUENCES.

Deux racines différentes de l'équation en S donnent, pour $\varphi - S\sigma$, deux décompositions d'espèces différentes.

Car si deux racines distinctes S et S' donnaient deux décompositions de même espèce

$$\varphi - S(x^2+y^2+z^2) = \varepsilon P^2 + \varepsilon' Q^2,$$
$$\varphi - S'(x^2+y^2+z^2) = \varepsilon P'^2 + \varepsilon' Q'^2,$$

on en déduirait

$$(S'-S)(x^2+y^2+z^2) = \varepsilon(P^2-P'^2)+\varepsilon'(Q^2-Q'^2).$$

Or, en substituant dans cette identité un des systèmes de solutions des équations $P-P'=0$, $Q-Q'=0$ autre que $x=0$, $y=0$, $z=0$, on annulerait le second membre et on n'annulerait pas le premier.

Il résulte de là que, si les racines de l'équation en S sont toutes différentes, les seules formes de décomposition possibles étant P^2+Q^2, $P'^2-Q'^2$, $-P''^2-Q''^2$, chacune des racines S, S', S'' en donne une et l'on a

$$\varphi - S(x^2+y^2+z^2) = P^2+Q^2,$$
$$\varphi - S'(x^2+y^2+z^2) = P'^2-Q'^2,$$
$$\varphi - S''(x^2+y^2+z^2) = -P''^2-Q''^2.$$

On en déduit les identités

$$(S'-S)\sigma = P^2 + Q^2 + Q'^2 - P'^2,$$
$$(S''-S')\sigma = P''^2 + Q''^2 + P'^2 - Q'^2,$$

et, en substituant dans la première de ces identités un des systèmes de solutions de l'équation $P' = 0$, et dans la seconde un des systèmes de solutions de l'équation $Q' = 0$ autre que $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, on en conclut

$$S < S' < S'',$$

c'est-à-dire que :

La plus petite racine donne deux carrés positifs, la plus grande deux carrés négatifs, et la racine moyenne seule décompose $\varphi - S\sigma$ *et un produit de deux facteurs réels distincts.*

Si l'équation en S a une racine simple S_1 et une racine double S_2, on a deux décompositions d'espèce différente

$$\varphi - S_1(x^2 + y^2 + z^2) = \varepsilon P^2 + \varepsilon' Q^2,$$
$$\varphi - S_2(x^2 + y^2 + z^2) = -\varepsilon P'^2.$$

On en déduit

$$(S_2 - S_1)(x^2 + y^2 + z^2) = \varepsilon(P^2 + P'^2) + \varepsilon' Q^2,$$

et, en substituant un des systèmes de solutions des équations $P = 0$, $P' = 0$, ou de l'équation $Q = 0$ autre que $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, on en conclut que ε, ε' et $S_2 - S_1$ ont les mêmes signes, c'est-à-dire que :

La plus petite racine, si elle est double, donne un carré positif et la plus grande deux carrés négatifs; la plus grande, si elle est double, donne un carré négatif et la plus petite deux carrés positifs.

La méthode s'applique évidemment avec la même facilité à une équation en S de degré quelconque.

Remarques.

Si l'on avait

$$\sigma = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu,$$

ou, en décomposant en carrés,

$$\sigma = (x + y\cos\nu + z\cos\mu)^2 + \left(y\sin\nu + z\,\frac{\cos\lambda - \cos\mu\cos\nu}{\sin\nu}\right)^2 + \left(z\,\frac{H}{\sin\nu}\right)^2,$$

H^2 désignant le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix},$$

il suffirait de poser

$$x + y\cos\nu + z\cos\mu = X,$$
$$y\sin\nu + z\,\frac{\cos\lambda - \cos\mu\cos\nu}{\sin\nu} = Y,$$
$$z\,\frac{H}{\sin\nu} = Z,$$

pour ramener l'expression $\varphi - S\sigma$ à la forme

$$\Phi - S(X^2 + Y^2 + Z^2),$$

et pouvoir appliquer tous les résultats précédents.

SOLUTION DE LA QUESTION 1591;

PAR M. E. PELLEGRIN,

Capitaine d'Artillerie.

Soient A, B, C *les pieds des trois normales à une parabole menées par un point* P *de son plan. Par le sommet* O *de la courbe on fait passer trois cercles respectivement tangents à la parabole en* A, B, C. *Ces cercles coupent la courbe en trois autres points* A′, B′, C′. *Démontrer que les normales en* A′, B′, C′ *à la parabole sont concourantes.* (LEMAIRE.)

On sait que les bissectrices des angles formés par un couple quelconque de sécantes communes à un cercle et à une conique sont parallèles aux axes de la conique. Il suit de là que le point A′ est le symétrique, par rapport à l'axe de la parabole, du point A_1 où la parallèle menée par le sommet O à la tangente en A rencontre pour la seconde fois la courbe. D'ailleurs, la parallèle à l'axe menée par A passe par le milieu de la corde OA_1; donc l'ordonnée de A est la moitié de l'ordonnée de A_1, et, par suite, l'ordonnée de A′ est égale au double de l'ordonnée de A, changée de signe.

Mais, pour que trois normales à la parabole soient concourantes, il faut et il suffit que les ordonnées de leurs pieds aient une somme nulle. Donc, en vertu de l'hypothèse, la somme des ordonnées des points A, B, C est nulle; par suite, il en est de même de la somme des ordonnées de A′, B′, C′, puisque cette somme est égale à la précédente multipliée par — 2. Donc enfin les normales en A′, B′, C′ concourent en un même point Q.

N. B. — MM. Audibert, Barisien, Brocard, Coronnet, Reval nous ont adressé des solutions analytiques. M. le capitaine Barisien fait observer en outre : 1° que le lieu du milieu de AA′ est une parabole; 2° que l'enveloppe de AA′ est une parabole; 3° que l'aire du triangle A′B′C′ est égale à huit fois l'aire du triangle ABC; 4° que si le point P est sur la développée de la parabole, il en est de même du point Q.

SOLUTION DE LA QUESTION 1392;

Par M. AUDIBERT.

D'un point M *du plan d'une ellipse, on abaisse les quatre normales dont les pieds sont* A_1, A_2, A_3, A_4. *Chaque normale, telle que* MA_1, *rencontre le grand axe en* P_1 *et le petit axe en* Q_1. *Démontrer les relations*

$$(1)\qquad \frac{MA_1}{A_1P_1}+\frac{MA_2}{A_2P_2}+\frac{MA_3}{A_3P_3}+\frac{MA_4}{A_4P_4}=\text{const.},$$

$$(2)\qquad \frac{MA_1}{A_1Q_1}+\frac{MA_2}{A_2Q_2}+\frac{MA_3}{A_3Q_3}+\frac{MA_4}{A_4Q_4}=\text{const.}$$

(Barisien.)

Désignons par (x, y) les coordonnées du point A_1, par (α, β) celles du point M, et enfin par I_1 et B_1 les projections de A_1 sur l'abscisse et l'ordonnée du point M. Les triangles rectangles semblables MA_1B_1, $P_1A_1I_1$ donnent les proportions

$$(3)\qquad \frac{MA_1}{A_1P_1}=\frac{\alpha-x}{x-OP_1}=\frac{\beta-y}{y}.$$

D'ailleurs, en faisant $y=0$ dans l'équation de la normale A_1P_1, on voit que $OP_1=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}x$.

Cela posé, si l'on égale à ρ les rapports (3) et si l'on élimine x et y entre les deux relations ainsi obtenues et l'équation de l'ellipse, on obtient l'équation

$$\rho^4 + \frac{2(a^2+b^2)}{b^2}\rho^3 + \ldots = 0,$$

et, comme les racines de cette équation sont les valeurs des quatre rapports (1), on voit que la somme de ces rapports est constante et égale à $\frac{2(a^2+b^2)}{b^2}$.

La démonstration de la relation (2) est tout à fait analogue.

N. B. — MM. Pellegrin et Reval nous ont adressé des solutions peu différentes de celle qui précède.

RÉALISATION ET USAGE DES FORMES IMAGINAIRES EN GÉOMÉTRIE.

Conférences données par M. Maximilien MARIE
au Collège Stanislas, à Sainte-Barbe, à l'École Sainte-Geneviève et à l'École Monge (1).

Quadratures.

10. *Une seule intégration suffit aux quadratures du lieu réel et de toutes ses conjuguées.* — En effet, d'abord, si les ordonnées de deux branches de la conjuguée à abscisses réelles sont

$$y = \varphi(x) \pm \sqrt{-\psi(x)}\sqrt{-1},$$

celles des deux branches correspondantes de la courbe

---

(1) *Voir* même tome, p. 161.

réelle seront

$$y = \varphi(x) \pm \sqrt{\psi(x)},$$

et si l'on a pu obtenir l'intégrale indéfinie

$$\int_{x_0}^{x} [\varphi(x) \pm \sqrt{\psi(x)}]\, dx,$$

on aura obtenu en même temps l'intégrale

$$\int_{x'_0}^{x'} [\varphi(x) \pm \sqrt{-\psi(x)}\sqrt{-1}]\, dx.$$

Si, en prenant cette dernière entre des limites a et b, on a trouvé pour résultat

$$A \pm B\sqrt{-1},$$

A sera l'aire du diamètre correspondant aux cordes réelles de la conjuguée, B sera l'aire comprise entre la conjuguée et son diamètre, et $A \pm B$ sera l'aire même de cette conjuguée.

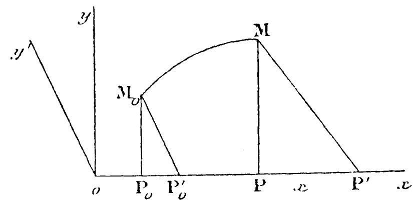
Ainsi, si l'on a pu obtenir l'intégrale $\int y\, dx$, elle fournira la quadrature d'une branche quelconque de la conjuguée à abscisses réelles, et l'on peut remarquer que l'aire de cette conjuguée sera mieux représentée que celle de la courbe réelle, parce que la présence du signe $\sqrt{-1}$ s'opposera à toute confusion entre l'aire du diamètre et l'aire de la courbe au-dessus ou au-dessous de son diamètre.

On pourrait obtenir l'aire d'une conjuguée quelconque en la rapportant au même axe des x et à un nouvel axe des y parallèle aux cordes réelles de cette conjuguée; mais la transformation ne sera jamais nécessaire, parce qu'il suffira d'obtenir l'aire indéfinie de la courbe réelle dans le nouveau système et que les aires de cette courbe, dans les deux systèmes, se déduisent aisément l'un de l'autre par l'addition et la soustraction de deux triangles.

Soient

OX, OY (*fig.* 6) les axes rectangulaires auxquels la courbe réelle était d'abord rapportée;

Fig. 6.



M_0M un arc quelconque de cette courbe;

OY' une parallèle aux cordes réelles de la conjuguée qu'on voudrait quarrer;

M_0P_0 et MP les ordonnées anciennes de M_0 et M;

$M_0P'_0$ et MP' leurs ordonnées nouvelles.

Si l'on connaissait l'expression de l'aire indéfinie P'_0M_0MP', on en tirerait l'aire indéfinie de la conjuguée considérée, comprise entre l'axe des x, un arc quelconque de cette conjuguée et les cordes réelles passant par les extrémités de cet arc.

Mais on passe de l'aire supposée connue P_0M_0MP à l'aire cherchée P'_0M_0MP' en ajoutant à la première l'aire du triangle PMP' et en en retranchant celle du triangle $P_0M_0P'_0$; soient x_0y_0 et $x'_0y'_0$ les coordonnées anciennes et nouvelles du point M_0, xy et $x'y'$ les coordonnées anciennes et nouvelles du point M, les aires des deux triangles MPP' et $M_0P_0P'_0$ seront

$$\tfrac{1}{2}\sin Y'Y\,yy' \qquad \text{et} \qquad \tfrac{1}{2}\sin Y'Y\,y_0y'_0$$

ou

$$-\tfrac{1}{2}\cos Y'X\,yy' \qquad \text{et} \qquad -\tfrac{1}{2}\cos Y'X\,y_0y'_0\,;$$

mais il conviendra, dans les expressions de ces deux aires, de remplacer les ordonnées nouvelles y' et y'_0 par leurs valeurs en fonction de y et y_0 : l'une des formules de la transformation intervenue étant

$$y = y' \sin Y'X,$$

d'où

$$y' = \frac{y}{\sin Y'X},$$

on prendra donc, pour expressions des deux triangles,

$$-\frac{y^2}{2}\frac{\cos Y'X}{\sin Y'X} \quad \text{et} \quad -\frac{y_0^2}{2}\frac{\cos Y'X}{\sin Y'X},$$

c'est-à-dire

$$\frac{y^2}{2C} \quad \text{et} \quad \frac{y_0^2}{2C},$$

C désignant la caractéristique de la conjuguée dont les cordes réelles seraient parallèles au nouvel axe des y.

En définitive, on aura identiquement

$$\sin Y'X \int_{x'_0, y'_0}^{x', y'} y'\,dx' = \int_{x_0, y_0}^{x, y} y\,dx + \frac{y_0^2 - y^2}{2C}.$$

Ainsi la seule intégration, marquée par

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} y\,dx,$$

fournira les quadratures de toutes les conjuguées du lieu, en sorte que la question, en ce qui concerne ces quadratures, est entièrement résolue.

Il reste une question beaucoup plus importante, au point de vue du Calcul intégral, et qui consiste à obtenir l'interprétation de l'intégrale

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} y\,dx$$

dans tous les cas que peut présenter le choix des limites

$[x_0, y_0]$ et $[x, y]$. Or la formule

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} y\,dx = \sin Y'X \int_{x'_0, y'_0}^{x', y'} + \frac{y^2 - y_0^2}{2C}$$

fournira cette interprétation dans tous les cas, comme on va le voir.

Mais, cette formule n'ayant été établie, par des considérations géométriques, que dans l'hypothèse particulière où les limites $[x_0, y_0]$ et $[x, y]$ seraient réelles, il ne sera pas inutile d'en donner une démonstration analytique, qui permette de la considérer comme une véritable identité absolue, applicable à tous les cas.

Soient

$$x = mx' + ny' \qquad \text{et} \qquad y = px' + qy'$$

les formules d'une transformation linéaire : la première donne

$$dx = m\,dx' + n\,dy',$$

d'où résulte

$$\begin{aligned} \int y\,dx &= \int (px' + qy')(m\,dx' + n\,dy') \\ &= mp \int x'\,dx' + nq \int y'\,dy' + mq \int y'\,dx' + np \int x'\,dy' \\ &= \tfrac{1}{2} mpx'^2 + \tfrac{1}{2} nqy'^2 + mq \int y'\,dx' + np \int x'\,dy'; \end{aligned}$$

en intégrant par parties dans le dernier terme, on le remplacera par

$$np(x'y' - \int y'\,dx'),$$

et l'on aura, en définitive,

$$\int y\,dx = mp\frac{x'^2}{2} + nq\frac{y'^2}{2}\; mpx'y' + (mq - np)\int y'\,dx'.$$

Supposons maintenant la transformation

$$x = x' + y'\cos\alpha', \qquad y = y'\sin\alpha',$$

qui se rapporte au changement d'axes que nous avions en vue, on aura

$$m = 1, \qquad n = \cos\alpha', \qquad p = 0, \qquad q = \sin\alpha',$$

et il en résultera

$$\int y\,dx = \tfrac{1}{2}\sin\alpha'\cos\alpha' y'^2 + \sin\alpha' \int y'\,dx'$$

ou, en remplaçant y'^2 par $\frac{y^2}{\sin^2\alpha'}$,

$$\int y\,dx = \frac{y^2}{2c} + \sin\alpha' \int y'\,dx'.$$

Comme nous l'avons déjà dit, la question la plus intéressante que présente l'étude d'une intégrale

$$\int_{x_0,\,y_0}^{x,\,y} y\,dx,$$

où y est une fonction implicite, consiste à définir la valeur concrète de cette intégrale, soit en raison des limites, soit en raison de la succession de valeurs qu'auraient prises les deux variables pour passer de leur état initial $[x_0, y_0]$ à leur état final $[x, y]$, de façon, non seulement à pouvoir, au besoin, si l'intégration n'avait pas pu être effectuée, appliquer à l'évaluation de l'intégrale les méthodes de quadratures approchées, par la substitution, à une courbe, de polygones inscrits et circonscrits, mais encore à lever les difficultés qui pourraient subsister quand même l'intégration aurait pu être effectuée.

Ces difficultés tiennent d'abord à ce que, si les limites sont données seulement en ce qui concerne x, c'est-à-dire si l'on ne donne que x_0 et x, y_0 et y auront chacune m valeurs, si l'équation entre x et y est de degré m par rapport à y, en sorte que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} y\,dx$$

aurait toujours au moins m^2 valeurs ; mais surtout à ce que l'intégrale indéfinie $\int y\,dx$, si elle avait pu être obtenue, pourrait être compliquée par la présence de constantes affectées de coefficients entiers arbitraires, comme on le voit par

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}\sin x,$$

à l'une quelconque des valeurs de laquelle on peut ajouter un nombre quelconque de fois 2π, et par

$$\int \frac{dx}{x} = \mathrm{L}x,$$

à l'une quelconque des valeurs de laquelle on peut ajouter un nombre quelconque de fois $2\pi\sqrt{-1}$.

Ces constantes sont désignées sous le nom de *périodes de l'intégrale indéfinie;* et les nombres de fois que ces périodes doivent être introduites respectivement dans chaque intégrale définie dépendent du chemin suivi par le point $[x, y]$ pour aller du point $[x_0, y_0]$ au point $[x, y]$.

Nous chercherons d'abord à assigner, pour chaque système de limites, la valeur concrète la plus simple de l'intégrale définie; nous définirons et assignerons ensuite les valeurs concrètes des différentes périodes, en même temps que nous déterminerons les nombres qui devront en être pris dans chaque cas.

11. *De la valeur concrète la plus simple d'une intégrale, en raison de ses limites.* — Quelles que soient les limites assignées, on pourra toujours les relier l'une à l'autre, et même de plusieurs manières : d'abord par un arc de la conjuguée à laquelle appartiendra la limite inférieure, prolongée jusqu'à son point de contact avec l'une ou avec l'autre des deux enveloppes; par un arc de cette enveloppe, interrompu s'il est nécessaire par un

arc d'une conjuguée arbitraire, compris entre deux points consécutifs de contact de cette conjuguée avec l'enveloppe en question, dans le cas où l'on aurait à passer d'une branche de cette enveloppe à une autre de ses branches, qui n'aurait aucun point commun avec la première; par une branche de celle des deux enveloppes sur laquelle serait venu le point mobile, prolongée jusqu'à l'un de ses points de contact avec l'autre enveloppe, si cela était nécessaire; par une branche de celle des deux enveloppes qui toucherait la conjuguée à laquelle appartiendrait la limite supérieure, cette branche étant prolongée jusqu'à son point de contact avec la conjuguée en question; enfin, par l'arc de cette conjuguée qui rejoindrait le point de contact, déterminé précédemment, avec le point représentatif de la limite supérieure.

Le choix de ce chemin assignera la valeur concrète de l'intégrale, en en faisant une somme d'aires connues par ce qui précède, avec les signes sous lesquels il faudrait les introduire, sauf cependant pour le cas, que nous allons examiner à part, du parcours d'un arc de l'enveloppe imaginaire.

Évaluation concrète de l'intégrale $\int y\,dx$ prise le long d'un arc de l'enveloppe imaginaire. — Soient

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \qquad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

les coordonnées imaginaires d'un point quelconque de l'enveloppe imaginaire des conjuguées d'un lieu : un élément de l'intégrale prise le long de cette enveloppe sera

$$(\alpha' + \beta'\sqrt{-1})(d\alpha + d\beta\sqrt{-1})$$

ou

$$(\alpha'\,d\alpha - \beta'\,d\beta) + (\beta'\,d\alpha + \alpha'\,d\beta)\sqrt{-1};$$

la valeur totale de l'intégrale s'exprimera donc par

$$(\Sigma\alpha' d\alpha - \Sigma\beta' d\beta) + (\Sigma\beta' d\alpha + \Sigma\alpha' d\beta)\sqrt{-1}.$$

Considérons en même temps la branche de l'enveloppe imaginaire qui contiendrait les points imaginaires conjugués de ceux de la première, les coordonnées imaginaires d'un de ses points seront

$$x = \alpha - \beta\sqrt{-1}, \qquad y = \alpha' - \beta'\sqrt{-1},$$

et l'un des éléments de l'intégrale $\int y\,dx$, prise le long de cette seconde branche, serait

$$(\alpha' - \beta'\sqrt{-1})(d\alpha - d\beta\sqrt{-1})$$

ou

$$\alpha' d\alpha - \beta' d\beta - (\beta' d\alpha - \alpha' d\beta)\sqrt{-1},$$

de sorte que la valeur totale de l'intégrale, prise le long de la seconde branche, s'exprimera par

$$(\Sigma\alpha' d\alpha - \Sigma\beta' d\beta) - (\Sigma\beta' d\alpha - \Sigma\alpha' d\beta)\sqrt{-1}.$$

Mais les coordonnées réelles d'un point du premier arc de l'enveloppe seraient $\alpha + \beta$ et $\alpha' + \beta'$, et celles du point correspondant du second arc seraient $\alpha - \beta$ et $\alpha' - \beta'$, de sorte que les aires comprises entre les deux arcs, l'axe des x et les ordonnées des extrémités de ces arcs, seraient

$$\begin{aligned} S &= \int(\alpha' + \beta')(d\alpha + d\beta) \\ &= (\Sigma\alpha' d\alpha + \Sigma\beta' d\beta) + (\Sigma\beta' d\alpha + \Sigma\alpha' d\beta) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S' &= \int(\alpha' - \beta')(d\alpha - d\beta) \\ &= (\Sigma\alpha' d\alpha + \Sigma\beta' d\beta) - (\Sigma\beta' d\alpha + \Sigma\alpha' d\beta); \end{aligned}$$

ces deux équations donnent, par addition et par soustraction,

$$\Sigma\alpha' d\alpha + \Sigma\beta' d\beta = \frac{S + S'}{2}$$

et

$$\Sigma\beta' d\alpha + \Sigma\alpha' d\beta = \frac{S - S'}{2};$$

d'un autre côté, si l'on appelle S_1 l'aire du lieu des points milieux des cordes joignant les points imaginaires conjugués des deux arcs de l'enveloppe, c'est-à-dire si l'on pose

$$S_1 = \Sigma\alpha' d\alpha,$$

on aura

$$\Sigma\alpha' d\alpha - \Sigma\beta' d\beta = 2S_1 - \frac{S + S'}{2}.$$

L'intégrale $I = \int y\,dx$, prise le long du premier arc, aura donc pour valeur

$$I = 2S_1 - \frac{S + S'}{2} + \frac{S - S'}{2}\sqrt{-1};$$

quant à celle qui correspondrait au parcours du second arc, elle sera

$$I' = 2S_1 - \frac{S + S'}{2} - \frac{S - S'}{2}\sqrt{-1}.$$

Ainsi, dans tous les cas, quelles que soient les limites et quel que soit le nombre des arcs à emprunter aux deux enveloppes et aux conjuguées pour rejoindre ces deux limites, les m^2 valeurs de l'intégrale

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} y\,dx$$

s'exprimeront toujours par des sommes d'aires connues; et l'une quelconque de ces aires pourra être obtenue par les formules ordinaires de quadrature approchée, parce que, sachant mener les tangentes aux deux enveloppes et aux conjuguées, on pourra toujours comprendre chaque aire à évaluer entre les aires de deux figures polygonales : l'une inscrite, l'autre circonscrite à l'arc correspondant du lieu.

En résumé, les m^2 valeurs de la quadratrice

$$\int_{x_0}^{x} y\,dx$$

d'un lieu $f(x,y)=0$, de degré m, pourront toujours recevoir des définitions nettes du choix de chemins, empruntés tant aux conjuguées qu'aux deux enveloppes, et propres à rejoindre les m limites inférieures de l'intégrale à ses m limites supérieures.

A la vérité, le chemin à suivre pour relier l'une des limites inférieures à l'une des limites supérieures pourrait être modifié de bien des manières différentes.

Mais toutes les intégrales qui auront le même système de limites ne pourront différer les unes des autres que par des constantes, parce qu'elles auront la même différentielle.

12. *Théorème de l'indépendance de la valeur d'une intégrale $\int y\,dx$ envers le chemin suivi pour en rejoindre les deux limites.* — La théorie précédente pourrait se suffire à elle-même; cependant elle sera utilement complétée par un théorème dû à Cauchy, au moyen duquel on fera disparaître ce qu'il y a en apparence d'arbitraire dans le choix exclusif des chemins définis plus haut. Ce théorème, d'ailleurs, nous permettra d'obtenir l'infinie multitude des formes géométriques des aires propres à représenter les périodes d'une intégrale.

Ce théorème peut s'énoncer de la manière suivante : Un chemin $\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta')=0$, propre à rejoindre les deux limites d'une intégrale, et qui ne passe par aucun point du lieu considéré $f(x,y)=0$, où la fonction y ou ses dérivées deviennent infinies, à partir d'un certain ordre, peut être modifié infiniment peu, puis insensiblement d'une manière appréciable, sans qu'il en résulte aucun changement dans la valeur de l'intégrale $\int y\,dx$, les limites restant les mêmes, pourvu que, durant sa déformation continue, ce chemin ne passe jamais par un seul point du lieu où y ou ses dérivées deviennent infinies à partir d'un certain ordre.

On peut établir ce théorème de la manière suivante :

Considérons seulement un élément de l'intégrale $\int y\,dx$: si l'on représente la fonction y par

$$F(x) = F(\alpha + \beta\sqrt{-1}),$$

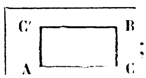
on pourra indifféremment remplacer cet élément par

$$F(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,d\alpha + F(\alpha + d\alpha + \beta\sqrt{-1})\,d\beta\sqrt{-1}$$

ou par

$$F(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,d\beta\sqrt{-1} + F(\alpha, \beta\sqrt{-1} + d\beta\sqrt{-1})\,d\alpha,$$

c'est-à-dire, qu'au lieu de faire croître en même temps α et β, pour obéir à la loi $\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0$, on pourra les faire croître successivement dans l'un ou l'autre ordre, de façon à modifier l'élément du chemin assigné $\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0$, et à le changer indifféremment, comme l'indique la figure, de AB en ACB ou en AC′B,



; mais à la condition que

$$F(\alpha + d\alpha + \beta\sqrt{-1})\,d\beta\sqrt{-1}$$

et

$$F(\alpha + \beta\sqrt{-1} + d\beta\sqrt{-1})\,d\alpha$$

puissent se confondre respectivement avec

$$F(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,d\beta\sqrt{-1} \qquad \text{et} \qquad F(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,d\alpha,$$

c'est-à-dire, comme

$$F(\alpha + d\alpha + \beta\sqrt{-1}) = F(\alpha + \beta\sqrt{-1}) + F'(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,d\alpha$$

et

$$\begin{aligned} &F(\alpha + \beta\sqrt{-1} + d\beta\sqrt{-1}) \\ &\quad = F(\alpha + \beta\sqrt{-1}) + F'(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,d\beta\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

à la condition que $F'(\alpha + \beta\sqrt{-1})$ ne soit pas infini, sans quoi $F'(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,d\alpha$, ni $F'(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,d\beta\sqrt{-1}$ ne pourraient plus être négligés.

On pourrait, sous des conditions analogues, modifier de même tous les éléments de l'intégrale, les uns dans un sens, les autres dans l'autre ; et recommencer indéfiniment, tant que le nouveau chemin ne contiendrait aucun des points où la fonction ou ses dérivées deviendraient infinies.

Nous énonçons ainsi les conditions à remplir par le chemin mobile : d'abord parce que, si y devenait infini, sa dérivée le deviendrait aussi ; en second lieu, parce que pour pouvoir de nouveau isoler, dans le nouveau dx, le nouveau $d\alpha$ du nouveau $d\beta$, et les faire passer l'un avant l'autre, dans l'un ou l'autre ordre, il faudrait que

$$F'(\alpha + d\alpha + \beta\sqrt{-1}) = F'(\alpha + \beta\sqrt{-1}) + F''(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,d\alpha$$

ou

$$\begin{aligned} &F'(\alpha + \beta\sqrt{-1} + d\beta\sqrt{-1}) \\ &\quad = F'(\alpha + \beta\sqrt{-1}) + F''(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,d\beta\sqrt{-1} \end{aligned}$$

se réduisissent l'un et l'autre à

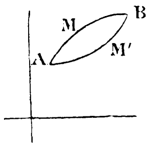
$$F'(\alpha + \beta\sqrt{-1}),$$

c'est-à-dire que $F''(\alpha + \beta\sqrt{-1})$ ne fût pas infini, et ainsi de suite.

Ainsi, deux chemins terminés aux mêmes extrémités pourront se substituer l'un à l'autre, si le premier peut se transformer insensiblement dans le second, sans que, dans ses formes intermédiaires, il passe jamais par un point où la fonction ou ses dérivées, à partir d'un certain ordre, deviendraient infinies.

Le théorème peut s'énoncer d'une autre manière : En

Fig. 7.



effet, si les valeurs de $\int y\,dx$, prises le long des chemins AMB (*fig.* 7) et AM'B, sont égales, la valeur de cette intégrale, prise le long du chemin fermé AMBM'A, sera nulle; en sorte que l'on peut dire qu'une intégrale $\int y\,dx$, prise le long d'un chemin fermé, est identiquement nulle, lorsque ce chemin fermé peut se réduire à un point unique, sans que, dans ses transformations successives, il passe jamais par un point où la fonction y ou ses dérivées deviendraient infinies à partir d'un certain ordre.

On remarquera que l'un ou l'autre théorème n'a d'autre objet que de compléter la notion originelle d'une intégrale; car il est bien évident que, si une intégrale $\int y\,dx$ pouvait, les limites restant les mêmes, varier d'une manière continue avec le chemin qui relierait ces deux limites, cette intégrale, dès lors, n'aurait pas de sens.

Mais on comprend parfaitement que, de loin en loin, l'intégrale puisse s'accroître de quantités finies, lorsque le chemin se déforme assez considérablement; quant à ces quantités finies, elles ne peuvent être que des constantes, par la raison, que nous avons déjà dite, que l'intégrale

$$\int_{x_0,\, y_0}^{x,\, y} y\, dx,$$

prise entre les mêmes limites, conserve toujours la même dérivée, qui est la valeur de la fonction à la limite supérieure de l'intégrale.

On peut présenter le théorème de Cauchy d'une façon plus avantageuse : Si l'on établit entre les variables α, β, α' et β', une relation arbitraire

$$\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0,$$

cette relation, jointe aux deux dans lesquelles se décompose

$$f(\alpha + \beta\sqrt{-1}\,,\ \alpha' + \beta'\sqrt{-1}) = 0,$$

fera de chacune des quatre variables une fonction de celle que l'on voudra des trois autres; d'un autre côté, l'intégrale

$$\int y\, dx = \int (\alpha' + \beta'\sqrt{-1})(d\alpha + d\beta\sqrt{-1})$$

se décomposera en quatre autres

$$\int \alpha' d\alpha, \quad -\int \beta' d\beta, \quad \sqrt{-1}\int \beta' d\alpha \quad \text{et} \quad \sqrt{-1}\int \beta' d\alpha,$$

dans chacune desquelles on pourra considérer la variable finie comme une fonction de la variable dont la différentielle entre sous le même signe d'intégration; or il est facile de comprendre comment chacune des quatre intégrales pourrait n'acquérir qu'une valeur finale nulle, quand même la variable x serait revenue à sa valeur initiale, sans avoir repassé par la même série de valeurs.

Supposons, par exemple, que, au lieu d'une relation $\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0$, entre les quatre variables, on en ait choisi une $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, entre α et β seulement, figurée par la courbe AB (*fig.* 8).

Fig. 8.

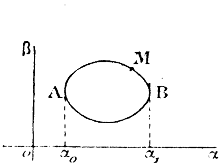
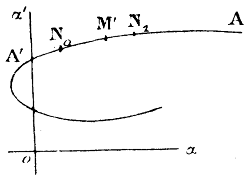


Fig. 9.



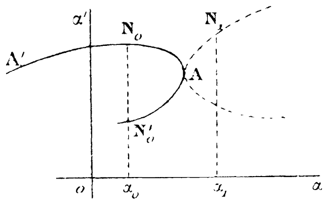
Il en résultera, entre α' et α, par exemple, une relation correspondante, figurée par une courbe telle que A'A (*fig.* 9).

Soient M et M' deux points correspondants de ces deux courbes, c'est-à-dire ayant la même abscisse α : dans l'hypothèse de la figure, $\int \alpha' d\alpha$ sera identiquement nulle, parce que, tandis que le point $[\alpha, \beta]$ fera le tour de la courbe AMB, c'est-à-dire tandis que α variera de sa valeur minimum α_0 à sa valeur maximum α_1 et reviendra de α_1 à α_0, le point $[\alpha', \alpha]$ ne pourra décrire, sur A'A, que l'arc N_0N_1, dont les extrémités auraient pour abscisses α_0 et α_1, et ensuite l'arc N_1N_0, de façon que l'aire engendrée dans l'aller serait détruite dans le retour.

Pour que l'aire $\int \alpha' d\alpha$ ne fût pas nulle, il faudrait que le point $[\alpha', \alpha]$ eût pu passer sur une autre branche de A'A que celle où se trouvait le point de départ, comme dans le cas de la *fig.* 10, où le point $[\alpha', \alpha]$ aurait parcouru le chemin N_0AN_1 dans l'aller et le chemin $N_1AN'_0$ dans le retour; c'est-à-dire qu'il faudrait que $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$ fût devenu infini dans l'intervalle de α_0 à α_1.

Il en serait de même des trois autres intégrales : on arrive ainsi à une nouvelle expression de la condition pour qu'on puisse substituer un chemin à un autre, sans que l'intégrale change : au lieu de dire que, dans ses formes intermédiaires, le chemin ne doit passer par aucun point où $\frac{dy}{dx}$ devienne infini, on peut dire que le

Fig. 10.

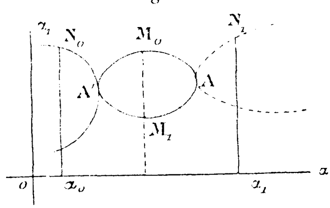


chemin variable doit rester tel que $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$, $\frac{d\beta'}{d\alpha}$, $\frac{d\alpha'}{d\beta}$ ni $\frac{d\beta'}{d\beta}$ ne deviennent infinis.

Il est aussi très aisé, dans cette nouvelle conception, de se rendre compte des conditions dans lesquelles l'intégrale $\int y\,dx$ peut s'accroître de quantités constantes dans un parcours fermé par rapport à x, c'est-à-dire lorsque α et β reviennent à leurs valeurs initiales, sans repasser par la même suite de valeurs.

Reprenons l'exemple de l'intégrale $\int \alpha' d\alpha$, et suppo-

Fig. 11.



sons que la courbe, dont les coordonnées sont α' et α, présente un anneau fermé compris entre les valeurs extrêmes α_0 et α_1 de α, comme l'indique la *fig.* 11.

Si l'on fait partir α de la valeur de l'abscisse du point M_0, qu'on le fasse croître jusqu'à sa valeur extrême α_1, abscisse de N_1, qu'on le fasse ensuite décroître de α_1 à l'abscisse du point M_0 ou du point M_1, mais qu'on suppose que, durant ces variations de α, le point $[\alpha', \alpha]$ ait parcouru le chemin $M_0 A N_1 A M_1$, l'intégrale $\int \alpha' d\alpha$ aura pris la valeur de l'aire $M_0 A M_1$.

Cette aire dépendra de la valeur initiale de l'abscisse du point de départ, M_0; mais aussi α' ne sera pas revenu à sa valeur initiale, l'ordonnée de M_0.

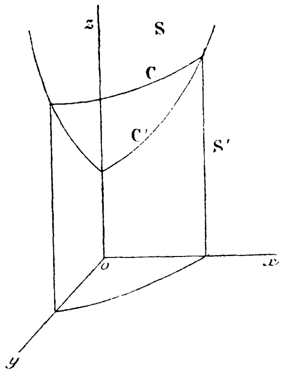
Au contraire, si l'on faisait revenir α à sa valeur initiale, l'abscisse de M_0, en supposant que, après être arrivé à sa valeur extrême supérieure α_1, il fût revenu à sa valeur extrême inférieure α_0, pour reprendre ensuite sa valeur initiale, l'abscisse de M_0, et que, durant ce parcours, le point $[\alpha', \alpha]$ eût décrit les arcs $M_0 A$, AN_1, $N_1 A$, $AM_1 A'$, $A'N_0$, $N_0 A'$, $A'M_0$, l'intégrale $\int \alpha' d\alpha$ aurait crû de l'aire comprise dans le contour $A'M_0 A M_1 A'$, indépendante de la position du point de départ M_0.

D'où l'on voit que l'intégrale $\int y\, dx$ ne peut s'accroître d'une constante, dans un parcours fermé par rapport à la variable x, qu'autant que la fonction y revient elle-même à sa valeur initiale, en même temps que la variable x. (*A suivre.*)

NOTE SUR UNE PROPRIÉTÉ DU CYLINDRE DROIT AYANT POUR DIRECTRICE UNE SPIRALE LOGARITHMIQUE;

Par M. Ch. ROBERT.

Proposition. — *Étant donnée la courbe* C, *intersection d'une surface quelconque de révolution* S *autour* *d'un axe* Oz *avec un cylindre droit* S' *ayant pour directrice une spirale logarithmique de pôle* O, *la trans-*



formée de la courbe C, *quand on déroule le cylindre, est une courbe appartenant à la même famille que la méridienne* C' *de la surface de révolution* S.

En effet, soit

$$z = f(x)$$

l'équation de la méridienne,

$$z = f(r)$$

sera l'équation de la surface de révolution, r désignant le rayon du parallèle.

Soit maintenant

$$r = ae^{m\theta}$$

l'équation de la spirale logarithmique.

Les équations de la courbe C, intersection des deux surfaces, sont

$$(\mathrm{C}) \qquad \begin{cases} z = f(r), \\ r = ae^{m\theta}. \end{cases}$$

Dans le déroulement du cylindre sur le plan zOx, la courbe obtenue aura même z que la courbe C, soit

$$z_1 = z;$$

son x sera donnée par l'équation

$$x_1 = s,$$

s représentant la longueur de l'arc correspondant de la spirale logarithmique, longueur que nous pourrons compter, par exemple, à partir du point O. La valeur en est donnée par l'équation

$$s = \int_0^r dr \sqrt{1 + r^2 \frac{d\theta^2}{dr^2}}.$$

Or

$$dr = mae^{m\theta}\, d\theta = mr\, d\theta$$

et

$$r^2 \frac{d\theta^2}{dr^2} = \frac{1}{m^2};$$

d'où

$$s = \int_0^r dr \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}$$

et, en intégrant,

$$s = r\sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} = kr,$$

en posant, pour abréger,

$$k = \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}.$$

La courbe déroulée aura donc pour équation

$$z_1 = f(r),$$
$$x_1 = kr;$$

d'où

$$z_1 = f\left(\frac{x_1}{k}\right).$$

Cette courbe n'est donc autre que la méridienne dans laquelle on a altéré les abscisses dans un rapport constant k. C'est une courbe de la même famille.

C. Q. F. D.

Corollaire. — La courbe de longueur minimum tracée sur le cylindre à base de spirale logarithmique devenant une droite après le déroulement de la surface, les lignes géodésiques du cylindre ne sont autres que ses intersections par des cônes de révolution d'axe Oz, la méridienne étant alors une droite.

RELATIONS ENTRE LA DISTANCE D'UN POINT P DU PLAN D'UNE CONIQUE AU FOYER ET LES RAYONS VECTEURS DES PIEDS DES NORMALES ABAISSÉES DU POINT P SUR LA COURBE;

Par M. C.-R.-J. KALLENBERG VAN DEN BOSCH.

PARABOLE.

Les pieds des normales, abaissées du point $P(\xi, \eta)$, sont donnés par l'équation de la courbe

$$y^2 = 2px$$

et l'équation

$$\eta - y = -\frac{y}{p}(\xi - x),$$

qui exprime que la normale au point (x, y) passe par le point P.

L'élimination de y donne, pour les abscisses des pieds des normales, l'équation

$$x^3 - 2(\xi - p)x^2 + (\xi - p)^2 x - \tfrac{1}{2}p\eta^2 = 0,$$

d'où l'on tire, pour les trois racines x_1, x_2 et x_3,

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2(\xi - p),$$
$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = (\xi - p)^2,$$
$$x_1 x_2 x_3 = \tfrac{1}{2} p \eta^2.$$

Le rayon vecteur d'un point de la courbe étant donné par

$$v = x + \frac{p}{2},$$

on a, pour le produit des rayons vecteurs des pieds des normales,

$$\begin{aligned} v_1 v_2 v_3 &= \left(x_1 + \frac{p}{2}\right)\left(x_2 + \frac{p}{2}\right)\left(x_3 + \frac{p}{2}\right) \\ &= x_1 x_2 x_3 + \frac{p}{2}(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) \\ &\quad + \frac{p^2}{4}(x_1 + x_2 + x_3) + \frac{p^3}{8} \end{aligned}$$

ou, en substituant les valeurs trouvées ci-dessus,

$$\begin{aligned} v_1 v_2 v_3 = {} & \frac{1}{2} p \eta^2 + \frac{1}{2} p (\xi - p)^2 \\ & + \frac{p^2}{2}(\xi - p) + \frac{p^3}{8} = \frac{p}{2}\left[\left(\xi - \frac{p}{2}\right)^2 + \eta^2\right]. \end{aligned}$$

L'expression entre parenthèses représente le carré de la distance u du point P au foyer; donc

$$v_1 v_2 v_3 = \tfrac{1}{2} p u^2$$

ou

$$u^2 = 2\,\frac{v_1 v_2 v_3}{p}. \tag{1}$$

Le rayon vecteur v d'un point de la courbe est lié au rayon de courbure ρ en ce point par l'équation

$$\rho^2 = \frac{8 v^3}{p},$$

tandis qu'on a encore

$$\rho = \frac{n^3}{p^2},$$

n représentant la partie de la normale comprise entre la courbe et l'axe de la parabole.

Si, à l'aide de ces formules, on introduit dans la relation (1), d'une part, les rayons de courbure et, d'autre part, les longueurs n relatives aux pieds des normales abaissées du point P, on trouve

$$(2) \qquad u^3 = \frac{\rho_1}{2}\,\frac{\rho_2}{2}\,\frac{\rho_3}{2}$$

et

$$(3) \qquad u = \frac{n_1 n_2 n_3}{2p^2}.$$

ELLIPSE ET HYPERBOLE.

L'élimination de y entre l'équation de la courbe

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

et celle de l'hyperbole équilatère

$$c^2 xy \pm b^2 \eta\, x - a^2 \xi\, y = 0,$$

où $c^2 = a^2 \mp b^2$, donnent pour les abscisses des pieds des normales, abaissées du point $P(\xi, \eta)$, l'équation

$$x^4 - \frac{2a^2\xi}{c^2}x^3 + \frac{a^2}{c^4}(a^2\xi^2 \pm b^2\eta^2 - c^4)x^2 + \frac{2a^4\xi}{c^2}x - \frac{a^6\xi^2}{c^4} = 0.$$

Donc on a, pour les quatre racines x_1, x_2, x_3 et x_4,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{2a^2\xi}{c^2},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \ldots = \frac{a^2}{c^4}(a^2\xi^2 \pm b^2\eta^2 - c^4),$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots = -\frac{2a^4\xi}{c^4},$$

$$x_1x_2x_3x_4 = -\frac{a^6\xi^2}{c^4}.$$

Par rapport au foyer F situé à droite de l'axe des y, le rayon vecteur d'un point de l'ellipse est donné par

$$v = a - \frac{c}{a}\,x,$$

et celui d'un point de l'hyperbole par

$$v = \pm\left(\frac{c}{a}\,x - a\right) \qquad \text{ou} \qquad v = \mp\left(a - \frac{c}{a}\,x\right).$$

Pour avoir une valeur positive, il faut prendre dans la dernière formule le signe — pour les abscisses positives et le signe + pour les abscisses négatives.

Or de l'égalité

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = -\frac{a^6 \xi^2}{c^4}$$

il résulte que, des quatre abscisses des pieds des normales, il y en a toujours un nombre impair qui sont de même signe.

Donc, pour l'hyperbole, il faut que, dans le produit $v_1 v_2 v_3 v_4$, le facteur $a - \frac{c}{a}\,x$ soit précédé un nombre impair de fois du signe —, ou que le produit lui-même soit affecté de ce même signe.

Ainsi l'on a

$$\begin{aligned}
v_1 v_2 v_3 v_4 &= \pm\left[\left(a - \frac{c}{a}x_1\right)\left(a - \frac{c}{a}x_2\right)\left(a - \frac{c}{a}x_3\right)\left(a - \frac{c}{a}x_4\right)\right] \\
&= \pm\Big[a^4 - a^2 c(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\
&\qquad + c^2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + \ldots) \\
&\qquad - \frac{c^3}{a^2}(x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \ldots) + \frac{c^4}{a^4}\,x_1 x_2 x_3 x_4\Big] \\
&= \pm\left[a^4 - \frac{2a^4\xi}{c} + \frac{a^2}{c^2}(a^2\xi^2 \pm b^2\eta^2 - c^4) + 2a^2\xi - a^2\xi^2\right] \\
&= \pm\left\{\pm\frac{a^2 b^2}{c^2}\left[(\xi - c)^2 + \eta^2\right]\right\} = \frac{a^2 b^2}{c^2}\,u^2,
\end{aligned}$$

en nommant u la distance du point P au foyer F.

On trouve donc, pour les deux courbes, la même relation

$$(1)\qquad u^2 = \frac{c^2}{a^2 b^2} v_1 v_2 v_3 v_4$$

et, évidemment, pour l'autre foyer F',

$$(1')\qquad u'^2 = \frac{c^2}{a^2 b^2} v'_1 v'_2 v'_3 v'_4.$$

De (1) et (1') on tire

$$(uu')^2 = \frac{c^2}{a^4 b^4} v_1 v'_1 . v_2 v'_2 . v_3 v'_3 . v_4 v'_4 .$$

Dans l'ellipse comme dans l'hyperbole, le rayon de courbure en un point de la courbe est lié aux rayons vecteurs de ce point par l'équation

$$\rho = \frac{(vv')^{\frac{3}{2}}}{ab},$$

et à la partie n de la normale, comprise entre la courbe et l'axe des x, par l'équation

$$\rho = \frac{a^2}{b^4} n^3.$$

En introduisant les rayons de courbure des pieds des normales et les longueurs n relatives à ces points dans l'équation de $(uu')^2$, on arrive aux relations

$$(2)\qquad (uu')^3 = \frac{c^6}{a^2 b^2} \rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4$$

et

$$(3)\qquad uu' = \frac{a^2 c^2}{b^6} n_1 n_2 n_3 n_4.$$

On peut encore remarquer que, les relations (1), (2) et (3) étant déduites pour les trois coniques de l'équation générale des abscisses, elles renferment le cas où deux abscisses ont des valeurs imaginaires.

En effet, les pieds des normales imaginaires sont des points imaginaires conjugués, dont les abscisses sont de la forme $x_1 = a + bi$ et $x_2 = a - bi$.

La somme et le produit des abscisses ont donc une valeur réelle, et il en est de même des produits $\nu_1 \nu_2$, $\rho_1 \rho_2$ et $n_1 n_2$ correspondants.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

IIᵉ Partie : Les congruences et les équations linéaires aux dérivées partielles. Des lignes tracées sur les surfaces. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1889. Gr. in-8° de VI-552 pages. Prix : 15^{fr}.

Traité de Mécanique rationnelle, à l'usage des candidats à la Licence et à l'Agrégation; par *H. Laurent*, examinateur d'admission à l'École Polytechnique. 3ᵉ édition. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1889. 2 vol. in-8° de XIV-364 et VIII-362 pages, avec figures dans le texte. Prix : 12^{fr}.

Traité de Mécanique générale, comprenant les Leçons professées à l'École Polytechnique et à l'École nationale supérieure des Mines; par *H. Resal*, Membre de l'Institut, inspecteur général des Mines. T. VII : Développements sur la Mécanique rationnelle et la Cinématique pure, comprenant de nombreux exercices. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1889. In-8° de XXVIII-389 pages, avec figures dans le texte. Prix : 12^{fr}.

Traité d'Optique; par *E. Mascart*, Membre de l'Institut, professeur au Collège de France, directeur du Bureau Central météorologique. T. I. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1889. Gr. in-8° de VIII-638 pages, avec 199 figures dans le texte et 2 planches. Prix : 20^{fr}.

Cours pratique d'Enseignement manuel, à l'usage des candidats aux Écoles normales d'Arts et Métiers et aux Écoles d'apprentis et d'élèves mécaniciens de la Flotte, des aspirants au certificat d'aptitude pour l'enseignement du travail manuel, des élèves des Écoles professionnelles industrielles, etc. Ajustage, Forge, Fonderie, Chaudronnerie, Menuiserie; par *J. Desforges*, professeur de travaux manuels à l'École industrielle de Versailles, ancien garde d'Artillerie, ancien chef aux ateliers des Forges et Fonderies de la Marine de l'État, à Ruelle. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1889. In-4° oblong de 76 planches de dessins, avec texte explicatif. Prix : 5^{fr}.

Traité élémentaire d'Électricité, avec les principales applications; par *R. Colson*, capitaine du Génie, 2ᵉ édition. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1888. In-18 jésus de 220 pages, avec 91 figures dans le texte. Prix : 3^{fr},75.

Les Levers photographiques et la Photographie en voyage; par le Dʳ *Gustave Le Bon*. Iʳᵉ Partie : Application de la Photographie aux levers de monuments et a la Topographie. IIᵉ Partie : Opérations complémentaires des levers photographiques. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1889. 2 vol. in-18 jésus de 134 et 121 pages, avec 59 figures dans le texte. Prix : 5^{fr}.

Le Cylindrographe, appareil panoramique; par *P. Moëssard*, commandant du Génie breveté, attaché au Service géographique de l'Armée. Iʳᵉ Partie : Le Cylindrographe photographique, chambre universelle pour portraits, groupes, paysages et panoramas. IIᵉ Partie : Le Cylindrographe topographique, application nouvelle de la Photographie aux levers photographiques. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1889. 2 vol. in 18 jésus de 41 et 54 pages, avec figures dans le texte et 2 planches phototypiques. Prix : 3fr.

ŒUVRES DE FOURIER, publiées par les soins de M. *Gaston Darboux*, sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique. T. II : MÉMOIRES PUBLIÉS DANS DIVERS RECUEILS. Paris, Gauthier-Villars et fils ; 1890. In-4° de XII-636 pages.

TRAITÉ D'ANALYSE ; par *H. Laurent*. T. V : CALCUL INTÉGRAL. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES. In-8° de 417 pages. Prix : 10fr. T. VI : CALCUL INTÉGRAL. ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES. In-8° de 339 pages. Prix : 8fr,50. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1890.

TRAITÉ MATHÉMATIQUE ET PRATIQUE DES OPÉRATIONS FINANCIÈRES; par *Léon Marie,* ancien élève de l'École Polytechnique, actuaire de la Cie *le Phénix*. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1890. Gr. in-8° de VIII-570 pages, avec figures dans le texte. Prix : 10fr.

ALGÈBRE SUPÉRIEURE, à l'usage des candidats à l'École Polytechnique, à l'École Normale supérieure, à l'École Centrale et à la Licence ès Sciences; par *Ch. de Comberousse,* professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École Centrale des Arts et Manufactures. 2e édition. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1890. 2 vol. in-8° de XXI-767 pages et XXIV-831 pages. Prix : 30fr.

ŒUVRES COMPLÈTES D'AUGUSTIN CAUCHY, publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences et sous les auspices de M. le Ministre de l'Instruction publique. IIe Série, T. VIII : ANCIENS EXERCICES DE MATHÉMATIQUES (3e année). Paris, Gauthier-Villars et fils; 1890. In-4° de 428 pages. Prix : 25fr.

SOMMAIRE DÉVELOPPÉ DU COURS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES. T. I : ALGÈBRE, à l'usage des candidats aux Écoles du Gouvernement; par *E. Martin,* ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de Mathématiques spéciales à l'École Sainte-Geneviève. Paris, E. Foucart; 1890. Gr. in-8° interfolié de 206 pages. Prix : 10fr.

COURS D'ANALYSE INFINITÉSIMALE, à l'usage des personnes qui étudient cette science en vue de ses applications mécaniques et physiques; par M. *J. Boussinesq*, Membre de l'Institut, professeur de Mécanique physique à la Faculté des Sciences de Paris. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1887-1890. 2 vol. gr. in-8°, avec figures dans le texte. Prix : tome I, 17fr; tome II, 23fr,50.

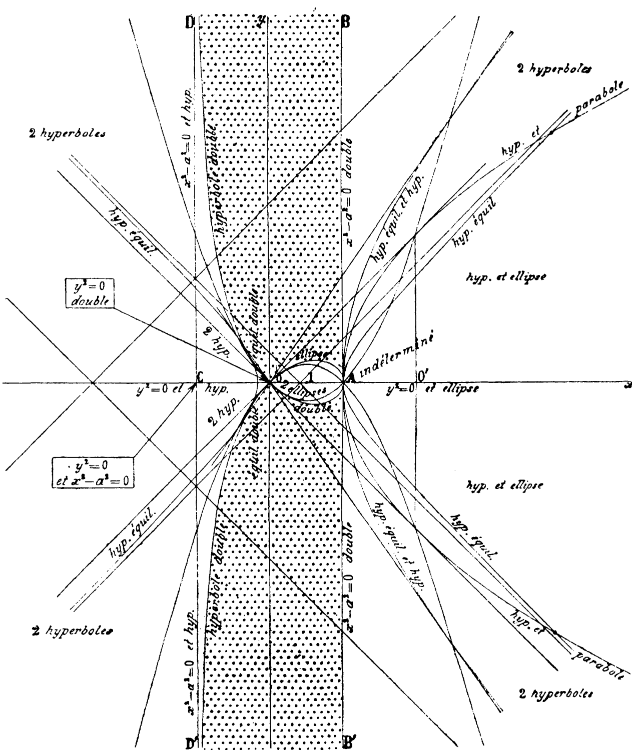
LA PHOTOGRAPHIE JUDICIAIRE, avec un Appendice SUR LA CLASSIFICATION ET L'IDENTIFICATION ANTHROPOMÉTRIQUES, par M. *Alphonse Bertillon,* chef du service d'identification à la Préfecture de police. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1890. In-8° jésus, avec 8 Planches en photocollographie. Prix : 3fr.

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1888.

PREMIÈRE SESSION.

Etant donnés deux axes rectangulaires Ox, Oy (*fig.* 1) *et un point* A *sur l'axe des* x, *on considère le*

Fig. 1.



faisceau des coniques pour lesquelles l'axe des y *est une directrice et le point* A *un sommet de l'axe focal.*

Par un point quelconque M du plan des axes passent deux coniques de ce faisceau, réelles ou imaginaires :

1° *Déterminer les parties du plan dans lesquelles doit être le point M pour que les deux coniques du faisceau qui passent par ce point soient réelles, et celles où il doit être pour que les deux coniques soient imaginaires. (La ligne de séparation est de degré supérieur au second.)*

2° *Reconnaître, d'après la position d'un point par lequel passent deux coniques réelles, le genre de ces coniques.*

3° *Trouver le lieu des points de contact des tangentes menées de l'origine des coordonnées à toutes les coniques du faisceau considéré.*

SOLUTION.

Soient α l'abscisse du foyer F correspondant à l'axe des y, e l'excentricité d'une des coniques du faisceau; cette conique a pour équation

$$(x-\alpha)^2+y^2=e^2x^2.$$

En écrivant qu'elle passe par le point A$(a, 0)$, on a, pour déterminer α, l'équation

$$(a-\alpha)^2=e^2a^2;$$

d'où, en admettant que e est un nombre positif ou négatif,

$$\alpha=a(1+e).$$

Remplaçant α par sa valeur, l'équation des coniques du faisceau s'écrit

$$(x-a-ae)^2+y^2=e^2x^2. \tag{1}$$

1° Soient X, Y les coordonnées du point M. Substituons-les dans l'équation (1); nous aurons, pour déterminer les excentricités des coniques qui passent par ce point, l'équation

$$(X - a - ae)^2 + Y^2 = e^2 X^2$$

ou, en ordonnant par rapport à e,

$$(2) \quad (X^2 - a^2)e^2 + 2a(X - a)e - [(X - a)^2 + Y^2] = 0.$$

La condition de réalité des racines de cette équation est

$$a^2(X - a)^2 + (X^2 - a^2)[(X - a)^2 + Y^2] \geqq 0$$

ou

$$(3) \qquad (X - a)[X(X^2 + Y^2) - a(X^2 - Y^2)] \geqq 0.$$

Le premier facteur change de signe quand le point M franchit la droite $X - a = 0$ menée par le point A parallèlement à l'axe des y, et le second facteur quand le point M franchit la strophoïde

$$X(X^2 + Y^2) - a(X^2 - Y^2) = 0,$$

symétrique par rapport à l'axe des x, ayant l'origine pour point double et pour tangentes en ce point les bissectrices des angles des axes, pour asymptote la droite $X + a = 0$, et passant par le point A. Or, dans l'intérieur de la boucle, l'inégalité est satisfaite; les régions hachurées sont donc celles où ne doit pas se trouver le point M, si l'on veut que les coniques soient réelles.

2° Si le point M est pris sur la droite $X - a = 0$, ailleurs qu'en A, l'équation (2) a une racine double infinie, F est à l'infini, et l'équation (1) se réduit à

$$x^2 - a^2 = 0,$$

c'est-à-dire aux deux droites BB' et DD'. Si le point M est en A, e est indéterminé, F aussi, ce qui devait être, puisque la conique (1) est déjà assujettie à passer par le point A, et qu'il n'y a plus que quatre conditions.

Si le point M est pris sur la strophoïde ailleurs qu'en

A, l'équation (2) a pour racine double $-\frac{a}{X+a}$. L'abscisse du point M étant comprise entre o et a, l'excentricité est comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1, et l'on a deux ellipses confondues; le foyer F est compris entre O et le milieu I de AO. Le point M étant en O, $e=-1$, $\alpha=0$, et la double conique se réduit à $y^2=0$. L'abscisse du point M étant comprise entre o et $-a$, l'excentricité est supérieure à 1, et l'on a deux hyperboles confondues. Enfin, le point M étant à l'infini sur la strophoïde, $e=-\infty$, $\alpha=-\infty$, et la double conique se réduit aux deux droites $x^2-a^2=0$, c'est-à-dire à BB' et à DD'.

Si le point M est pris sur l'axe des x, ailleurs qu'en A et en O, l'équation (2) a pour racines -1 et $\frac{X-a}{X+a}$; l'une des coniques est toujours le double axe des x, et l'autre est une ellipse si X est positif, une hyperbole si X est négatif et différent de $-a$, le système des deux droites BB' et DD' si $X=-a$. La position du foyer, dont l'abscisse $\alpha=a\frac{2X}{X+a}$, s'obtient sans difficulté.

Si le point M est pris à droite de BB', en dehors de l'axe des x, on substitue à e, dans l'équation (2), pour séparer les racines,

$$-\infty,\quad -1,\quad 0,\quad +1,\quad +\infty,$$

et l'on obtient

$$+,\quad -,\quad -,\quad 4aX-4a^2-Y^2,\quad +.$$

L'équation (2) a donc une racine comprise entre $-\infty$ et -1; la conique correspondante est une hyperbole et l'abscisse α de son foyer F est négative.

Pour discuter l'autre racine, construisons la parabole

$$4aX-4a^2-Y^2=0 \qquad \text{ou} \qquad (X-2a)^2+Y^2=X^2,$$

qui a pour directrice l'axe des y, pour foyer le symétrique O′ de O par rapport à A et pour tangentes aux points situés sur la verticale de O′ les tangentes en O à la strophoïde. Si le point M est à l'intérieur de cette parabole, $4aX - 4a^2 - Y^2$ est positif, et l'équation (2) a une racine comprise entre 0 et 1; la conique correspondante est une ellipse, et son foyer F est compris entre A et O′. Si le point M est à l'extérieur de cette parabole, $4aX - 4a^2 - Y^2$ est négatif, et l'équation (2) a une racine comprise entre 1 et $+\infty$; la conique correspondante est une hyperbole, et son foyer F est au delà de O′. Enfin, si le point M est sur la parabole, ailleurs qu'en A, l'équation (2) a une racine égale à 1; et la conique correspondante, comme cela était évident, est la parabole elle-même.

Si le point M est pris dans la boucle de la strophoïde, en dehors de l'axe des x, les substitutions précédentes donnant toutes des résultats négatifs, on substitue la demi-somme des racines $-\frac{a}{X+a}$, qui est comprise entre -1 et 0; on obtient

$$-\frac{X(X^2+Y^2)-a(X^2-Y^2)}{X+a}.$$

L'inégalité (3) montre que, à l'intérieur de la boucle, le numérateur est négatif, et, comme le dénominateur est positif, ce résultat est positif, et l'équation (2) a une racine comprise entre -1 et $-\frac{a}{X+a}$, et une entre $-\frac{a}{X+a}$ et 0; les coniques correspondantes sont deux ellipses et leurs foyers sont compris entre O et A.

Si le point M est pris à gauche de la strophoïde et à droite de DD′, en dehors de l'axe des x, les premières substitutions donnant toutes des résultats négatifs, on substitue encore la demi-somme des racines $-\frac{a}{X+a}$, qui est comprise ici entre $-\infty$ et -1; on obtient, comme tout à l'heure,

$$-\frac{X(X^2+Y^2)-a(X^2-Y^2)}{X+a}.$$

L'inégalité (3) montre que le numérateur est négatif, et, comme le dénominateur est positif, ce résultat est positif, et l'équation (2) a une racine comprise entre $-\infty$ et $-\frac{a}{X+a}$, et une entre $-\frac{a}{X+a}$ et -1; les coniques correspondantes sont deux hyperboles et leurs foyers sont à gauche de O.

Si le point M est pris sur DD', ailleurs qu'en C, l'équation (2) a une racine infinie et une racine égale à $-\frac{4a^2+Y^2}{4a^2}$; les coniques correspondantes sont le système des deux droites BB' et DD' et une hyperbole dont le foyer F a pour abscisse $-\frac{Y^2}{4a}$.

Si le point M est pris à gauche de DD', en dehors de l'axe des x, il n'y a plus qu'à faire les premières substitutions, et l'on obtient

$$+,\quad -,\quad -,\quad -,\quad +.$$

L'équation (2) a donc une racine comprise entre $-\infty$ et -1 et une entre 1 et $+\infty$; les coniques correspondantes sont deux hyperboles. L'abscisse du foyer F de l'une est négative, celle du foyer F de l'autre est supérieure à $2a$.

Nous avons vu que la conique (1) se réduisait à un système de deux droites pour $e=\infty$ et pour $e=-1$, c'est-à-dire lorsque le point M était pris sur BB', ou sur DD', ou sur l'axe des x. Pour voir s'il n'y aurait pas d'autres cas, formons Δ; on a

$$\Delta = -a^2e^2(1+e)^2.$$

qui donne encore la solution $e = 0$. La conique (1) correspondante est le système des deux droites imaginaires $(x-a)^2 + y^2 = 0$, qui se coupent en A, et le point correspondant M est un point quelconque de ces droites.

Pour que la conique (1) soit un cercle, il faut que $e = 0$; c'est la solution précédente.

Pour que ce soit une hyperbole équilatère, il faut que $e = \pm\sqrt{2}$, c'est-à-dire, en substituant dans l'équation (2), que le point M soit sur l'une des deux hyperboles équilatères

$$(\text{E}) \qquad X^2 - Y^2 + 2a(1 \pm \sqrt{2})X - a^2(1 \pm \sqrt{2})^2 = 0,$$

qui est alors l'une des coniques passant par le point M. Ces deux hyperboles ont l'axe des x pour axe, le point A pour sommet, et leurs asymptotes parallèles aux bissectrices des angles des axes; les abscisses des centres sont $-a(1 \pm \sqrt{2})$, et celles des foyers F, $a(1 \pm \sqrt{2})$. Elles sont bitangentes à la strophoïde : la première en deux points dont les abscisses sont $-a\,\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ et dont les ordonnées, $\pm a\sqrt{\frac{-8\sqrt{2}-11}{2}}$, sont imaginaires; la seconde en deux points dont les abscisses sont $-a\,\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et dont les ordonnées, $\pm a\sqrt{\frac{8\sqrt{2}-11}{2}}$, sont réelles et égales à $\pm\frac{a}{3}$ environ.

3° Les points de contact des tangentes menées de l'origine à toutes les coniques du faisceau sont, à l'intersection de ces coniques et de la polaire de l'origine par rapport à elles :

$$(4) \qquad (1+e)(x - a - ae) = 0.$$

En éliminant e entre les équations (1) et (4), on a l'équation du lieu. La solution $e = -1$ donne $y^2 = 0$, ce qui doit être; et l'autre solution, $e = \frac{x-a}{a}$, donne

$$a^2y^2 = x^2(x-a)^2 \quad \text{ou} \quad x(x-a) = \pm ay,$$

ce qui peut s'écrire

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(y \pm \frac{a}{2}\right)^2.$$

Le lieu se compose donc de deux paraboles qui se coupent à angle droit au point A et à l'origine, où les tangentes sont les bissectrices des angles des axes; elles ont pour foyer commun le point I et pour directrices les droites $y \pm \frac{a}{2} = 0$. Elles sont osculatrices à l'origine à la strophoïde qu'elles traversent; car, en cherchant l'équation aux abscisses des points de rencontre des deux courbes, on trouve

$$x^4(x-a) = 0.$$

Enfin, elles rencontrent la parabole $y^2 = 4ax - 4a^2$ et les deux hyperboles équilatères (E) aux points de contact avec ces courbes des tangentes issues de O, comme cela résulte de la définition même du lieu. C. B.

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1888.

SECONDE SESSION.

---

1. *On donne une ellipse rapportée à ses axes*

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \tag{1}$$

et, dans son plan, un point P(p, q) *par lequel on mène* *deux droites parallèles aux bissectrices des angles des axes. On considère toutes les coniques passant par les points d'intersection de ces droites avec l'ellipse donnée. Écrire l'équation générale de ces coniques ; trouver le lieu de leurs centres et distinguer les portions de cette courbe qui correspondent à des centres d'ellipses ou à des centres d'hyperboles.*

2. *On prend la polaire de l'origine des coordonnées par rapport à chacune des coniques et l'on abaisse, du point* P, *une perpendiculaire sur cette polaire. Trouver le lieu des pieds de ces perpendiculaires.*

3. *Parmi les coniques considérées se trouvent deux paraboles, trouver leurs foyers pour une position donnée du point* P *et les lieux de ces foyers lorsque le point* P *parcourt : 1° une des bissectrices des axes de l'ellipse donnée; 2° la circonférence circonscrite au rectangle des axes de cette ellipse.*

SOLUTION.

1. L'équation du faisceau des droites AB, CD parallèles aux bissectrices des angles des axes, menées par le point P, est

$$(x-p)^2-(y-q)^2=0,$$

et l'équation générale des coniques cherchées

$$(2)\qquad (x-p)^2-(y-q)^2+\lambda(a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2)=0.$$

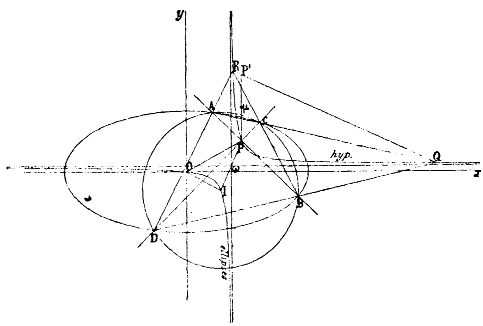
En éliminant λ entre les équations du centre

$$(3)\qquad \begin{cases} (x-p)+\lambda b^2x=0, \\ -(y-q)+\lambda a^2y=0, \end{cases}$$

on a l'équation du lieu

$$(4)\qquad a^2y(x-p)+b^2x(y-q)=0.$$

Il existe, comme on sait, trois valeurs de λ pour lesquelles la conique (2) se réduit à un faisceau de deux droites : l'une de ces valeurs est 0 et correspond aux droites AB et CD ; les deux autres, qu'il est inutile de chercher, correspondent aux droites AC et BD, AD et



BC ; ces trois faisceaux de droites font connaître trois points du lieu P, Q, R. La conique (1) correspondant à $\lambda = \infty$ fait connaître le point O. On sait aussi que, par les points de rencontre d'une conique et de deux droites également inclinées sur ses axes, on peut faire passer un cercle, qui correspond ici à la valeur de λ donnée par l'équation

$$1 + \lambda b^2 = -1 + \lambda a^2 \qquad \text{ou} \qquad \lambda = \frac{2}{a^2 - b^2}.$$

Cette valeur, substituée dans les équations (3), donne, pour les coordonnées du centre I du cercle, qui est un point du lieu,

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} p, \qquad y = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} q.$$

On voit que la droite OI est symétrique de la droite OP par rapport aux axes.

On sait encore que, par quatre points, on peut faire passer deux paraboles, qui correspondent ici aux valeurs de λ données par l'équation

$$(-1+\lambda a^2)(1+\lambda b^2)=0.$$

Ces valeurs, successivement substituées dans les équations (3), donnent, pour les coordonnées des centres des deux paraboles,

$$x=\frac{a^2}{a^2+b^2}p,\qquad y=\infty,\qquad x=\infty,\qquad y=\frac{b^2}{a^2+b^2}q.$$

Les équations

$$x=\frac{a^2}{a^2+b^2}p,\qquad y=\frac{b^2}{a^2+b^2}q$$

sont donc celles des diamètres des cordes parallèles aux axes des coordonnées, et, comme ces diamètres sont respectivement perpendiculaires aux cordes correspondantes, ce sont celles des axes des deux paraboles; d'ailleurs elles coïncident avec les équations des asymptotes de la conique (4),

$$a^2(x-p)+b^2x=0,\qquad a^2y+b^2(y-q)=0;$$

elles fournissent donc les coordonnées de son centre. Or, si l'on prend le milieu ω de la distance OI, on a, pour les coordonnées de ce point,

$$x=\frac{p}{2}+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\frac{p}{2}=\frac{a^2}{a^2+b^2}p,$$
$$y=\frac{q}{2}+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\frac{q}{2}=\frac{b^2}{a^2+b^2}q.$$

Le point ω est donc le centre cherché, et l'hyperbole est amplement déterminée.

Le genre de la conique (4) dépend du signe du produit

$$(1+\lambda b^2)(-1+\lambda a^2);$$

ces deux facteurs s'expriment, en fonction des coordonnées d'un point du lieu, à l'aide des équations (3), qui donnent

$$1 + \lambda b^2 = \frac{p}{x}, \qquad -1 + \lambda a^2 = -\frac{q}{y},$$

de sorte que le genre dépend du signe du produit xy. Si l'on suppose qu'on a pris pour angle des coordonnées positives celui qui contient le point P, un point du lieu dont les coordonnées sont de mêmes signes est un centre d'hyperbole, un point du lieu dont les coordonnées sont de signes contraires est un centre d'ellipse. La branche située dans l'angle $y\,\mathrm{O}x$ et qui contient les points P, Q, R correspond donc aux hyperboles, et l'autre située dans les deux angles adjacents et qui contient les points O et I correspond aux ellipses.

2. La polaire de l'origine, par rapport à la conique (2), et la perpendiculaire abaissée du point P sur cette polaire ont pour équations :

$$-p(x-p) + q(y-q) - \lambda a^2 b^2 = 0, \tag{5}$$

$$q(x-p) + p(y-q) = 0. \tag{6}$$

Les coordonnées d'un point du lieu vérifient les équations (5) et (6), et, comme l'équation (6) est indépendante de λ, elle est l'équation du lieu. La droite (5) ayant une direction constante, il suffit, pour construire la droite (6), de prendre la polaire du point O par rapport à l'une des coniques (2), par exemple par rapport au cercle ABCD, et de lui mener du point P une perpendiculaire. Or cette polaire est perpendiculaire à OI ; donc la droite (6) est la parallèle à OI menée par le point P.

3. Considérons la parabole correspondant à $\lambda = \frac{1}{a^2}$,

qui a pour axe la parallèle à Oy menée par ω. La polaire du point P par rapport à cette parabole, comme par rapport à toutes les coniques (4), est la droite QR. Si donc on prend le point de rencontre P′ avec QR de la parallèle à Oy menée par P, et le milieu M de PP′, M est le point de rencontre avec la parabole du diamètre PP′, la tangente en M est parallèle à QR et la normale lui est perpendiculaire. D'après un théorème connu, le milieu de la distance des points de rencontre de l'axe de la parabole avec ces deux droites est le foyer cherché. La polaire du point P a pour équation

$$b^2px + a^2qy - a^2b^2 = 0.$$

Remplaçons-y x par p : nous aurons, pour l'ordonnée du point P′,

$$y = b^2\frac{a^2 - p^2}{a^2q},$$

et, par suite, pour celle du point M,

$$y = \frac{a^2q^2 - b^2p^2 + a^2b^2}{2a^2q}.$$

La tangente en ce point, parallèle à la polaire, a pour équation

$$b^2p(x-p) + a^2q\left(y - \frac{a^2q^2 - b^2p^2 + a^2b^2}{2a^2q}\right) = 0,$$

et la normale

$$a^2q(x-p) - b^2p\left(y - \frac{a^2q^2 - b^2p^2 + a^2b^2}{2a^2q}\right) = 0.$$

Remplaçons, dans ces deux équations, x par $\dfrac{a^2}{a^2+b^2}p$, et prenons la demi-somme des valeurs correspondantes de y, nous aurons l'ordonnée du foyer

$$(7) \qquad y = b^2\frac{a^2 + b^2 + q^2 - p^2}{2(a^2+b^2)q};$$

son abscisse est

$$(8) \qquad x = \frac{a^2}{a^2+b^2}\,p.$$

Si le point P décrit la bissectrice de l'angle $y\,\mathrm{O}\,x$, on a

$$(9) \qquad p - q = 0;$$

s'il décrit celle de l'angle adjacent, on a

$$(9') \qquad p + q = 0.$$

Des équations (8) et (9), ou (8) et (9'), on tire p et q et on les porte dans l'équation (7); on a, pour les équations des deux premiers lieux,

$$xy = \frac{a^2 b^2}{2(a^2+b^2)}, \qquad xy = \frac{-a^2 b^2}{2(a^2+b^2)},$$

hyperboles rapportées à leurs asymptotes et dont on construit aisément les points de rencontre avec les bissectrices des angles des axes.

Si le point P décrit la circonférence indiquée, on a

$$(9'') \qquad p^2 + q^2 = a^2 + b^2 \qquad \text{ou} \qquad a^2 + b^2 - p^2 = q^2,$$

ce qui réduit l'équation (7) à

$$(7') \qquad y = b^2 \frac{q^2}{(a^2+b^2)q}.$$

Si q n'est pas nul, cette équation s'écrit

$$(7'') \qquad y = \frac{b^2}{a^2+b^2}\,q.$$

Des équations (8) et (7''), on tire p et q et on les porte dans l'équation (9''); on a, pour l'équation du troisième lieu,

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{a^2+b^2},$$

ellipse rapportée à ses axes, dont les longueurs se construisent sans difficulté. Si q est nul, $p = \pm\sqrt{a^2+b^2}$, y est indéterminé et $x = \dfrac{a^2}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$; le lieu se compose donc des tangentes à l'ellipse précédente aux points où elle rencontre l'axe des x.

Les résultats relatifs à la seconde parabole se déduisent de ceux qui précèdent en échangeant x et y, a et b, p et q ; on retrouve donc les deux hyperboles et l'ellipse précédentes; seulement, au lieu des tangentes aux points où cette ellipse rencontre l'axe des x, on a les tangentes aux points où elle rencontre l'axe des y. C. B.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1890.

Composition de Mathématiques.

On donne, dans un plan, une hyperbole équilatère H, dont l'équation par rapport à ses axes pris pour axes de coordonnées est

$$x^2 - y^2 = a^2;$$

d'un point M du plan, ayant pour coordonnées $x = p$, $y = q$, on mène des normales à cette courbe.

On demande :

1° De faire passer par les pieds de ces normales une nouvelle hyperbole équilatère, dont les normales en ces points soient concourantes, et de déterminer leur point de concours.

2° En désignant par K une hyperbole équilatère satisfaisant à cette condition, dans quelle région du plan doit être placé le point M pour qu'il y ait une hyperbole K correspondant à ce point.

3° Quelle ligne doit décrire le point M pour que l'hyperbole K soit égale à l'hyperbole H.

N. B. — On conservera les notations indiquées.

Composition française.

« En calculant la durée de la vie de Faraday, dit M. Tyndall, on voit que ce fils de forgeron, cet apprenti relieur, eut à choisir entre la Science désintéressée et une fortune considérable qu'il aurait aisément gagnée dans la Chimie analytique.

» Il choisit la première et mourut pauvre; mais il eut la gloire de maintenir très haut pendant quarante ans le renom scientifique de l'Angleterre parmi les autres nations. »

Montrer la portée d'un pareil exemple.

Composition de Physique et de Chimie.

I. Achromatisme des lentilles.
II. Dilatation de l'eau.
III. Oxyde de carbone.

N. B. — On tiendra compte de la concision avec laquelle sera rédigée la composition.

Composition de Trigonométrie.

Dans un triangle ABC, on donne

$$b = 5828^{\text{m}},755,$$
$$c = 4754^{\text{m}},824,$$
$$A = 75^\circ 35' 45''.$$

Calculer le côté a, les angles B et C, et la surface du triangle.

Composition en langues vivantes autres que l'allemand.

Ampère a laissé une trace ineffaçable partout où il a appliqué les efforts de son puissant esprit.

Ce profond penseur, ce génie universel, le plus souvent absorbé dans ses méditations et planant si haut au-dessus des misères terrestres, aurait eu le droit de porter avec orgueil l'éclat de son immense savoir et la gloire de ses découvertes incomparables : il fut, au contraire, modeste, timide jusqu'à la gaucherie, bon et affectueux comme les âmes simples, et, comme elles, subit toutes les vicissitudes humaines.

Après la mort affreuse de son père, qui plongea sa jeunesse dans un désespoir où sa belle intelligence parut sombrer un instant, il revint peu à peu à la vie pour s'épanouir bientôt dans des rêves de poésie et de tendresse. Lui-même a tracé, jour par jour, sur des pages à demi couvertes d'Algèbre, le récit naïf des émotions de son cœur de vingt ans.

Le même charme de tendresse et de dévouement se retrouve dans les lettres qu'il écrivait à sa femme presque mourante restée à Lyon avec son fils Jean-Jacques.

Le cœur se serre à la lecture de ces pages touchantes, en voyant celui qui devait être le grand Ampère obligé de s'exiler à Bourg, et de consumer misérablement les plus belles années de sa jeunesse pour gagner le pain quotidien de deux êtres chéris.

Composition de Géométrie descriptive.

Un cube de 15^{cm} de côté a l'une de ses trois directions d'arêtes verticale, et une autre perpendiculaire au plan vertical.

Dans la face postérieure, considérons l'arête de gauche, l'arête inférieure et le sommet situé à l'intersection des deux autres arêtes.

La droite passant par ce sommet et par le sommet opposé du cube, engendrerait, si elle tournait successivement autour des deux arêtes considérées, deux hyperboloïdes qu'on suppose remplis.

Représenter, par ses projections, le corps formé par la partie commune aux deux solides ainsi obtenus, en le limitant en haut et en bas par les plans des deux faces horizontales du cube, et en arrière par celui de la face postérieure.

On placera au centre du cadre de l'épure la projection horizontale du point de rencontre des axes des deux hyperboloïdes, et à 1^{cm} au-dessus, sur une parallèle aux petits côtés, la projection verticale du même point.

En fait de constructions, et en dehors de celles qui se rapportent aux points remarquables, on ne laissera subsister, dans le tracé à l'encre, que la détermination d'un point de chaque courbe et celle de la tangente en ce point.

On n'indiquera aucune asymptote.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES POUR LA LICENCE EN JUILLET 1889, A RENNES;

PAR M. GEORGES MAUPIN,
Maître auxiliaire au lycée de Rennes.

1° *Trouver l'équation différentielle des courbes tracées sur une surface donnée, telles que l'angle formé par la tangente en un point quelconque avec la tangente conjuguée se projette sur le plan* xoy *suivant un angle droit. Montrer qu'il passe en chaque point de la surface deux courbes jouissant de cette propriété et qu'elles sont conjuguées l'une de l'autre. Effectuer l'intégration dans le cas où la surface donnée a pour équation*

$$8z = (x^2 + y^2)^2 + 2c^2(y^2 - x^2).$$

Soit (x, y, z) un point appartenant à l'une des courbes cherchées. La projection sur le plan des xy de la tangente en ce point à la courbe est représentée par

$$(1) \qquad \frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy}.$$

D'autre part, la tangente conjuguée est représentée par l'équation du plan normal

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

et l'équation qu'on tire de celle-ci en la différentiant par rapport au paramètre dont dépendent x, y, z, p et q. Cette équation

$$(2) \qquad -dz = dp(X - x) + dq(Y - y) - p\,dx - q\,dy,$$

ou simplement

$$(3) \qquad (X - x)dp + (Y - y)dp = 0,$$

est justement la projection de la tangente conjuguée sur le plan des xy ; comme les droites (1) et (2) sont rectangulaires, on a

$$(4) \qquad dp\,dy - dq\,dx = 0.$$

C'est l'équation des lignes demandées, qu'on peut encore écrire, en développant dp et dq,

$$(5) \qquad S(dy^2 - dx^2) + (r - t)dx\,dy = 0.$$

Cela posé :

L'équation (5) étant du second degré en $\frac{dy}{dx}$, par chaque point de la surface il passe deux des lignes considérées.

La tangente T_1 à l'une de ces lignes est conjuguée de T_2, tangente à l'autre. Soit, en effet, C_1 la conjuguée de T_1 : par hypothèse C_1 et T_1 sont rectangulaires en projection ; mais la relation (5), où le produit des racines est égal à -1, montre qu'il en est de même de T_1 et T_2 ; donc T_2 et C_1 coïncident en projection, et par suite dans l'espace (elles sont toutes deux dans le plan tangent à la surface au point x, y, z).

Appliquons à la surface

$$(6) \qquad 8z = (x^2 + y^2)^2 + c^2(y^2 - x^2);$$

une première différentiation donne

$$\begin{cases} 2p = x(x^2 + y^2) - c^2 x, \\ 2q = y(x^2 + y^2) + c^2 y; \end{cases}$$

par une deuxième différentiation, on a

$$(7) \qquad \begin{cases} 2r = 3x^2 + y^2 - c^2, \\ 2t = 3y^2 + x^2 + c^2, \\ 2s = 2xy, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} r - t = x^2 - y^2 - c^2, \\ s \quad\;\; = xy; \end{cases}$$

l'équation (5) devient donc

$$xy(dy^2 - dx^2) + (x^2 - y^2 - c^2)\,dx\,dy = 0,$$

équation générale des coniques homofocales, qu'on intégrera en se reportant au numéro d'avril 1888 des *Nouvelles Annales* (solution de M. Étienne Pomey).

Ainsi, dans ce cas, les lignes demandées se projettent sur le plan des xy suivant les deux systèmes d'ellipses et d'hyperboles ayant leurs foyers sur ox, à la distance C de l'origine.

Si, en particulier, $C = 0$, on voit facilement que la relation (8) donne, d'une part, des cercles concentriques à l'origine, d'autre part, des droites issues de l'origine. Les lignes demandées sont ici les parallèles et les méridiens de la surface

$$8z = (x^2 + y^2)^2,$$

qui est de révolution autour de oz.

2° *Trouver l'équation générale des surfaces qui satisfont aux deux équations simultanées aux dérivées partielles*

$$(8) \qquad \begin{cases} \qquad s = xy, \\ r - t = x^2 - y^2 - c^2. \end{cases}$$

Les équations (7) montrent que la surface

$$(9) \qquad 8z_1 = (x^2 + y^2)^2 + c^2(y^2 - x^2)$$

est une intégrale des équations proposées. Posons alors

$$z = z_1 + \zeta$$

et désignons par r_1, s_1, t_1; ρ, σ, τ, les quantités qui pour z_1 et ζ correspondent à r, s, t pour z. En substituant cette valeur $z_1 + \zeta$ dans les équations (8), on a simplement

$$(10) \qquad \begin{cases} \sigma = 0, \\ \rho - z = 0. \end{cases}$$

Prenons d'abord l'équation $\sigma = 0$; intégrant une première fois par rapport à x, on a

$$\frac{d\zeta}{dy} = c_1 + \varphi(y);$$

une deuxième intégration par rapport à x donne ensuite

$$(11) \qquad \zeta = c_1 + c_2 + \varphi(y) + \psi(x).$$

Cette valeur ζ satisfaisant à la deuxième équation (10), on a

$$(12) \qquad \varphi''(y) - \psi''(x) = 0;$$

mais φ dépend uniquement de y, donc aussi φ'' dépend uniquement de y; ψ dépend uniquement de x, donc aussi ψ''. Il en résulte que $\varphi''(y)$ et $\psi''(x)$ sont tous deux égaux à une même constante K et, par suite, on a

$$\begin{cases} \varphi = \dfrac{Ky^2}{2} + My + M', \\ \psi = \dfrac{Kx^2}{2} + Nx + N', \end{cases}$$

où M, M', N, N' sont des constantes arbitraires.

Remplaçant dans ζ, φ et ψ par ces valeurs, puis portant dans (10), on obtient

$$z = z_1 + \frac{Ky^2}{2} + \frac{Kx^2}{2} + My + Nx + M + M' + C_1 + C_2$$

ou, en tirant z_1 de (9),

$$z = \frac{1}{8}(x^2+y^2)^2 + \frac{1}{8}c^2(y^2 - x^2) \\ + \frac{K}{2}y^2 + \frac{K}{2}x^2 + My + Nx + M + M' + C_1 + C_2,$$

c'est-à-dire

$$z = \frac{1}{8}(x^2 + y^2)^2 + Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F,$$

où A, C, D, E, F sont cinq constantes arbitraires. Telle est l'équation générale demandée.

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES D'APRÈS LEUR DÉFINITION [1];

PAR M. L. MALEYX.

Définitions.

II. Si l'on considère une suite de couples de deux points situés sur une ligne droite, et tels que le produit des distances des deux points formant un couple à un point fixe de la droite soit constant, ces couples de points sont dits placés *en involution*.

Le point fixe de la droite est le *centre* de l'involution, et le produit fixe en est la *puissance*.

Il résulte de cette définition que si l'on considère une suite de cercles ayant un même axe radical, leurs points d'intersection avec une droite quelconque de leur plan sont situés en involution, le centre de cette involution étant placé au point commun de la droite considérée et de l'axe radical commun aux cercles, et la puissance de l'involution étant celle de ce point par rapport aux cercles.

---

[1] *Voir* même Tome, p. 240.

Il en résulte encore que, si l'on considère sur une droite quatre points se correspondant deux à deux, que par deux de ces points correspondants on fasse passer un cercle, et par les deux autres un deuxième cercle, tous les autres cercles ayant même axe radical avec les deux précédents formeront, par leur intersection avec la droite, une involution complètement déterminée par les quatre points considérés.

Ainsi, un système de points en involution est déterminé par deux cercles et une droite situés dans le même plan : cette définition ne suppose même pas les deux couples de points donnés réels ; en effet, les deux cercles donnés et la droite associée de leur plan commun peuvent ne pas tous se couper réellement deux à deux.

Si les deux cercles, qui, pris avec une droite de leur plan commun, déterminent une involution, ne coupent pas réellement leur axe radical, ou le coupent réellement en deux points situés d'un même côté de la droite, il existe, parmi les cercles ayant même axe radical avec les deux cercles donnés, deux cercles réels tangents à la droite en deux points qui se correspondent chacun à lui-même, et qui sont dits *points doubles de l'involution;* ces points doubles sont placés à égale distance du centre de l'involution et de part et d'autre de ce centre. Dans ce cas, deux points formant un couple sont essentiellement placés d'un même côté du centre, et de telle sorte que deux points d'un même couple comprennent deux points d'un autre couple, ou soient compris entre ces deux points, si ces quatre points sont situés d'un même côté du centre; la puissance de l'involution est alors positive.

Dans le cas particulier où l'axe radical commun aux cercles deviendrait parallèle à la droite, le centre de l'involution ainsi que l'un des points doubles passeraient à l'infini; le second point double resterait à distance finie, au point de rencontre de la droite et de la ligne des centres des cercles; deux points correspondants quelconques seraient placés à égale distance du point double restant à distance finie; la puissance de cette involution serait infinie.

Si, au contraire, les deux cercles, qui, pris avec une droite de leur plan commun, déterminent une involution, coupent réellement leur axe radical en deux points situés de part et d'autre de la droite, deux points d'un couple se trouvent placés de part et d'autre du centre de l'involution, un seul des points d'un couple se trouve compris entre deux points d'un autre couple; il n'existe pas dans ce cas de point double réel; la puissance de l'involution est alors négative.

Dans tous les cas, si deux points d'une involution forment un couple, les deux points symétriques de ceux-là par rapport au centre forment aussi un couple; le point correspondant au centre passe à l'infini.

Nous avons vu au commencement du présent numéro que deux couples de points a et a', b et b', situés sur une droite déterminaient une involution; si c et c' sont deux points d'un autre couple de la même involution, nous donnerons, pour abréger, la dénomination de *rapport involutif* du point c par rapport aux deux systèmes de points a et a', b et b', au rapport des puissances du point c par rapport aux deux systèmes de points a et a', b et b'; soit : $\frac{ca \times ca'}{cb \times cb'}$.

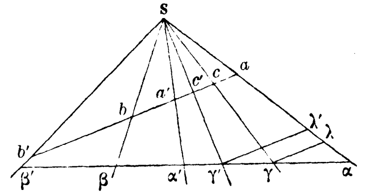
D'après le théorème I, établi au numéro précédent, il est évident que le **rapport involutif** du point c est égal à celui du point c' qui forme couple avec lui; et aussi que, si les **rapports involutifs** de deux points de la droite par rapport à a et a', b et b' sont égaux, ces deux points forment une involution avec a et a', b et b'.

Si l'on considère un système de points en involution et qu'on les unisse par des lignes droites à un point fixe S, pris hors de la droite qui les contient, le système de ces droites de jonction forme un faisceau qui porte le nom de *faisceau en involution*, le point S en est le sommet; dans le cas où l'involution renferme des points doubles, les rayons qui passent par ces points sont dits *rayons doubles*.

III. Théorème. — *Toute sécante rectiligne à un faisceau en involution, ne passant pas par le sommet, détermine par ses intersections avec les rayons du faisceau un système de points en involution.*

Soit $\mathrm{S}aa'bb'cc'$ un faisceau en involution (*fig.* 17), coupons-le par la sécante rectiligne $\beta'\alpha$ rencontrant les rayons $\mathrm{S}a$, $\mathrm{S}a'$, $\mathrm{S}b$, $\mathrm{S}b'$, $\mathrm{S}c$, $\mathrm{S}c'$, respectivement en α, α', β, β', γ, γ'; par les points γ, γ', menons $\gamma\lambda$, $\gamma'\lambda'$, parallèles à $b'a$.

Fig. 17.



De la considération des couples de triangles semblables : $\gamma\alpha\lambda$ et $\gamma'\alpha\lambda'$, $\mathrm{S}ca$ et $\mathrm{S}\gamma\lambda$, $\mathrm{S}c'a$ et $\mathrm{S}\gamma'\lambda'$, on déduit les égalités de rapports

$$\frac{\gamma\alpha}{\gamma\lambda} = \frac{\gamma'\alpha}{\gamma'\lambda'}, \qquad \frac{\gamma\lambda}{ca} = \frac{\mathrm{S}\gamma}{\mathrm{S}c}, \qquad \frac{\mathrm{S}\gamma'}{\mathrm{S}c'} = \frac{\gamma'\lambda'}{c'a}.$$

Multipliant ces trois égalités membre à membre et réduisant, on a

$$(1) \qquad \frac{\gamma\alpha}{ca} \times \frac{S\gamma'}{Sc'} = \frac{\gamma'\alpha}{c'a} \times \frac{S\gamma}{Sc}.$$

Par des considérations analogues, on trouve

$$(2) \qquad \frac{\gamma\alpha'}{ca'} \times \frac{S\gamma'}{Sc'} = \frac{\gamma'\alpha'}{c'a'} \times \frac{S\gamma}{Sc},$$

$$(3) \qquad \frac{\gamma\beta}{cb} \times \frac{S\gamma'}{Sc'} = \frac{\gamma'\beta}{c'b} \times \frac{S\gamma}{Sc},$$

$$(4) \qquad \frac{\gamma\beta'}{cb'} \times \frac{S\gamma'}{Sc'} = \frac{\gamma'\beta'}{c'b'} \times \frac{S\gamma}{Sc}.$$

Multipliant membre à membre les égalités (1) et (2), et séparément les égalités (3) et (4), puis divisant la première ainsi obtenue par la deuxième, on a

$$\frac{\gamma\alpha.\gamma\alpha'}{\gamma\beta.\gamma\beta'} \times \frac{cb.cb'}{ca.ca'} = \frac{\gamma'\alpha.\gamma'\alpha'}{\gamma'\beta.\gamma'\beta'} \times \frac{c'b.c'b'}{c'a.c'a'}.$$

Or, les deux rapports $\frac{ca.ca'}{cb.cb'}$, $\frac{c'a.c'a'}{c'b.c'b'}$ sont égaux, car ce sont les rapports involutifs des deux points correspondants c et c' par rapport aux couples de points a et a'. b et b', qui sont en involution avec eux; il en résulte l'égalité des rapports $\frac{\gamma\alpha.\gamma\alpha'}{\gamma\beta.\gamma\beta'}$ et $\frac{\gamma'\alpha.\gamma'\alpha'}{\gamma'\beta.\gamma'\beta'}$, et comme ces rapports sont les rapports involutifs des points γ et γ' par rapport aux couples de points α et α', β et β', il s'ensuit que ces six points font partie de l'involution déterminée par les couples de points α et α', β et β' (*fin du numéro précédent*).

Remarque I. — Si l'involution définie par les couples de points a et a', b et b' a des points doubles réels, il en est de même de celle qui est définie par les couples de points α et α', β et β', et les points doubles des deux involutions sont deux à deux sur les mêmes rayons ; mais il n'en est pas de même des centres de ces deux involutions, car le centre de chacune d'elles est situé sur le rayon conjugué de celui qui est parallèle à la direction de la sécante ; dès lors, ils ne peuvent être situés sur le même rayon que si les deux sécantes sont parallèles.

Remarque II. — Dans un faisceau en involution il existe toujours, et il n'existe en général qu'un système de rayons rectangulaires; en effet, si nous coupons le faisceau par une sécante quelconque, les points de rencontre de cette droite et des rayons du faisceau forment un système de points en involution. Le cercle variable passant par deux de ces points associés, et par le sommet du faisceau, coupe le rayon qui passe par le centre en un second point fixe; d'après la propriété des sécantes menées d'un point à un cercle. Dès lors il suffira, pour avoir des rayons rectangulaires, de faire passer par ce point et le sommet du faisceau un cercle ayant son centre sur la droite, les rayons passant par les points communs de ce cercle et de la droite seront associés et rectangulaires. Il n'y a, en général, qu'un cercle passant par deux points et ayant son centre sur une droite donnée, d'où résulte qu'il n'y a, en général, qu'un système de rayons rectangulaires. Il ne peut y avoir indétermination que si la droite était perpendiculaire au milieu de celle qui suit les deux points; dans ce cas, tous les rayons associés seraient rectangulaires.

Involution des diamètres conjugués des coniques à centre, et applications.

IV. Nous avons vu au Chapitre I, n^{os} IV et XIV, que les parallèles à deux diamètres conjugués d'une section elliptique, ou hyperbolique, menées par le sommet du cône, déterminaient, sur l'intersection de leur plan avec celui de la base circulaire, deux points dont le produit des distances à un point fixe de cette droite était constant ; il résulte du numéro précédent que ces parallèles forment un faisceau en involution ; qu'il en est de même des diamètres conjugués de ces deux courbes qui forment un faisceau superposable sur le précédent.

Le faisceau des diamètres conjugués d'une section elliptique n'a point de rayons doubles, puisque le centre de l'involution qu'ils déterminent sur l'intersection du plan de l'ellipse et de celui de la directrice circulaire est situé entre deux points conjugués quelconques (n° IV, Ch. I).

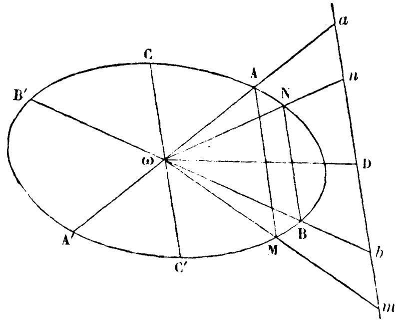
Au contraire, le faisceau des diamètres conjugués de l'hyperbole admet toujours deux rayons doubles qui coïncident avec les asymptotes, comme cela résulte des propriétés des diamètres conjugués de cette courbe, établies au n° XIV (Ch. I). Du numéro précédent résulte alors : 1° *que le système des diamètres conjugués d'une ellipse ou d'une hyperbole détermine un système de points en involution sur une droite quelconque du plan de la courbe ;* 2° *que le centre de cette involution est le point où la droite est rencontrée par le diamètre conjugué de sa direction.*

Nous nous proposons actuellement de généraliser le lemme établi au n° VII (Ch. I).

Si par deux des extrémités de deux diamètres conjugués d'une ellipse on mène deux sécantes parallèles, les secondes extrémités de ces sécantes sont celles de deux autres diamètres conjugués.

Soient ω une ellipse (*fig.* 18), ωA, ωB, deux diamètres conjugués de la courbe ; par les points A et B menons les cordes parallèles AM, BN, je dis que ωM et ωN forment un système de deux diamètres conjugués. En effet, construisons le diamètre ωC parallèle aux cordes

Fig. 18.



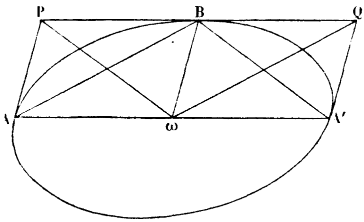
AM, BN, et son conjugué ωD qui les divise en parties égales; menons la droite am parallèle arbitraire à ωC, le faisceau des quatre droites ω, ABCD détermine l'involution des diamètres conjugués, et D est le centre de l'involution des points de rencontre des rayons de ce faisceau avec am. Or on a évidemment $Dn = Db$ et $Dm = Da$, puisque deux parallèles sont coupées en parties proportionnelles par plusieurs droites issues d'un point; dès lors on a : $Dm \times Dn = Da \times Db$, ce qui montre que ωM, ωN sont conjugués dans le faisceau, et, en conséquence, forment un système de diamètres conjugués.

Remarque I. — Cette propriété a également lieu pour l'hyperbole en définissant, comme nous l'avons fait, l'extrémité d'un diamètre qui ne rencontre pas la courbe.

Le produit des segments interceptés sur une tangente à une ellipse, entre le point de contact et ses *points de rencontre avec deux diamètres conjugués, est égal au carré du demi-diamètre parallèle à la direction de la tangente.*

Soient ω une ellipse (*fig.* 19), AA' un diamètre quelconque, PQ une parallèle tangente en B ; ωB sera le dia-

Fig. 19.



mètre conjugué de AA', et B le centre de l'involution que détermine sur PQ le faisceau des diamètres conjugués de l'ellipse. Menons les tangentes AP, $A'Q$ aux extrémités du diamètre AA'; elles sont parallèles à ωB et déterminent les deux parallélogrammes ωAPB, $\omega A'QB$.

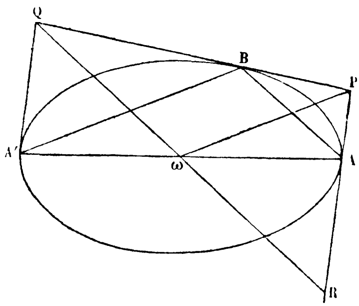
Joignons par des lignes droites ωP, ωQ, AB, $A'B$; ωP, ωQ, sont deux diamètres conjugués, car ils sont respectivement parallèles à $A'B$, AB, qu'ils divisent en parties égales; dès lors, le produit des segments BP, BQ, qu'ils interceptent sur la tangente est égal à la puissance de l'involution déterminée sur cette droite par le faisceau des diamètres conjugués; or ce produit est visiblement égal à $\omega A \times \omega A' = \overline{\omega A}^2$, puisque $\omega A = PB$, et $\omega A' = BQ$. C. Q. F. D.

Une tangente en un point variable d'une ellipse intercepte sur deux tangentes parallèles fixes, à partir de leurs points de contact, deux segments dont le pro-

duit est constant et égal au carré du demi-diamètre parallèle à la direction des tangentes fixes.

Soient ω une ellipse (*fig.* 20), AP, A'Q deux tangentes fixes parallèles, dont les points de contact A, A' sont

Fig. 20.



diamétralement opposés, PQ une tangente mobile dont le point de contact est B; traçons les droites AB, A'B, et les diamètres ωP, ωQ.

Le point P d'intersection des polaires de A et B est le pôle de AB par rapport à l'ellipse; donc la polaire de tout point de AB et en particulier de celui qui est situé à l'infini, passe par le point P, n° XIX, Chap. I; or la polaire du point situé à l'infini sur AB est le diamètre conjugué de la direction de cette droite; donc ωP divise AB en deux parties égales. On verrait de même que ωQ divise A'B en deux parties égales, et il en résulte que chacun des diamètres ωP, ωQ divisant en parties égales les cordes parallèles à l'autre, ces deux diamètres sont conjugués.

D'après le théorème précédent, le produit des segments AP, AR, interceptés sur la tangente AP par les deux diamètres conjugués ωP, ωQ, est égal au carré du demi-diamètre parallèle à AP; mais les deux triangles

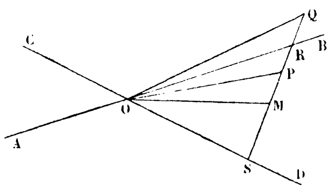
ωAR, ωA'Q sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux, d'où résulte l'égalité des côtés AR, A'Q, et, en conséquence, le produit AP $\times$ A'Q est aussi égal au carré du demi-diamètre parallèle aux tangentes AP, A'Q.

Remarque II. — Ces deux propositions s'appliquent également à l'hyperbole : établissons la première, la seconde s'en déduit d'après les mêmes considérations que pour l'ellipse.

Le produit des segments interceptés sur une tangente à une hyperbole entre le point de contact et ses points de rencontre avec deux diamètres conjugués est égal au carré du demi-diamètre parallèle à la direction de la tangente.

Soient AB, CD, les asymptotes d'une hyperbole dont le centre est O (*fig.* 21), RS une tangente à cette courbe. D'après ce que nous avons vu au n° XVII,

Fig. 21.



Chap. I, son point de contact est placé au milieu M du segment RS intercepté entre les asymptotes, et MR représente le demi-diamètre parallèle à la direction de la tangente MR.

Dans l'involution déterminée sur la tangente par le faisceau des diamètres conjugués, M est le centre, et R et S sont les points doubles; on en conclut

$$\overline{MR}^2 = MP \times MQ,$$

si P et Q sont les points de rencontre de deux diamètres conjugués avec la tangente, ce qui démontre le théorème énoncé.

Enfin, **et c'est là une conséquence importante du numéro précédent**, *la perspective d'un faisceau en involution sur un plan est encore un faisceau en involution*, puisqu'un rayon du faisceau donné et sa perspective rencontrent au même point l'intersection de leurs plans. (*A suivre.*)

RÉALISATION ET USAGE DES FORMES IMAGINAIRES EN GÉOMÉTRIE.

CONFÉRENCES DONNÉES PAR M. MAXIMILIEN MARIE
au Collège Stanislas, à Sainte-Barbe, à l'École Sainte-Geneviève et à l'École Monge (¹).

DES PÉRIODES DES INTÉGRALES.

13. Tous les parcours se ramenant les uns aux autres, nous pouvions donc réduire les chemins à considérer à des chemins composés d'arcs des deux enveloppes et d'arcs de conjuguées; d'un autre côté, comme l'intégrale $\int y\,dx$ ne peut s'accroître de constantes que dans des chemins fermés, à la fois par rapport à la variable et à la fonction, nous rechercherons les périodes d'une intégrale dans les parcours d'anneaux fermés de la courbe réelle, de l'enveloppe imaginaire et des conjuguées.

Des périodes engendrées dans le parcours d'anneaux fermés de la courbe réelle. — Si la courbe

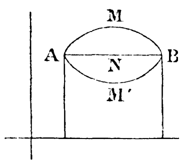
---

(¹) *Voir* même tome, p. 385.

réelle représentée par l'équation $f(x,y)=0$ du lieu considéré comprend quelques anneaux fermés, tels que AMBM'A (*fig.* 12), l'intégrale quadratrice de ce lieu, $\int y\,dx$, admettra évidemment pour périodes les aires enfermées respectivement dans ces différents anneaux fermés.

En effet, si le point $[x,y]$ parcourt un nombre quelconque de fois le chemin AMBM'A, l'intégrale $\int y\,dx$, durant le trajet AMB, s'augmentera de l'aire du diamètre ANB, conjugué des cordes de l'anneau parallèles à l'axe des y et de l'aire AMBNA du demi-anneau supérieur au-dessus de son diamètre, tandis que, dans le

Fig. 12.



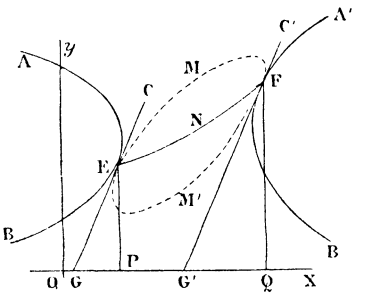
chemin BM'A, elle s'augmentera de l'aire, prise avec le signe —, du même diamètre et de l'aire BM'ANB, prise positivement, comprise entre la branche inférieure de l'anneau et le diamètre, aire d'ailleurs égale à la première, de sorte que, à la fin du parcours, l'aire engendrée sera celle comprise dans l'anneau AMBM'A.

Mais le parcours de la courbe réelle pourra donner lieu à la formation d'autres périodes qu'on n'apercevait pas tout d'abord et sur lesquelles nous reviendrons après avoir traité des périodes imaginaires engendrées dans le parcours des anneaux fermés de conjuguées.

Des périodes engendrées dans les parcours des anneaux fermés de conjuguées. — Le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire enfermée dans l'intérieur d'un anneau fermé d'une conjuguée quelconque d'un lieu $f(X, Y) = 0$ est l'une des périodes de la quadratrice $\int Y\,dX$ de ce lieu. En effet, soient AB, A′B′ (*fig.* 13) deux branches de la courbe réelle comprenant entre elles une série de conjuguées fermées, telles que EMFM′E; soit ENF le lieu des milieux des cordes réelles de cette conjuguée parallèles aux deux tangentes EG, FG′ à la courbe réelle : l'intégrale $\int y\,dx$ prise le long du chemin EMP se composera, d'après une des propositions qui précèdent :

De l'aire GENFG′G du diamètre ENF rapporté à

Fig. 13.



l'ancien axe des X et à une parallèle aux cordes réelles de la conjuguée;

De l'aire réelle du triangle G′FQ, diminuée de l'aire aussi réelle du triangle GEP;

Enfin, de l'aire EMFNE, comprise entre la demi-conjuguée et son diamètre, cette aire étant affectée du signe $+\sqrt{-1}$.

Mais si, arrivé en F, le point décrivant $[x, y]$ parcourt ensuite la branche inférieure FM′E de la conjuguée, dans ce nouveau parcours, l'intégrale $\int y\,dx$ s'accroîtra :

De l'aire FNEGG′F égale et de signe contraire à GENFG′G;

De l'aire réelle du triangle GEP diminuée de l'aire aussi réelle du triangle G'FQ, lesquelles détruiront les aires des mêmes triangles, engendrées d'abord avec des signes contraires;

Enfin, de l'aire F'M'ENF égale à EMFNE et engendrée avec le même signe $+\sqrt{-1}$.

En sorte que, dans le parcours entier du contour EMFM'E, l'intégrale $\int y\,dx$ s'accroîtra seulement du produit par $\pm\sqrt{-1}$ de l'aire enfermée dans l'anneau de la conjuguée, $\sqrt{-1}$ devant être affecté du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que le sens du mouvement aura été EMFM'E ou EM'FME.

Extension du second théorème d'Apollonius

$$\pi a' b' \sin\theta = \pi ab,$$

relatif aux coniques, aux courbes algébriques de tous les degrés. — Ce second théorème d'Apollonius, en ce qui concerne l'ellipse, ne constitue qu'un fait évident, puisqu'il signifie simplement que l'aire d'une ellipse reste la même, soit qu'on la rapporte à ses axes ou à deux de ses diamètres conjugués.

Mais, appliqué à l'hyperbole, ce même théorème signifie que toutes les ellipses conjuguées d'une même hyperbole ont même aire.

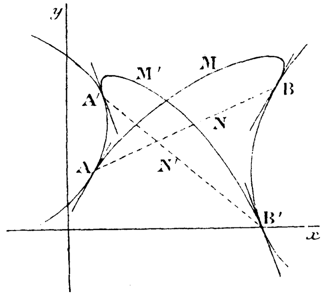
C'est ce théorème que nous allons étendre aux courbes algébriques de tous les degrés; il consiste en ce que les conjuguées fermées d'un même lieu, comprises entre les mêmes branches de la courbe réelle, ont toutes même aire.

Ce théorème est pour ainsi dire évident; car, dans l'hypothèse contraire, l'intégrale $\int y\,dx$ aurait une infinité de périodes imaginaires, c'est-à-dire serait complètement indéterminée.

Mais le théorème de Cauchy en fournira une démonstration directe :

Soient AMBNA et A'M'B'N'A' (*fig.* 14) deux demi-conjuguées voisines, comprises entre les mêmes branches AA', BB' de la courbe réelle : les valeurs de l'intégrale $\int y\,dx$ prises d'abord le long du chemin AMB, ensuite le long du chemin AA'M'B'B seront égales, d'après le théorème de Cauchy; les parties imaginaires de ces deux valeurs seront donc les mêmes. Mais la

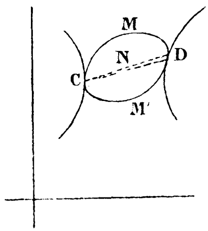
Fig. 14.



seule partie imaginaire de la première somme sera l'aire AMBNA comprise entre la première demi-conjuguée et le diamètre ANB, lieu des milieux de ses cordes réelles; de même dans la seconde somme, la seule partie imaginaire sera l'aire A'M'B'N'A' comprise entre la seconde demi-conjuguée et le diamètre A'N'B', lieu des milieux de ses cordes réelles; donc les demi-aires des deux conjuguées seront égales.

Nouvelle généralisation du même théorème. — Non seulement toutes les conjuguées fermées comprises entre les mêmes branches de la courbe réelle ont même aire, mais encore si l'on rejoignait deux points quelconques C et D (*fig.* 15) de ces deux branches par un chemin quelconque CMD, et qu'on le fermât par le lieu DM'C des points imaginaires conjugués de ceux qui constitueraient CMD, l'aire CMDM'C serait encore égale à celle d'une quelconque des conjuguées. En effet, si l'on se reporte à ce qui a été dit de la valeur de l'intégrale $\int y\,dx$ prise le long d'un arc de l'enveloppe imaginaire, mais qui conviendrait également à la valeur de la même intégrale prise le long d'un chemin quel-

Fig. 15.



conque, en appliquant les formules, trouvées alors, aux deux arcs CMD et CM'D. On aura

$$I = 2S_1 - \frac{S+S'}{2} + \frac{S-S'}{2}\sqrt{-1}$$

et

$$I' = 2S_1 - \frac{S+S'}{2} - \frac{S-S'}{2}\sqrt{-1},$$

S_1 désignant l'aire du lieu CND des milieux des cordes joignant les points imaginaires conjugués des deux arcs CMD et CM'D, S et S' les aires des segments correspondant aux arcs CMD et CM'D.

Mais l'intégrale prise le long de DM'C étant égale et de signe contraire à l'intégrale prise le long de CM'D, l'intégrale le long de CMDM'C sera la différence entre I et I' ou $(S - S')\sqrt{-1}$, c'est-à-dire le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire enveloppée par l'anneau CMDM'C.

D'un autre côté, le chemin CMDM'C pouvant être considéré comme une déformation du chemin constitué par une conjuguée fermée, les intégrales prises le long de l'une et l'autre seront égales; donc le contour CMDM'C, constitué comme on l'a dit, enveloppera une aire égale à celle d'un anneau fermé de conjuguée compris entre les mêmes branches de la courbe réelle.

Si les deux parties CMD et CM'D n'étaient plus formées de points imaginaires conjugués deux à deux, l'intégrale prise le long de CMDM'C n'en resterait pas moins l'une des périodes de $\int y\,dx$, mais elle n'aurait plus une représentation géométrique, simple parce que S_1 n'aurait pas la même valeur dans I et dans I', et que, d'ailleurs, les aires S et S' qui entrent dans I ne seraient plus les mêmes que celles qui entrent dans I'.

Des périodes engendrées dans le parcours des anneaux fermés de l'enveloppe imaginaire des conjuguées. — Il pourra se présenter trois cas distincts : le premier où l'un des anneaux fermés étant constitué par des points $[x = \alpha + \beta\sqrt{-1},\ y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}]$, les points imaginaires conjugués de ceux qui constituent le premier, $[x = \alpha - \beta\sqrt{-1},\ y = \alpha' - \beta'\sqrt{-1}]$, formeraient un autre anneau fermé, séparé du premier. C'est ce qui arrive dans le lieu

$$\begin{aligned}&[(x-a-b\sqrt{-1})^2+(y-a'-b'\sqrt{-1})^2-(r+r'\sqrt{-1})^2]\\ &\quad\times[(x-a+b\sqrt{-1})^2+(y-a'+b'\sqrt{-1})^2-(r-r'\sqrt{-1})]^2=0,\end{aligned}$$

où l'enveloppe imaginaire présente les deux anneaux fermés, conjugués, représentés en coordonnées réelles par les équations

$$(x-a-b)^2+(y-a'-b')^2=(r+r')^2$$

et

$$(x-a+b)^2+(y-a'+b')^2=(r-r')^2.$$

Il pourra arriver aussi que l'enveloppe imaginaire, fermée, se compose de points imaginaires conjugués deux à deux, mais de telle façon que cette enveloppe ne touchant pas la courbe réelle, qui pourra d'ailleurs ne pas exister, les deux suites de points imaginaires conjugués, qui constitueront cette enveloppe, ne se rejoindront jamais, de sorte que le premier point de la première partie de l'enveloppe coïnciderait avec le dernier point de la seconde partie et le dernier point de la première avec le premier de la seconde. C'est ce qui arrive, par exemple, dans le cas de l'ellipse imaginaire

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0.$$

Enfin, si les deux parties de l'anneau considéré, de l'enveloppe imaginaire, se rejoignaient sur la courbe réelle en deux points d'inflexion de cette courbe, les points imaginaires conjugués, qui constitueraient l'anneau de l'enveloppe, se rejoindraient aux deux points d'inflexion.

Dans le premier cas, les valeurs de l'intégrale $\int y\,dx$, prise successivement le long des deux anneaux considérés, seraient représentées par

$$\mathrm{I}=2\mathrm{S}_1-\frac{\mathrm{S}+\mathrm{S}'}{2}+\frac{\mathrm{S}-\mathrm{S}'}{2}\sqrt{-1}$$

et par

$$\mathrm{I}'=2\mathrm{S}_1-\frac{\mathrm{S}+\mathrm{S}'}{2}-\frac{\mathrm{S}-\mathrm{S}'}{2}\sqrt{-1},$$

S_1, S et S′ ayant les valeurs définies plus haut.

Ainsi, par exemple, dans le cas du lieu

$$(x-a-b\sqrt{-1})^2+(y-a'-b'\sqrt{-1})^2=(r+r'\sqrt{-1})^2,$$

le lieu des points milieux des cordes joignant les points imaginaires conjugués des enveloppes des deux lieux

$$(x-a-b\sqrt{-1})^2+(y-a'-b'\sqrt{-1})^2=(r+r'\sqrt{-1})^2$$

et

$$(x-a+b\sqrt{-1})^2+(y-a'+b'\sqrt{-1})^2=(r-r'\sqrt{-1})^2$$

sera, comme on l'a vu, la circonférence du cercle

$$(\alpha-a)^2+(\alpha'-a')^2=r^2,$$

de sorte que S_1 aura pour valeur

$$\pi r^2;$$

d'un autre côté, les deux enveloppes ayant pour équations, en coordonnées réelles,

$$(x-a-b)^2+(y-a'-b')^2=(r+r')^2$$

et

$$(x-a+b)^2+(y-a'+b')^2=(r-r')^2,$$

S aura pour valeur $\pi(r+r')^2$, et S' aura pour valeur $\pi(r-r')^2$.

La formule

$$I=2S_1-\frac{S+S'}{2}+\frac{S-S'}{2}\sqrt{-1}$$

donnera donc, pour valeur de la période de l'intégrale $\int y\,dx$, relative au premier lieu,

$$\begin{aligned}2\pi r^2-\tfrac{1}{2}\pi[(r+r')^2+(r-r')^2]&\\+\tfrac{1}{2}\pi[(r+r')^2-(r-r')^2]\sqrt{-1}&=\pi(r+r'\sqrt{-1})^2,\end{aligned}$$

comme on devait s'y attendre. La période, dans ce cas et tous les autres analogues, sera en partie réelle et en partie imaginaire.

Dans le second cas, les deux parties de l'enveloppe imaginaire, qui contiendront les points imaginaires conjugués deux à deux, se faisant suite l'une à l'autre, de manière que le dernier point de l'un des deux arcs coïncide avec le premier point de l'autre, l'intégrale $\int y\,dx$, prise le long de l'anneau formé par l'enveloppe, aura pour valeur la somme des deux intégrales I et I'; c'est-à-dire

$$4S_1 - (S + S').$$

La période sera donc réelle et égale à l'aire de l'anneau diminuée de quatre fois l'aire du segment correspondant au lieu des milieux des cordes joignant deux à deux les points imaginaires conjugués de l'anneau de l'enveloppe.

Toutefois, il pourra, je crois, arriver que le lieu des milieux des cordes réelles en question, ne présentant qu'un seul arc, dans l'intérieur de l'anneau de l'enveloppe, et cet arc devant être parcouru deux fois, en sens contraires, lors des formations des deux intégrales I et I', les aires $2S_1$ et $-2S_1$, que devraient contenir I et I', disparaîtraient de la somme $I + I'$.

Dans le cas de l'ellipse imaginaire $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$, S_1 est nul de lui-même, parce que toutes les cordes réelles de l'enveloppe imaginaire ont leurs milieux à l'origine, et il reste seulement, pour $I + I'$, l'aire de l'ellipse réelle $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, homothétique à l'ellipse imaginaire.

Dans le dernier cas, l'intégrale rentrera dans le cas général d'une intégrale, prise le long d'un chemin fermé composé de points imaginaires conjugués deux à deux, qui se rejoindraient sur la courbe réelle : cette intégrale aura, comme on l'a vu, pour valeur le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire enfermée dans l'anneau de l'enveloppe imaginaire. (*A suivre.*)

QUELQUES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES COURBES ALGÉBRIQUES OBTENUES AU MOYEN DES COORDONNÉES PARALLÈLES [1];

PAR M. M. D'OCAGNE,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

---

1. L'équation générale des courbes algébriques est, en coordonnées parallèles,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} & a_n v^n + (a_{n-1}u + b_{n-1})v^{n-1} + \ldots \\ & \qquad + (a_0 u^n + b_0 u^{n-1} + \ldots + l_0) = 0. \end{aligned}\right.$$

Si donc nous donnons à u une valeur particulière, nous avons, entre les n valeurs correspondantes de v, les relations évidentes

$$(2)\qquad \sum_{i=1}^{i=n} v_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}u - \frac{b_{n-1}}{a_n},$$

$$(3)\qquad \sum_{i=1}^{i=n} \frac{dv_i}{du} = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$(4)\qquad \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d^2 v_i}{du^2} = 0,$$

$$(5)\qquad \sum_{i=1}^{i=n} v_i - u\sum_{i=1}^{i=n} \frac{dv_i}{du} = -\frac{b_{n-1}}{a_n}.$$

L'interprétation géométrique de ces relations algé-

---

[1] *Voir*, au sujet de ces coordonnées, les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1884) ou la brochure *Coordonnées parallèles et axiales* (Gauthier-Villars; 1885).

briques va nous donner autant de propriétés des courbes représentées par (1).

2. Rappelons d'abord que le point de contact P de la tangente (u, v) a pour équation

$$U\,dv - V\,du - (u\,dv - v\,du) = 0.$$

Il en résulte que, si cette tangente coupe l'axe Au au point M et l'axe Bv au point N, on a

$$\frac{dv}{du} = \frac{PN}{PM}, \tag{6}$$

et que, si AP coupe l'axe Bv au point β,

$$v - u\frac{dv}{du} = B\beta. \tag{7}$$

D'autre part, le rayon de courbure au point P est donné par

$$R = \frac{\dfrac{d^2 v}{du^2}}{\left(1 - \dfrac{dv}{du}\right)^3}\,\frac{\overline{NM}^3}{\delta},$$

en appelant δ la distance AB, supposée ici perpendiculaire à Au et Bv. Or la formule (6) donne

$$1 - \frac{dv}{du} = 1 - \frac{PN}{PM} = \frac{NM}{PM}.$$

Par suite,

$$R = \frac{d^2 v}{du^2}\,\frac{\overline{PM}^3}{\delta}$$

et

$$\frac{d^2 v}{du^2} = \frac{R\,\delta}{\overline{PM}^3}. \tag{8}$$

3. Cela posé, remarquons que prendre u comme variable indépendante revient à mener à la courbe (1) les

tangentes $MP_1, MP_2, \ldots, MP_n$ par un point M variable sur Au.

Dès lors, la formule (1) exprime que, si ces tangentes rencontrent Bv en $N_1, N_2, \ldots, N_n$, la droite qui joint le point M au centre des moyennes distances des points $N_1, N_2, \ldots, N_n$ passe par un point fixe. Or cette droite est ce que nous avons appelé la *droite moyenne* (¹) des droites $MN_1, MN_2, \ldots, MN_n$ relativement à la direction Au. C'est encore la polaire du point situé à l'infini dans cette direction par rapport à ce faisceau de droites, ou la conjuguée harmonique de Au par rapport à ce faisceau. Donc :

La conjuguée harmonique de l'axe Au *par rapport aux tangentes menées à une courbe algébrique quelconque par un point variable sur cet axe passe par un point fixe.*

4. Par les points $P_1, P_2, \ldots, P_n$, menons à Au des parallèles qui coupent AB en $p_1, p_2, \ldots, p_n$. D'après la formule (6),

$$\frac{p_i B}{p_i A} = \frac{dv_i}{du}.$$

La formule (3) donne donc

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{p_i B}{p_i A} = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

ou, puisque

$$\frac{p_i B}{p_i A} = \frac{p_i A - BA}{p_i A} = 1 - \frac{\delta}{p_i A},$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{p_i A} = \frac{1}{\delta}\left(n + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right).$$

(¹) *Bulletin de la Société mathématique*, p. 114; 1884, et *Nouvelles Annales*, p. 413; 1884.

Le second membre étant constant, on voit que :

Le conjugué harmonique du point A *par rapport aux points* $p_1, p_2, \ldots, p_n$, *est un point fixe.*

5. Si $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ sont les points où l'axe Bv est coupé par $AP_1, AP_2, \ldots, AP_n$, la formule (7) donne

$$v_i - u\frac{dv_i}{du} = B\beta_i.$$

La formule (5) devient donc

$$\sum_{i=1}^{i=n} B\beta_i = -\frac{b_{n-1}}{a_n};$$

c'est-à-dire que :

La conjuguée harmonique de Au, *par rapport aux droites* $AP_1, AP_2, \ldots, AP_n$, *est une droite fixe.*

Cette propriété généralise la précédente.

Enfin la formule (8) montre que

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{R_i}{\overline{MP}_i^3} = 0, \tag{9}$$

d'où ce théorème remarquable :

THÉORÈME I. — *Si l'on mène d'un point les* n *tangentes à une courbe algébrique de la classe* n, *la somme des rayons de courbure répondant aux points de contact divisés respectivement par les cubes des tangentes correspondantes est nulle.*

Le signe des divers éléments de cette somme se détermine facilement par la remarque que voici : Ω_1, $\Omega_2, \ldots, \Omega_n$ étant les centres de courbure répondant à $P_1, P_2, \ldots, P_n$, faisons tourner les triangles $MP_1\Omega_1$,

$MP_2\Omega_2, \ldots, MP_n\Omega_n$ autour de M, de façon à diriger $MP_1, MP_2, \ldots, MP_n$ suivant une même droite et *dans le même sens*. Un certain nombre des points $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ seront alors au-dessus de cette droite, les autres au-dessous, et l'on donnera des signes opposés, d'une part, aux quantités $\frac{R_i}{\overline{MP_i}^3}$ correspondant aux premiers, de l'autre, aux mêmes quantités correspondant aux seconds.

Ce théorème ne nous semble avoir été remarqué jusqu'ici que dans le cas des coniques. Sa démonstration, par les coordonnées cartésiennes, dans le cas général, présenterait de sérieuses difficultés.

6. Faisant maintenant abstraction du système spécial de coordonnées, au moyen duquel nous avons obtenu les résultats précédents, nous pourrons énoncer le premier et le troisième d'entre eux sous la forme que voici, le second n'étant qu'un cas particulier du troisième :

Théorème II. — *Étant donnés une courbe algébrique* C, *une droite* D *et un point* A *sur cette droite, si d'un point* M *variable sur la droite* D, *on mène à la courbe* C *les tangentes* $MP_1, MP_2, \ldots, MP_n$:

1° *La conjuguée harmonique de la droite* D, *par rapport à ces tangentes, passe par un point fixe;*

2° *La conjuguée harmonique de la droite* D, *par rapport aux droites qui joignent le point* A *aux points de contact* $P_1, P_2, \ldots, P_n$, *est une droite fixe.*

7. Voyons ce que deviennent ces divers théorèmes dans le cas de tangentes parallèles. Pour le théorème I, remarquons que, dans chaque élément de la somme, $\frac{R_i}{\overline{MP_i}^3}$, MP_i devient infini; mais la formule (9), par la-

quelle se traduit le théorème, peut s'écrire

$$R_1 + R_2\left(\frac{MP_1}{MP_2}\right)^3 + \ldots + R_n\left(\frac{MP_1}{MP_n}\right)^3 = 0.$$

Du point M, comme centre, avec MP_1 pour rayon, décrivons un cercle qui coupe MP_2 en $Q_2, \ldots, MP_n$ en Q_n. La formule précédente pourra s'écrire

$$R_1 + R_2\left(1 + \frac{P_2Q_2}{MP_2}\right)^3 + \ldots + R_n\left(1 + \frac{P_nQ_n}{MP_n}\right)^3 = 0.$$

Or, lorsque M s'éloigne à l'infini, $Q_2, \ldots, Q_n$ tendent respectivement vers les pieds des perpendiculaires abaissées de P_1 sur les tangentes en $P_2, P_3, \ldots, P_n$. Il en résulte que $P_2Q_2, P_3Q_3, \ldots, P_nQ_n$ restent finis alors que $MP_1, MP_2, \ldots, MP_n$ croissent indéfiniment. La limite de chacun des rapports $\frac{P_iQ_i}{MP_i}$ est donc zéro, et l'on a, pour le cas des tangentes parallèles,

$$\sum_{i=1}^{i=n} R_i = 0.$$

On retrouve ainsi un théorème remarqué par Duhamel.

8. Pour le théorème II, rejetons la droite D à l'infini, le point A se trouvant alors dans une direction donnée; la direction de la droite D est alors arbitraire, et nous voyons que les diverses parties du théorème s'énoncent ainsi :

1° *La droite moyenne, par rapport à une direction quelconque des tangentes à une courbe algébrique, parallèles entre elles, passe par un point fixe.*

2° *La droite moyenne, par rapport à une direction quelconque Δ, des parallèles à une autre direction* *quelconque Δ' menées par les points de contact de ces tangentes, est fixe.*

La droite moyenne dont il est question dans ce dernier énoncé passe évidemment par le centre des moyennes distances des points de contact des tangentes parallèles. Puisqu'elle est fixe, quelle que soit sa direction Δ', c'est donc que ce dernier point est fixe. On tombe ainsi sur ce théorème de Chasles :

Le centre des moyennes distances des points de contact des tangentes à une courbe algébrique, parallèles à une direction donnée, est fixe quelle que soit cette direction.

Il est tout naturel de donner à ce point fixe le nom de *point de Chasles* de la courbe algébrique considérée.

La démonstration directe de ce dernier théorème, avec la détermination analytique du point de Chasles, se fait très simplement au moyen des coordonnées parallèles : c'est ce que nous allons faire voir maintenant ([1]).

9. Les tangentes à la courbe représentée par l'équation (1), parallèles à une direction donnée, s'obtiennent en adjoignant à cette équation la suivante

$$(10) \qquad v - u = s,$$

où s caractérise la direction choisie. Le centre des moyennes distances de leurs n points de contact a pour

---

([1]) Les démonstrations suivantes ont été communiquées verbalement à la *Société mathématique de France* (séance du 8 janvier 1890).

équation [1]

$$(11)\qquad u\sum_{i=1}^{i=n}\frac{dv_i}{dv_i-du_i}-v\sum_{i=1}^{i=n}\frac{du_i}{dv_i-du_i}-\sum_{i=1}^{i=n}\frac{u_i\,dv_i-v_i\,du_i}{dv_i-du_i}=0.$$

Or, s ayant la même valeur pour les n points de contact, on voit, d'après (2), que

$$(11\,bis)\quad\left\{\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{i=n}\frac{dv_i}{dv_i-du_i}=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{du_i+ds}{ds}=n+\sum_{i=1}^{i=n}\frac{du_i}{ds},\\
&\sum_{i=1}^{i=n}\frac{du_i}{dv_i-du_i}=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{du_i}{ds},\\
&\sum_{i=1}^{i=n}\frac{u_i\,dv_i-v_i\,du_i}{dv_i-du_i}=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{u_i\,ds-s\,du_i}{ds}\\
&\qquad\qquad=\sum_{i=1}^{i=n}u_i-s\sum_{i=1}^{i=n}\frac{du_i}{ds}.
\end{aligned}\right.$$

Mais l'équation en u et s obtenue par l'élimination de v entre (1) et (10) est de la forme

$$(12)\qquad A_n u^n+(A_{n-1}s+B_{n-1})\,u^{n-1}+\ldots=0.$$

Par suite,

$$(13)\quad\left\{\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{i=n}u_i=-\frac{A_{n-1}}{A_n}s-\frac{B_{n-1}}{A_n},\\
&\sum_{i=1}^{i=n}\frac{du_i}{ds}=-\frac{A_{n-1}}{A_n},\\
&\sum_{i=1}^{i=n}u_i-s\sum_{i=1}^{i=n}\frac{du_i}{ds}=-\frac{B_{n-1}}{A_n}.
\end{aligned}\right.$$

---

(1) *Coordonnées parallèles et axiales*, p. 86, note II.

L'équation (11) devient donc, en tenant compte de (11) et (13),

$$(14) \qquad (n A_n - A_{n-1}) u + A_{n-1} v + B_{n-1} = 0,$$

et, comme ses coefficients sont constants, *le théorème de Chasles est démontré.*

10. Nous allons maintenant calculer ces coefficients au moyen de ceux de l'équation (1). Celle-ci peut s'écrire, en groupant les termes de même degré,

$$(1') \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_0 u^n + a_1 u^{n-1} v + a_2 u_{n-2} v^2 + \ldots + a_n v^n \\ \qquad + b_0 u^{n-1} + b_1 u^{n-2} v + \ldots + b_{n-1} v^{n-1} \\ \qquad\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + l_0 \end{array} \right\} = 0.$$

Remplaçant dans cette équation v par $u + s$, et mettant le polynôme obtenu sous la forme (12), on voit que

$$(15) \qquad A_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n,$$

$$(16) \qquad A_{n-1} = a_1 + 2a_2 + \ldots + n a_n,$$

$$(19) \qquad B_{n-1} = b_0 + b_1 + \ldots + b_{n-1}.$$

De (15) et (16) on déduit encore

$$(18) \qquad n A_n - A_{n-1} = n a_0 + (n-1) a_1 + \ldots + a_1.$$

Si nous représentons par $\varphi_n(u, v)$ et $\varphi_{n-1}(u, v)$ les ensembles homogènes des termes de degré n et de degré $n - 1$ dans (1'), les formules (16), (17), (18) pourront s'écrire

$$A_{n-1} = \varphi'_{n_v}(1, 1),$$

$$B_{n-1} = \varphi_{n-1}(1, 1),$$

$$n A_n - A_{n-1} = \varphi'_{n_u}(1, 1).$$

Dès lors, l'équation (14) du point de Chasles devient

$$(19)\qquad u\varphi'_{n_u}(1,1)+v\,\varphi'_{n_v}(1,1)+\varphi_{n-1}(1,1)=0.$$

Elle est, sous cette forme, d'une remarquable simplicité et peut être étendue à l'espace.

11. Nous donnerons, pour terminer, la démonstration directe du théorème de Chasles en coordonnées axiales.

Nous avons remarqué ([1]) que, dans ce système de coordonnées, l'équation la plus générale d'une courbe algébrique (supposée de la classe n) est

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{l}\lambda^n a_n \operatorname{tang}^n\theta \\ \quad +\lambda^{n-1}(a_{n-1}\operatorname{tang}^n\theta+b_{n-1}\operatorname{tang}^{n-1}\theta)+\ldots=0.\end{array}\right.$$

De plus, si l'on prend l'axe du système pour axe Ox, l'axe Oy étant la perpendiculaire menée à celui-ci par l'origine, les coordonnées x_i, y_i du point de contact de la tangente $(\lambda_i,\ \theta)$ sont données par ([2]),

$$x_i=\sin^2\theta\,\frac{d\lambda_i}{d\theta},\qquad y_i=\lambda_i+\sin\theta\cos\theta\,\frac{d\lambda_i}{d\theta}.$$

Par suite, les coordonnées x et y du centre des moyennes distances des points de contact des n tangentes parallèles à la direction θ sont données par

$$(21)\quad nx=\sin^2\theta\sum_{i=1}^{i=n}\frac{d\lambda_i}{d\theta},\qquad ny=\sum_{i=1}^{i=n}\lambda_i+\sin\theta\cos\theta\sum_{i=1}^{i=n}\frac{d\lambda_i}{d\theta}.$$

([1]) *Coordonnees parallèles et axiales*, p. 89.
([2]) *Ibid.*, p. 41.

Or l'équation (20) donne

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} - \frac{b_{n-1}}{a_n}\cot\theta,$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{d\lambda_i}{d\theta} = \frac{b_{n-1}}{a_n}\frac{1}{\sin^2\theta},$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i + \sin\theta\cos\theta \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d\lambda_i}{d\theta} = -\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Les formules (21) deviennent donc

$$(22) \qquad nx = \frac{b_{n-1}}{a_n}, \qquad ny = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

et, comme ces coordonnées sont constantes, le théorème est démontré.

SUR L'ÉQUILIBRE D'ÉLASTICITÉ D'UNE ENVELOPPE SPHÉRIQUE;

PAR M. E. FONTANEAU.

1. Je m'occuperai d'abord du cas où l'on a, pour données du problème, les trois composantes de déformation u, v, w en un point quelconque de la surface. Cette question n'a pas été traitée par Lamé, mais elle est résolue au § 736 du *Traité de la Philosophie naturelle,* par MM. Thomson et Tait. J'emploie un procédé différent et qui semble ouvrir la voie à des applications plus

générales. J'exposerai d'abord les principes d'où dépend cette solution.

2. Soient, conformément aux notations de Lamé, m_1, n_1, p_1, m_2, n_2, p_2, m_3, n_3, p_3 les cosinus directeurs de trois axes rectangulaires OX′, OY′, OZ′ par rapport aux axes des coordonnées OX, OY, OZ. Si l'on désigne par ξ, η, ζ les déplacements suivant les axes du point dont les coordonnées sont $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, on a

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \xi &= u + \left(1 + \frac{du}{dx}\right)dx + \frac{du}{dy}\,dy + \frac{du}{dz}\,dz,\\ \eta &= v + \frac{dv}{dx}\,dx + \left(1 + \frac{dv}{dy}\right)dy + \frac{dv}{dz}\,dz,\\ \zeta &= w + \frac{dw}{dx}\,dx + \frac{dw}{dy}\,dy + \left(1 + \frac{dw}{dz}\right)dz,\end{aligned}\right.$$

et, de même, par rapport aux axes OX′, OY′, OZ′,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \xi' &= u' + \left(1 + \frac{du'}{dx'}\right)dx' + \frac{du'}{dy'}\,dy' + \frac{du'}{dz'}\,dz',\\ \eta' &= v' + \frac{dv'}{dx'}\,dx' + \left(1 + \frac{dv'}{dy'}\right)dy' + \frac{dv'}{dz'}\,dz',\\ \zeta' &= w' + \frac{dw'}{dx'}\,dx' + \frac{dw'}{dy'}\,dy' + \left(1 + \frac{dw'}{dz'}\right)dz'.\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs il résulte des formules de transformation des coordonnées

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} dx &= m_1\,dx' + m_2\,dy' + m_3\,dz',\\ dy &= n_1\,dx' + n_2\,dy' + n_3\,dz',\\ dz &= p_1\,dx' + p_2\,dy' + p_3\,dz',\end{aligned}\right.$$

et

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \xi - u &= m_1(\xi' - u') + m_2(\eta' - v') + m_3(\zeta' - w'),\\ \eta - v &= n_1(\xi' - u') + n_2(\eta' - v') + n_3(\zeta' - w'),\\ \zeta - w &= p_1(\xi' - u') + p_2(\eta' - v') + p_3(\zeta' - w').\end{aligned}\right.$$

Des relations (1) et (3), on déduit

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
\xi - u = {} & \left[m_1\left(1+\frac{du}{dx}\right)+n_1\frac{du}{dy}+p_1\frac{du}{dz}\right]dx' \\
& +\left[m_2\left(1+\frac{du}{dx}\right)+n_2\frac{du}{dy}+p_2\frac{du}{dz}\right]dy' \\
& +\left[m_3\left(1+\frac{du}{dx}\right)+n_3\frac{du}{dy}+p_3\frac{du}{dz}\right]dz', \\
\eta - v = {} & \left[m_1\frac{dv}{dx}+n_1\left(1+\frac{dv}{dy}\right)+p_1\frac{dv}{dz}\right]dx' \\
& +\left[m_2\frac{dv}{dx}+n_2\left(1+\frac{dv}{dy}\right)+p_2\frac{dv}{dz}\right]dy' \\
& +\left[m_3\frac{dv}{dx}+n_3\left(1+\frac{dv}{dy}\right)+p_3\frac{dv}{dz}\right]dz', \\
\zeta - w = {} & \left[m_1\frac{dw}{dx}+n_1\frac{dw}{dy}+p_1\left(1+\frac{dw}{dz}\right)\right]dx' \\
& +\left[m_2\frac{dw}{dx}+n_2\frac{dw}{dy}+p_2\left(1+\frac{dw}{dz}\right)\right]dy' \\
& +\left[m_3\frac{dw}{dx}+n_3\frac{dw}{dy}+p_3\left(1+\frac{dw}{dz}\right)\right]dz',
\end{aligned}
\right.
$$

et des relations (2) et (4),

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
\xi - u = {} & \left[m_1\left(1+\frac{du'}{dx'}\right)+m_2\frac{dv'}{dx'}+m_3\frac{dw'}{dx'}\right]dx' \\
& +\left[m_1\frac{du'}{dy'}+m_2\left(1+\frac{dv'}{dy'}\right)+m_3\frac{dw'}{dy'}\right]dy' \\
& +\left[m_1\frac{du'}{dz'}+m_2\frac{dv'}{dz'}+m_3\left(1+\frac{dw'}{dz'}\right)\right]dz', \\
\eta - v = {} & \left[n_1\left(1+\frac{du'}{dx'}\right)+n_2\frac{dv'}{dx'}+n_2\frac{dw'}{dx'}\right]dx' \\
& +\left[n_1\frac{du'}{dy'}+n_2\left(1+\frac{dv'}{dy'}\right)+n_3\frac{dw'}{dy'}\right]dy' \\
& +\left[n_1\frac{du'}{dz'}+n_2\frac{dv'}{dz'}+n_3\left(1+\frac{dw'}{dz'}\right)\right]dz', \\
\zeta - w = {} & \left[p_1\left(1+\frac{du'}{dx'}\right)+p_2\frac{dv'}{dx'}+p_3\frac{dw'}{dx'}\right]dx' \\
& +\left[p_1\frac{du'}{dy'}+p_2\left(1+\frac{dv'}{dy'}\right)+p_3\frac{dw'}{dy'}\right]dy' \\
& +\left[p_1\frac{du'}{dz'}+p_2\frac{dv'}{dz'}+p_3\left(1+\frac{dw'}{dz'}\right)\right]dz'.
\end{aligned}
\right.
$$

Comme ces expressions (5) et (6) doivent être respectivement identiques, il en résulte

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
m_1\frac{du}{dx}+n_1\frac{du}{dy}+p_1\frac{du}{dz}&=m_1\frac{du'}{dx'}+m_2\frac{dv'}{dx'}+m_3\frac{dw'}{dx'},\\
m_1\frac{dv}{dx}+n_1\frac{dv}{dy}+p_1\frac{dv}{dz}&=n_1\frac{du'}{dx'}+n_2\frac{dv'}{dx'}+n_3\frac{dw'}{dx'},\\
m_1\frac{dw}{dx}+n_1\frac{dw}{dy}+p_1\frac{dw}{dz}&=p_1\frac{du'}{dx'}+p_2\frac{dv'}{dx'}+p_3\frac{dw'}{dx'};\\
m_2\frac{du}{dx}+n_2\frac{du}{dy}+p_2\frac{du}{dz}&=m_1\frac{du'}{dy'}+m_2\frac{dv'}{dy'}+m_3\frac{dw'}{dy'},\\
m_2\frac{dv}{dx}+n_2\frac{dv}{dy}+p_2\frac{dv}{dz}&=n_1\frac{du'}{dy'}+n_2\frac{dv'}{dy'}+n_3\frac{dw'}{dy'},\\
m_2\frac{dw}{dx}+n_2\frac{dw}{dy}+p_2\frac{dw}{dz}&=p_1\frac{du'}{dy'}+p_2\frac{dv'}{dy'}+p_3\frac{dw'}{dy'};\\
m_3\frac{du}{dx}+n_3\frac{du}{dy}+p_3\frac{du}{dz}&=m_1\frac{du'}{dz'}+m_2\frac{dv'}{dz'}+m_3\frac{dw'}{dz'},\\
m_3\frac{dv}{dx}+n_3\frac{dv}{dy}+p_3\frac{dv}{dz}&=n_1\frac{du'}{dz'}+n_2\frac{dv'}{dz'}+n_3\frac{dw'}{dz'},\\
m_3\frac{dw}{dx}+n_3\frac{dw}{dy}+p_3\frac{dw}{dz}&=p_1\frac{du'}{dz'}+p_2\frac{dv'}{dz'}+p_3\frac{dw'}{dz'}.
\end{aligned}\right.$$

On démontrerait, de la même manière, mais par un procédé inverse, neuf égalités analogues, et l'on peut se servir des unes ou des autres pour ce qui va suivre.

3. Les équations aux dérivées partielles de la déformation des corps en équilibre d'élasticité sont, en général,

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}
\mu\,\Delta^2 u+(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dx}+\varepsilon X_0&=0,\\
\mu\,\Delta^2 v+(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dy}+\varepsilon Y_0&=0,\\
\mu\,\Delta^2 w+(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dz}+\varepsilon Z_0&=0,
\end{aligned}\right.$$

où X_0, Y_0, Z_0 sont les composantes de la force extérieure appliquée à la masse au point quelconque (x, y, z), ε la densité en ce point et θ la dilatation cubique, tandis que Δ^2 sert à représenter l'opération $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$. On y satisfait, généralement, en posant

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
u &= \frac{\lambda + 3\mu}{2(\lambda + 2\mu)}\Omega_1 - \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)}\left(x\frac{d\Omega_1}{dx} + y\frac{d\Omega_2}{dx} + z\frac{d\Omega_3}{dx}\right),\\
v &= \frac{\lambda + 3\mu}{2(\lambda + 2\mu)}\Omega_2 + \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)}\left(x\frac{d\Omega_1}{dy} + y\frac{d\Omega_2}{dy} + z\frac{d\Omega_3}{dy}\right),\\
w &= \frac{\lambda + 3\mu}{2(\lambda + 2\mu)}\Omega_3 + \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)}\left(x\frac{d\Omega_1}{dz} + y\frac{d\Omega_2}{dz} + z\frac{d\Omega_3}{dz}\right),
\end{aligned}
\right.
$$

où les fonctions $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ sont déterminées comme il suit. Soit Δ une fonction de x, y, z assujettie à vérifier l'équation aux dérivées partielles du premier ordre et linéaire

$$
(10)\quad x\frac{d\Delta}{dx} + y\frac{d\Delta}{dy} + z\frac{d\Delta}{dz} - \frac{2\mu}{\lambda + \mu}\Delta = \frac{\varepsilon}{\mu}[xX_0 + yY_0 + zX_0],
$$

on aura

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
\Delta^2\Omega_1 &= -\frac{\varepsilon}{\mu}X_0 + \frac{d\Delta}{dx},\\
\Delta^2\Omega_2 &= -\frac{\varepsilon}{\mu}Y_0 + \frac{d\Delta}{dy},\\
\Delta^2\Omega_3 &= -\frac{\varepsilon}{\mu}Z_0 + \frac{d\Delta}{dz}.
\end{aligned}
\right.
$$

Je ne démontre pas ici ces formules, dont la vérification est facile ; il me suffit d'observer qu'elles pourront donner, dans tous les cas, une solution particulière des équations (8) et permettront ainsi d'y faire abstraction des termes tout connus. On y satisfait alors, toujours avec les formules (9), mais avec des fonctions Ω simplement assujetties à vérifier l'équation de Laplace,

$$
(12)\quad \Delta^2\Omega = \frac{d^2\Omega}{dx^2} + \frac{d^2\Omega}{dy^2} + \frac{d^2\Omega}{dz^2} = 0.
$$

Je suppose que ces fonctions Ω soient homogènes et du même degré ν, aussi bien, par conséquent, que les composantes de déformation u, v, w. Il résulte alors des expressions (9)

$$(13)\qquad xu+yv+zw=\frac{\lambda+3\mu-(\lambda+\mu)\nu}{2(\lambda+2\mu)}(x\Omega_1+y\Omega_2+z\Omega_3)$$

et l'on en déduit les suivantes :

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned}
u &= \Omega_1-\frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)}\frac{d}{dx}(x\Omega_1+y\Omega_2+z\Omega_3)\\
&= \Omega_1-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu-\nu(\lambda+\mu)}\frac{d}{dx}(xu+yv+zw),\\
v &= \Omega_2-\frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)}\frac{d}{dy}(x\Omega_1+y\Omega_2+z\Omega_3)\\
&= \Omega_2-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu-\nu(\lambda+\mu)}\frac{d}{dy}(xu+yv+zw),\\
w &= \Omega_3-\frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)}\frac{d}{dz}(x\Omega_1+y\Omega_2+z\Omega_3)\\
&= \Omega_3-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu-\nu(\lambda+\mu)}\frac{d}{dz}(xu+yv+zw),
\end{aligned}\right.$$

et

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned}
\Omega_1 &= \frac{2(\lambda+2\mu)-\nu(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu-\nu(\lambda+\mu)}u\\
&\quad+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu-\nu(\lambda+\mu)}\left(x\frac{du}{dx}+y\frac{dv}{dx}+z\frac{dw}{dx}\right),\\
\Omega_2 &= \frac{2(\lambda+2\mu)-\nu(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu-\nu(\lambda+\mu)}v\\
&\quad+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu-\nu(\lambda+\mu)}\left(x\frac{du}{dy}+y\frac{dv}{dy}+z\frac{dw}{dy}\right),\\
\Omega_3 &= \frac{2(\lambda+2\mu)-\nu(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu-\nu(\lambda+\mu)}w\\
&\quad+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu-\nu(\lambda+\mu)}\left(x\frac{du}{dz}+y\frac{dv}{dz}+z\frac{dw}{dz}\right).
\end{aligned}\right.$$

Lorsqu'on donne, pour tous les points de la surface d'un corps en équilibre d'élasticité, les trois composantes de déformation u, v, w, on aurait en ces points les trois potentiels $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ si l'on pouvait obtenir, au moyen de ces composantes, les seconds membres des égalités (15) dont les derniers termes ne sont pas immédiatement connus. Je vais procéder à cette recherche.

4. Soient trois directions rectangulaires MX′, MY′, MZ′, définies respectivement par leurs cosinus directeurs

$$\begin{array}{ccc} \frac{x}{r}, & \frac{y}{r}, & \frac{z}{r}, \\ m_2, & n_2, & p_2, \\ m_3, & n_3, & p_3, \end{array}$$

où r désigne le rayon vecteur mené de l'origine des coordonnées au point $M(x, y, z)$. On aura, par les trois premières égalités (7),

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{r}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{y}{r}\dfrac{du}{dy} + \dfrac{z}{r}\dfrac{du}{dz} = \nu\dfrac{u}{r} = \dfrac{x}{r}\dfrac{du'}{dx'} + m_2\dfrac{dv'}{dx'} + m_3\dfrac{dw'}{dx'}, \\ \dfrac{x}{r}\dfrac{dv}{dx} + \dfrac{y}{r}\dfrac{dv}{dy} + \dfrac{z}{r}\dfrac{dv}{dz} = \nu\dfrac{v}{r} = \dfrac{y}{r}\dfrac{du'}{dx'} + n_2\dfrac{dv'}{dx'} + n_3\dfrac{dw'}{dx'}, \\ \dfrac{x}{r}\dfrac{dw}{dx} + \dfrac{y}{r}\dfrac{dw}{dy} + \dfrac{z}{r}\dfrac{dw}{dz} = \nu\dfrac{w}{r} = \dfrac{z}{r}\dfrac{du'}{dx'} + p_2\dfrac{dv'}{dx'} + p_3\dfrac{dw'}{dx'}, \end{cases}$$

et, par suite,

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{du'}{dx'} = \nu\dfrac{xu + yv + zw}{r^2}, \\ \dfrac{dv'}{dx'} = \nu\dfrac{m_2 u + n_2 v + p_2 w}{r}, \\ \dfrac{dw'}{dx'} = \nu\dfrac{m_3 u + n_3 v + p_3 w}{r}. \end{cases}$$

D'après cela, les expressions (15) deviennent

$$(18)\quad \begin{cases} \Omega_1 = \dfrac{\lambda + 3\mu - \nu(\lambda + \mu)}{\lambda + 3\mu - \nu(\lambda + \mu)}u + \dfrac{\lambda + \mu}{[\lambda + 3\mu - \nu(\lambda + \mu)]\nu}\dfrac{d}{dx}r^2\dfrac{du'}{dx'}, \\ \Omega_2 = \dfrac{\lambda + 3\mu - \nu(\lambda + \mu)}{\lambda + 3\mu - \nu(\lambda + \mu)}v + \dfrac{\lambda + \mu}{[\lambda + 3\mu - \nu(\lambda + \mu)]\nu}\dfrac{d}{dy}r^2\dfrac{du'}{dx'}, \\ \Omega_3 = \dfrac{\lambda + 3\mu - \nu(\lambda + \mu)}{\lambda + 3\mu - \nu(\lambda + \mu)}w + \dfrac{\lambda + \mu}{[\lambda + 3\mu - \nu(\lambda + \mu)]\nu}\dfrac{d}{dz}r^2\dfrac{du'}{dx'}. \end{cases}$$

Or on a

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\,r^2\frac{du'}{dx'} &= 2x\frac{du'}{dx'} + r^2\left(\frac{d^2u'}{dx'^2}\frac{dx'}{dx} + \frac{d^2u'}{dx'\,dy'}\frac{dy'}{dx} + \frac{d^2u'}{dx'\,dz'}\frac{dz'}{dx}\right),\\
\frac{d}{dy}\,r^2\frac{du'}{dx'} &= 2y\frac{du'}{dx'} + r^2\left(\frac{d^2u'}{dx'^2}\frac{dx'}{dy} + \frac{d^2u'}{dx'\,dy'}\frac{dy'}{dy} + \frac{d^2u'}{dx'\,dz'}\frac{dz'}{dy}\right),\\
\frac{d}{dz}\,r^2\frac{du'}{dx'} &= 2z\frac{du'}{dx'} + r^2\left(\frac{d^2u'}{dx'^2}\frac{dx'}{dz} + \frac{d^2u'}{dx'\,dy'}\frac{dy'}{dz} + \frac{d^2u'}{dx'\,dz'}\frac{dz'}{dz}\right),
\end{aligned}\right.$$

et les valeurs des quotients différentiels de x', y' et z' étant données, il suffira, pour avoir les expressions de $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, de connaître celles de

$$\frac{d^2u'}{dx'^2},\quad \frac{d^2u'}{dx'\,dy'},\quad \frac{d^2u'}{dx'\,dz'}.$$

J'emploie les coordonnées polaires, en posant

$$(20)\qquad x = r\sin\vartheta\cos\varphi,\qquad y = r\sin\vartheta\sin\varphi,\qquad z = r\cos\vartheta$$

et je prends pour les cosinus directeurs

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned}
m_1 &= \frac{dx'}{dx} = \frac{dr}{dx} = \sin\vartheta\cos\varphi,\\
n_1 &= \frac{dx'}{dy} = \frac{dr}{dy} = \sin\vartheta\sin\varphi,\\
p_1 &= \frac{dx'}{dz} = \frac{dr}{dz} = \cos\vartheta;\\
m_2 &= \frac{dy'}{dx} = \frac{r\,d\varphi}{dx} = -\frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta},\\
n_2 &= \frac{dy'}{dy} = \frac{r\,d\varphi}{dy} = \frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta},\\
p_2 &= \frac{dy'}{dz} = \frac{r\,d\varphi}{dz} = 0,\\
m_3 &= \frac{dz'}{dx} = \frac{r\,d\vartheta}{dx} = \cos\vartheta\cos\varphi,\\
n_3 &= \frac{dz'}{dy} = \frac{r\,d\vartheta}{dy} = \cos\vartheta\sin\varphi,\\
p_3 &= \frac{dz'}{dz} = \frac{r\,d\vartheta}{dz} = -\sin\vartheta.
\end{aligned}\right.$$

D'après cela, il vient

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{du'}{dx'} &= \nu\,\frac{u\sin\vartheta\cos\varphi + v\sin\vartheta\sin\varphi + w\cos\vartheta}{r},\\ \frac{dv'}{dx'} &= \nu\,\frac{-u\sin\varphi + v\cos\varphi}{r\sin\vartheta},\\ \frac{dw'}{dx'} &= \nu\,\frac{u\cos\vartheta\cos\varphi + v\cos\vartheta\sin\varphi - w\sin\vartheta}{r}\end{aligned}\right.$$

et en posant, pour simplifier,

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu-\nu(\lambda+\mu)} &= \mathrm{B}_\nu,\\ \frac{2(\lambda+2\mu)-\nu(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu-\nu(\lambda+\mu)} &= 1+\mathrm{B}_\nu,\end{aligned}\right.$$

on aura

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} \Omega_1 = u &+ 2\mathrm{B}_\nu(u\sin\vartheta\cos\varphi + v\sin\vartheta\sin\varphi + w\cos\vartheta)\varphi\sin\vartheta\cos\\ &+ \mathrm{B}_\nu r^2\sin\vartheta\cos\varphi\,\frac{d}{dr}\left(\frac{u\sin\vartheta\cos\varphi + v\sin\vartheta\sin\varphi + w\cos\vartheta}{r}\right)\\ &- \mathrm{B}_\nu r\,\frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}\,\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{u\sin\vartheta\cos\varphi + v\sin\vartheta\sin\varphi + w\cos\vartheta}{r}\right)\\ &+ \mathrm{B}_\nu r\cos\vartheta\cos\varphi\,\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{u\sin\vartheta\cos\varphi + v\sin\vartheta\sin\varphi + w\cos\vartheta}{r}\right),\\ \Omega_2 = v &+ 2\mathrm{B}_\nu(u\sin\vartheta\cos\varphi + v\sin\vartheta\sin\varphi + w\cos\vartheta)\sin\vartheta\sin\varphi\\ &+ \mathrm{B}_\nu r^2\sin\vartheta\sin\varphi\,\frac{d}{dr}\left(\frac{u\sin\vartheta\cos\varphi + v\sin\vartheta\sin\varphi + w\cos\vartheta}{r}\right)\\ &+ \mathrm{B}_\nu r\,\frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta}\,\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{u\sin\vartheta\cos\varphi + v\sin\vartheta\sin\varphi + w\cos\vartheta}{r}\right)\\ &+ \mathrm{B}_\nu r\cos\vartheta\sin\varphi\,\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{u\sin\vartheta\cos\varphi + v\sin\vartheta\sin\varphi + w\cos\vartheta}{r}\right),\\ \Omega_3 = w &+ 2\mathrm{B}_\nu(u\sin\vartheta\cos\varphi + v\sin\vartheta\sin\varphi + w\cos\vartheta)\cos\vartheta\\ &+ \mathrm{B}_\nu r^2\cos\vartheta\,\frac{d}{dr}\left(\frac{u\sin\vartheta\cos\varphi + v\sin\vartheta\sin\varphi + w\cos\vartheta}{r}\right)\\ &- \mathrm{B}_\nu r\sin\vartheta\,\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{u\sin\vartheta\cos\varphi + v\sin\vartheta\sin\varphi + w\cos\vartheta}{r}\right).\end{aligned}\right.$$

Ces formules s'appliquent à un point quelconque pris à l'intérieur du corps élastique; mais, lorsqu'il s'agit d'une des surfaces sphériques de l'enveloppe, u, v, w se réduisent à trois fonctions sphériques du même ordre ν dans lesquelles r ne figure pas. On se trouve alors, lorsqu'on veut prendre les dérivées $\frac{du}{dr}$, $\frac{dv}{dr}$, $\frac{dw}{dr}$, en présence d'une difficulté spéciale. Pour la lever, j'observe que l'on a (16)

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{du}{dr} &= \frac{x}{r}\frac{du'}{dx'} + m_2\frac{dv'}{dx'} + m_3\frac{dw'}{dx'} = \nu\frac{u}{r}, \\ \frac{dv}{dr} &= \frac{y}{r}\frac{du'}{dx'} + n_2\frac{dv'}{dx'} + n_3\frac{dw'}{dx'} = \nu\frac{v}{r}, \\ \frac{dw}{dr} &= \frac{z}{r}\frac{du'}{dx'} + p_2\frac{dv'}{dx'} + p_3\frac{dw'}{dx'} = \nu\frac{w}{r}. \end{aligned}\right.$$

Ainsi l'on a définitivement, en remplaçant pour ce cas spécial Ω par Ψ,

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \Psi_1 = u &+ (\nu+1)B_\nu \sin\vartheta\cos\varphi(u\sin\vartheta\cos\varphi + v\sin\vartheta\sin\varphi + w\cos\vartheta) \\ &- B_\nu\frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\varphi}(u\sin\vartheta\cos\varphi + v\sin\vartheta\sin\varphi + w\cos\vartheta) \\ &+ B_\nu\cos\vartheta\cos\varphi\frac{d}{d\vartheta}(u\sin\vartheta\cos\varphi + v\sin\vartheta\sin\varphi + w\cos\vartheta), \\ \Psi_2 = v &+ (\nu+1)B_\nu \sin\vartheta\sin\varphi(u\sin\vartheta\cos\varphi + v\sin\vartheta\sin\varphi + w\cos\vartheta) \\ &+ B_\nu\frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\varphi}(u\sin\vartheta\cos\varphi + v\sin\vartheta\sin\varphi + w\cos\vartheta) \\ &+ B_\nu\cos\vartheta\sin\varphi\frac{d}{d\vartheta}(u\sin\vartheta\cos\varphi + v\sin\vartheta\sin\varphi + w\cos\vartheta), \\ \Psi_3 = w &+ (\nu+1)B_\nu\cos\vartheta(u\sin\vartheta\cos\varphi + v\sin\vartheta\sin\varphi + w\cos\vartheta) \\ &- B_\nu\sin\vartheta\frac{d}{d\vartheta}(u\sin\vartheta\cos\varphi + v\sin\vartheta\sin\varphi + w\cos\vartheta). \end{aligned}\right.$$

Pour avoir ensuite les expressions des potentiels Ω_1, Ω_2, Ω_3 à l'intérieur du corps élastique, on n'a plus qu'à poser, pour les trois indices,

$$(27)\qquad \Omega = \left(M_\nu\rho^\nu - \frac{N_{\nu+1}}{\rho^{\nu+1}}\right)\Psi + \left(\frac{n_{\nu+1}}{\rho^{\nu+1}} - m_\nu\rho_\nu\right)\psi,$$

en prenant Ψ pour la surface sphérique de rayon R et ψ pour celle de rayon r, et puis à déterminer les constantes au moyen des égalités

$$(28)\quad \begin{cases} M_\nu R^\nu - \dfrac{N_{\nu+1}}{R^{\nu+1}} = 1, & \dfrac{n_{\nu+1}}{R^{\nu+1}} - m_\nu R_\nu = 0, \\ M_\nu r^\nu - \dfrac{N_{\nu+1}}{r^{\nu+1}} = 0, & \dfrac{n_{\nu+1}}{r^{\nu+1}} - m_\nu r^\nu = 1; \end{cases}$$

d'où il résulte

$$(29)\quad \begin{cases} M_\nu = \dfrac{R^{\nu+1}}{R^{2\nu+1} - r^{2\nu+1}}, & N_{\nu+1} = \dfrac{R^{\nu+1} r^{2\nu+1}}{R^{2\nu+1} - r^{2\nu+1}}, \\ m_\nu = \dfrac{r^{\nu+1}}{R^{2\nu+1} - r^{2\nu+1}}, & n_{\nu+1} = \dfrac{r^{\nu+1} R^{2\nu+1}}{R^{2\nu+1} - r^{2\nu+1}}; \end{cases}$$

car, ces valeurs étant substituées dans l'expression (27), le potentiel Ω devient Ψ sur la sphère de rayon R et ψ sur celle de rayon r.

On voit d'ailleurs que ce calcul revient à effectuer les opérations indiquées par la formule (27) sur les trois fonctions sphériques u, v, w.

Comme on peut toujours exprimer les composantes de déformation à la surface de la sphère en séries convergentes de fonctions sphériques, on aura ainsi pour Ω_1, Ω_2, Ω_3 des suites de groupes de termes correspondants du même degré d'homogénéité et en portant leurs expressions, après y avoir introduit x, y, z à la place de ρ, ϑ, φ par un changement inverse de coordonnées, on aura la solution du problème proposé.

5. Le problème de l'équilibre d'élasticité d'une enveloppe sphérique, lorsqu'on donne pour chaque facette infinitésimale de la surface la force élastique y appliquée, a été, pour la première fois, résolu par Lamé à l'aide d'une méthode dont le principe est simple, mais qui conduit à des calculs compliqués. MM. Thomson et Tait ont repris la question au § 737 de leur *Traité de Philosophie naturelle*, et l'ont notablement simpli-

fiée. Il est aisé de la ramener à celle qui vient d'être traitée.

Si l'on désigne par F, G, H les trois composantes par rapport aux axes des x, des y et des z, de la force élastique donnée en un point quelconque de l'une des surfaces sphériques, on doit avoir

$$(30)\quad \begin{cases} \mathrm{F}r = \lambda\theta x + 2\mu\nu u + 2\mu(y\rho_3 - z\rho_2), \\ \mathrm{G}r = \lambda\theta y + 2\mu\nu v + 2\mu(z\rho_1 - x\rho_3), \\ \mathrm{H}r = \lambda\theta z + 2\mu\nu w + 2\mu(x\rho_2 - y\rho_1), \end{cases}$$

en désignant par r le rayon de la sphère considérée et par ρ_1, ρ_2, ρ_3 les trois composantes de rotation suivant les axes des x, des y et des z définies par les égalités

$$(31)\quad 2\rho_1 = \frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}, \qquad 2\rho_2 = \frac{du}{dz} - \frac{dv}{dx}, \qquad 2\rho_3 = \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}.$$

Les quantités $\mathrm{F}r$, $\mathrm{G}r$, $\mathrm{H}r$ ne sont données qu'à la surface du corps élastique, mais on peut les considérer comme des valeurs particulières des trois fonctions ξ, η, ζ bien définies à l'intérieur du corps. Ce sont les produits par le rayon vecteur des composantes de la force élastique appliquée à la facette normale à ce rayon au point quelconque (x, y, z). Ces fonctions satisfont à trois équations aux dérivées partielles du second ordre. On a, en effet,

$$(32)\quad \begin{cases} \Delta^2\xi = 2\lambda\dfrac{d\theta}{dx} + 2\mu\nu\Delta^2 u + 4\mu\left(\dfrac{d\rho_3}{dy} - \dfrac{d\rho_2}{dz}\right), \\ \Delta^2\eta = 2\lambda\dfrac{d\theta}{dy} + 2\mu\nu\Delta^2 v + 4\mu\left(\dfrac{d\rho_1}{dz} - \dfrac{d\rho_3}{dx}\right), \\ \Delta^2\zeta = 2\lambda\dfrac{d\theta}{dz} + 2\mu\nu\Delta^2 w + 4\mu\left(\dfrac{d\rho_2}{dx} - \dfrac{d\rho_1}{dy}\right), \end{cases}$$

et, si l'on a égard aux équations

$$
(33)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\mu\Delta^2 u + (\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dx} = 0,\\
&\mu\Delta^2 v + (\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dy} = 0,\\
&\mu\Delta^2 w + (\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dz} = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

et

$$
(34)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&(\lambda + 2\mu)\frac{d\theta}{dx} = 2\mu\left(\frac{d\rho_3}{dy} - \frac{d\rho_2}{dz}\right),\\
&(\lambda + 2\mu)\frac{d\theta}{dy} = 2\mu\left(\frac{d\rho_1}{dz} - \frac{d\rho_3}{dx}\right),\\
&(\lambda + 2\mu)\frac{d\theta}{dz} = 2\mu\left(\frac{d\rho_2}{dx} - \frac{d\rho_1}{dy}\right),
\end{aligned}
\right.
$$

il vient

$$
(35)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\Delta^2\xi = -2(\lambda + \mu)(\nu - 2)\frac{d\theta}{dx},\\
&\Delta^2\eta = -2(\lambda + \mu)(\nu - 2)\frac{d\theta}{dy},\\
&\Delta^2\zeta = -2(\lambda + \mu)(\nu - 2)\frac{d\theta}{dz}.
\end{aligned}
\right.
$$

Il résulte aussi des équations (30)

$$
(36)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d\xi}{dx} = \lambda\left(\theta + x\frac{d\theta}{dx}\right) + 2\mu\nu\frac{du}{dx} + 2\mu\left(y\frac{d\rho_3}{dx} - z\frac{d\rho_2}{dx}\right),\\
&\frac{d\eta}{dy} = \lambda\left(\theta + y\frac{d\theta}{dy}\right) + 2\mu\nu\frac{dv}{dy} + 2\mu\left(z\frac{d\rho_1}{dy} - x\frac{d\rho_3}{dy}\right),\\
&\frac{d\zeta}{dz} = \lambda\left(\theta + z\frac{d\theta}{dz}\right) + 2\mu\nu\frac{dw}{dz} + 2\mu\left(x\frac{d\rho_2}{dz} - y\frac{d\rho_1}{dz}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Or on a

$$
(37)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&2\left(\frac{d\rho_2}{dz} - \frac{d\rho_3}{dy}\right) = \Delta^2 u - \frac{d\theta}{dx},\\
&2\left(\frac{d\rho_3}{dx} - \frac{d\rho_1}{dz}\right) = \Delta^2 v - \frac{d\theta}{dy},\\
&2\left(\frac{d\rho_1}{dy} - \frac{d\rho_2}{dx}\right) = \Delta^2 w - \frac{d\theta}{dz},
\end{aligned}
\right.
$$

et, par suite des équations (34), il vient

$$(38)\quad \begin{cases} 2x\left(\dfrac{d\rho_2}{dz}-\dfrac{d\rho_3}{dy}\right)+2y\left(\dfrac{d\rho_3}{dx}-\dfrac{d\rho_1}{dz}\right) \\ \qquad\qquad +2z\left(\dfrac{d\rho_1}{dy}-\dfrac{d\rho_3}{dx}\right)=-\dfrac{(\lambda+2\mu)(\nu-1)\theta}{\mu}; \end{cases}$$

par conséquent, si, pour simplifier, on pose

$$(39)\qquad \frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}=\tau,$$

on aura, en faisant la somme des égalités (36),

$$(40)\quad \tau=\lambda(\nu+2)\theta+2\mu\nu\theta-(\lambda+2\mu)(\nu-1)\theta=(3\lambda+2\mu)\theta,$$

et les fonctions ξ, η, ζ devront vérifier les trois équations aux dérivées partielles

$$(41)\quad \begin{cases} (3\lambda+2\mu)\Delta^2\xi+2(\lambda+\mu)(\nu-2)\dfrac{d\tau}{dx}=0, \\ (3\lambda+2\mu)\Delta^2\eta+2(\lambda+\mu)(\nu-2)\dfrac{d\tau}{dy}=0, \\ (3\lambda+2\mu)\Delta^2\zeta+2(\lambda+\mu)(\nu-2)\dfrac{d\tau}{dz}=0. \end{cases}$$

6. Ces équations sont semblables aux équations (33), et si, pour simplifier, on pose

$$(42)\qquad M=3\lambda+2\mu,\qquad L+M=2(\nu-2)(\lambda+\mu),$$

on y satisfera, d'une manière générale, en posant

$$(43)\quad \begin{cases} \xi=\dfrac{L+3M}{2(L+2M)}\omega_1-\dfrac{L+M}{2(L+2M)}\left(x\dfrac{d\omega_1}{dx}+y\dfrac{d\omega_2}{dx}+z\dfrac{d\omega_3}{dx}\right), \\ \eta=\dfrac{L+3M}{2(L+2M)}\omega_2-\dfrac{L+M}{2(L+2M)}\left(x\dfrac{d\omega_1}{dy}+y\dfrac{d\omega_2}{dy}+z\dfrac{d\omega_3}{dy}\right), \\ \zeta=\dfrac{L+3M}{2(L+2M)}\omega_3-\dfrac{L+M}{2(L+2M)}\left(x\dfrac{d\omega_1}{dz}+y\dfrac{d\omega_2}{dz}+z\dfrac{d\omega_3}{dz}\right), \end{cases}$$

où ω_1, ω_2, ω_3 désignent trois potentiels. D'après cela, il sera facile, en procédant comme plus haut, de déterminer pour un point quelconque du corps les trois fonctions ξ, η, ζ d'après les valeurs qu'elles ont en un point quelconque de ses deux surfaces sphériques. Ayant effectué ce calcul, on aura la dilatation cubique θ au moyen de l'égalité (40).

Quant aux trois composantes de rotation ρ_1, ρ_2, ρ_3, elles peuvent être obtenues comme il suit. On déduit des équations (30), en ayant égard à l'identité

$$\frac{d\rho_1}{dx} + \frac{d\rho_2}{dy} + \frac{d\rho_3}{dz} = 0,$$

ces égalités

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} &= \lambda\left(y\frac{d\theta}{dx} - x\frac{d\theta}{dy}\right) + 2\mu(\nu-1)\rho_3 \\ &= \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\left(y\frac{d\tau}{dx} - x\frac{d\tau}{dy}\right) + 2\mu(\nu-1)\rho_3, \\ \frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} &= \lambda\left(z\frac{d\theta}{dy} - y\frac{d\theta}{dz}\right) + 2\mu(\nu-1)\rho_1 \\ &= \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\left(z\frac{d\tau}{dy} - y\frac{d\tau}{dz}\right) + 2\mu(\nu-1)\rho_1, \\ \frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx} &= \lambda\left(x\frac{d\theta}{dz} - z\frac{d\theta}{dx}\right) + 2\mu(\nu-1)\rho_2 \\ &= \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\left(x\frac{d\tau}{dz} - z\frac{d\tau}{dx}\right) + 2\mu(\nu-1)\rho_2, \end{aligned}\right.$$

au moyen desquelles on pourra calculer les trois composantes de rotation.

Enfin les composantes de déformation u, v, w seront données par les égalités suivantes, qui résultent immédiatement des équations (30),

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\mu\nu}\xi - \frac{\lambda}{2(3\lambda+2\mu)\mu\nu}\tau x + \frac{1}{\nu}(z\rho_2 - y\rho_3), \\ v &= \frac{1}{2\mu\nu}\eta - \frac{\lambda}{2(3\lambda+2\mu)\mu\nu}\tau y + \frac{1}{\nu}(x\rho_3 - z\rho_1), \\ w &= \frac{1}{2\mu\nu}\zeta - \frac{\lambda}{2(3\lambda+2\mu)\mu\nu}\tau z + \frac{1}{\nu}(y\rho_1 - x\rho_2), \end{aligned}\right.$$

où il faudra remplacer les composantes de rotation ρ_1, ρ_2, ρ_3 par leurs expressions tirées des relations (44). On voit ainsi que, dans le cas des enveloppes sphériques, les fonctions ξ, η, ζ jouent un rôle semblable à celui des fonctions u, v, w et peuvent les remplacer pour la détermination des éléments principaux de la déformation du corps élastique.

On peut faire une autre remarque. Si, dans les équations (30), on introduit, à la place des fonctions qui figurent dans leurs seconds membres, les trois potentiels Ω_1, Ω_2, Ω_3, il vient

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned}
\xi &= \lambda x\left(\frac{d\Omega_1}{dx}+\frac{d\Omega_2}{dy}+\frac{d\Omega_3}{dz}\right)\\
&\quad+\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\nu\,\Omega_1+\mu\,\frac{\lambda+2\mu-(\lambda+\mu)\nu}{\lambda+2\mu}\left(x\frac{d\Omega_1}{dx}+y\frac{d\Omega_2}{dx}+z\frac{d\Omega_3}{dx}\right),\\
\eta &= \lambda y\left(\frac{d\Omega_1}{dx}+\frac{d\Omega_2}{dy}+\frac{d\Omega_3}{dz}\right)\\
&\quad+\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\nu\,\Omega_2+\mu\,\frac{\lambda+2\mu-(\lambda+\mu)\nu}{\lambda+2\mu}\left(x\frac{d\Omega_1}{dy}+y\frac{d\Omega_2}{dy}+z\frac{d\Omega_3}{dy}\right),\\
\zeta &= \lambda z\left(\frac{d\Omega_1}{dx}+\frac{d\Omega_2}{dy}+\frac{d\Omega_3}{dz}\right)\\
&\quad+\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\nu\,\Omega_3+\mu\,\frac{\lambda+2\mu-(\lambda+\mu)\nu}{\lambda+2\mu}\left(x\frac{d\Omega_1}{dz}+y\frac{d\Omega_2}{dz}+z\frac{d\Omega_3}{dz}\right).
\end{aligned}\right.$$

Ces expressions, substituées dans les équations aux dérivées partielles (41), devront les vérifier identiquement, et il est aisé de s'assurer qu'il en est ainsi. Elles en donnent donc les formules générales d'intégration tout aussi bien que les égalités (43), mais sous une autre forme. Si des relations (42) on déduit les expressions de λ et de μ,

$$(47)\qquad \lambda=\frac{M\nu-3M-L}{\nu-2},\qquad \mu=\frac{3L+7M-2M\nu}{2(\nu-2)},$$

et qu'on les substitue dans les expressions (46), puis qu'on y remplace L et M par λ et μ; enfin, ξ, η, ζ respectivement par u, v, w, on aura ainsi un autre mode de solution des équations (33), d'ailleurs moins simple que ceux auxquels on arrive par le calcul direct.

ADDITION A UNE NOTE SUR UNE APPLICATION DES COORDONNÉES PARALLÈLES

(3e série, t. VIII, p. 568);

PAR M. M. D'OCAGNE.

Si nous rapportons la figure à un système cartésien en prenant pour origine le milieu O de AB, pour axe des x la droite OA prolongée, pour axe des y la perpendiculaire à celle-ci menée par O, nous voyons que les formules de transformation sont

$$p = \frac{d - 2x}{2dy}, \qquad q = \frac{d + 2x}{2dy}.$$

Portant ces valeurs de p et de q dans les expressions (11) et (12) de u et v, on arrive à mettre celles-ci, après une série de réductions dont nous supprimons le détail, sous la forme

$$u = y + \frac{dhk}{k - h} - \frac{1}{h}\left(x - \frac{d}{2}\,\frac{k + h}{k - h}\right),$$
$$v = y + \frac{dhk}{k - h} - \frac{1}{k}\left(x - \frac{d}{2}\,\frac{k + h}{k - h}\right).$$

Si, en conservant la direction des axes, nous transportons l'origine au point O′, dont les coordonnées sont

$$x = \frac{d}{2}\,\frac{k + h}{k - h}, \qquad y = -\frac{dhk}{k - k},$$

nous avons les formules très simples

$$u = y' - \frac{x'}{h},$$

$$v = y' - \frac{x'}{k},$$

qui permettent de passer aisément de l'équation en u et v de la courbe proposée à celle en x' et y' de la transformée.

Lorsque le triangle MNP est à la fois rectangle en P et isoscèle, $h = -1$, $k = 1$, et l'on a

$$u = y' + x',$$
$$v = y' - x',$$

ou, en faisant tourner les axes de 45°,

$$u = x''_1 \sqrt{2},$$
$$v = y''_1 \sqrt{2};$$

par suite, à un facteur constant près, les coefficients des termes du même degré sont les mêmes dans l'équation en u et v de la courbe proposée et dans l'équation en x'' et y'' de la courbe transformée. Cette remarque rend évidente la proposition par laquelle se terminait notre Note.

SUR LES ÉQUATIONS BINOMES;

PAR M. CH. BIEHLER.

On sait que la résolution de l'équation binôme $x^N + 1 = 0$, où N est un nombre entier quelconque, se ramène à la résolution d'équations de la forme

$$x^{2m+1} - 1 = 0$$

et à celle de l'équation $x^{2^n} - 1 = 0$ dont les racines peuvent être exprimées au moyen de radicaux du second degré.

L'équation $x^{2m+1} - 1 = 0$ admet la racine $x = 1$.

En divisant le polynôme $x^{2m+1} - 1$ par $x - 1$ et en égalant à zéro le quotient, on obtient l'équation réciproque

$$x^{2m} + x^{2m-1} + \ldots + x + 1 = 0$$

ou

$$x^m + \frac{1}{x^m} + x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}} + \ldots + x + \frac{1}{x} + 1 = 0.$$

En posant

$$x + \frac{1}{x} = y$$

et en désignant d'une manière générale par V_μ la fonction $x^\mu + \frac{1}{x^\mu}$ évaluée au moyen de y, on sait que V_μ est un polynôme de degré μ en y, et l'équation précédente, après cette transformation, devient

$$V_m + V_{m-1} + \ldots + V_1 + 1 = 0.$$

Soit U_m son premier membre,

$$U_m = V_m + V_{m-1} + \ldots + V_1 + 1,$$

nous allons démontrer algébriquement que l'équation $U_m = 0$ a toutes ses racines réelles et comprises entre -2 et $+2$.

Pour cela, nous nous appuierons sur une propriété bien connue des fonctions V, à savoir : trois fonctions consécutives quelconques V_μ, $V_{\mu-1}$, $V_{\mu-2}$ sont liées par la relation

$$V_\mu - y\, V_{\mu-1} + V_{\mu-2} = 0;$$

cette relation aura lieu encore pour les trois fonctions V_2, V_1, V_0 à la condition de prendre pour V_0 la valeur $V_0 = 2$.

Il est aisé de démontrer que trois fonctions consécutives U_μ, $U_{\mu-1}$, $U_{\mu-2}$ sont liées par la même relation

$$U_\mu - y\,U_{\mu-1} + U_{\mu-2} = 0,$$

U_μ désignant le polynôme

$$U_\mu = V_\mu + V_{\mu-1} + \ldots + V_1 + 1.$$

En effet, on a les trois égalités

$$\begin{aligned}
U_\mu &= V_\mu + V_{\mu-1} + \ldots + V_2 + V_1 + 1,\\
U_{\mu-1} &= V_{\mu-1} + V_{\mu-2} + \ldots + V_1 + 1,\\
U_{\mu-2} &= V_{\mu-2} + V_{\mu-3} + \ldots + 1.
\end{aligned}$$

En ajoutant membre à membre ces égalités, après avoir multiplié préalablement la seconde par $-y$, il viendra

$$\begin{aligned}
U_\mu - y\,U_{\mu-1} + U_{\mu-2} = \;& V_\mu - y\,V_{\mu-1} + V_{\mu-2}\\
& + V_{\mu-1} - y\,V_{\mu-2} + V_{\mu-3}\\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
& + V_2 - y\,V_1 + 1\\
& + V_1 - y + 1,
\end{aligned}$$

tous les polynômes qui figurent dans chacune des lignes du second membre, jusqu'à l'avant-dernière exclusivement, sont nuls ; de plus $V_1 - y = 0$; la dernière se réduit donc à 1. En ajoutant cette unité à l'avant-dernière, on obtient

$$V_2 - y\,V_1 + 2,$$

qui est nul ; par suite, on a identiquement

$$U_\mu - y\,U_{\mu-1} + U_{\mu-2} = 0.$$

Cette relation subsiste depuis $\mu = m$ jusqu'à $\mu = 2$;

elle subsiste aussi pour $\mu = 2$, en vertu du calcul précédent, à la condition de prendre $U_0 = 1$.

On a donc entre U_m, U_{m-1}, ..., U_1, U_0 la suite des relations

$$\begin{array}{l} U_m \quad - y\,U_{m-1} + U_{m-2} = 0, \\ U_{m-1} - y\,U_{m-2} + U_{m-3} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ U_2 \quad - y\,U_1 \quad + U_0 \quad = 0. \end{array}$$

Ces relations nous montrent que les fonctions

$$U_m, \quad U_{m-1}, \quad \ldots, \quad U_0$$

jouissent des propriétés requises pour l'application du théorème de Sturm, à l'exception toutefois de celle qui concerne le rapport $\dfrac{U_m}{U_{m-1}}$.

Soient $U_\mu(a)$ et $V_\mu(a)$ ce que deviennent U_μ et V_μ quand on y remplace y par a.

Substituons dans U_μ successivement -2 et $+2$,

$$\begin{aligned} U_\mu(-2) &= V_\mu(-2) + V_{\mu-1}(-2) + \ldots + V_1(-2) + 1, \\ U_\mu(+2) &= V_\mu(+2) + V_{\mu-1}(+2) + \ldots + V_1(+2) + 1. \end{aligned}$$

Or

$$V_\mu = \left(\frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}\right)^\mu + \left(\frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2}\right)^\mu,$$

on aura donc

$$\begin{aligned} V_\mu(-2) &= 2(-1)^\mu, \\ V_\mu(+2) &= 2, \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned} U_\mu(-2) &= 2[(-1)^\mu + (-1)^{\mu-1} + \ldots + (-1)] + 1, \\ U_\mu(+2) &= 2\mu + 1 \end{aligned}$$

ou bien

$$U_\mu(-2) = (-1)^\mu \qquad \text{et} \qquad U_\mu(+2) = 2\mu + 1.$$

Les fonctions U_m, U_{m-1}, ..., U_1, U_0 ne présentent donc que des variations pour $y = -2$ et des permanences pour $y = +2$.

La suite U_m, U_{m-1}, ..., U_1, U_0 perd donc m variations quand y varie de -2 à $+2$; l'équation $U_m = 0$ a donc toutes ses racines réelles et comprises entre -2 et $+2$.

On voit de plus que le rapport $\frac{U_m}{U_{m-1}}$ passe toujours d'une valeur négative à une valeur positive quand y, en croissant, traverse une racine de l'équation $U_m = 0$.

APPLICATION DES COORDONNÉES INTRINSÈQUES. CAUSTIQUES PAR RÉFLEXION;

PAR M. BALITRAND,
Élève de l'École Polytechnique.

Nous généraliserons un peu la définition ordinaire des caustiques.

Étant données deux courbes (M) et (M_0), la tangente en M à (M) rencontre (M_0) au point M_0. On mène en ce point la normale à (M_0) et l'on prend la droite symétrique de MM_0 par rapport à cette normale.

La droite ainsi obtenue enveloppe une courbe (M') qui est la caustique par réflexion de (M_0) par rapport à (M). Si M' est le point où la droite MM_0 touche son enveloppe (M'), les points M et M' seront dits correspondants. Il faut remarquer tout d'abord la parfaite réciprocité qui existe entre (M) et (M'); de telle sorte que, (M') étant la caustique de (M_0) par rapport à (M), (M) est la caustique de (M_0) par rapport à (M').

Soient x et y les coordonnées du point M par rapport à la tangente et à la normale à (M_0) en M_0 (axes mobiles). Puisque le point M est le point où la droite MM_0 touche son enveloppe, on a, en adoptant les notations de M. Cesaro,

$$(1) \qquad \frac{dx}{ds_0} = \frac{y - \rho_0}{\rho_0}, \qquad \frac{dy}{ds_0} = -\frac{x}{\rho_0}.$$

Si u et θ sont les coordonnées polaires de M, on aura de même les relations

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{ds_0} = -\cos\theta, \\[2mm] \dfrac{d\theta}{ds_0} = -\dfrac{1}{\rho_0} + \dfrac{\sin\theta}{u}. \end{cases}$$

Pour le point M′ dont l'angle polaire est $\pi - \theta$, on a

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{du'}{ds_0} = \cos\theta, \\[2mm] -\dfrac{d\theta}{ds_0} = -\dfrac{1}{\rho_0} + \dfrac{\sin\theta}{u'}. \end{cases}$$

Si l'on désigne par h et h' les segments déterminés par les normales en M et M′ à (M) et (M′) sur la normale en M_0 à (M_0), on déduit des formules (2) et (3)

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{\rho_0} + \frac{d\theta}{ds_0},$$
$$\frac{1}{h'} = \frac{1}{\rho_0} - \frac{d\theta}{ds_0},$$

et, par suite, en ajoutant

$$(4) \qquad \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} = \frac{2}{\rho_0},$$

c'est-à-dire que les normales en M et M′ divisent harmoniquement le rayon de courbure de (M_0) en M_0.

Les équations (2) et (3) nous fournissent ensuite

$$(5) \qquad du + du' = 0 \qquad \text{ou} \qquad d(u + u') = 0.$$

Pour interpréter cette relation, prenons le point M_1

symétrique de M par rapport à la tangente. On vérifie bien aisément que la droite M_0M_1 est normale à la courbe (M_1). La relation (5) s'écrit donc

$$d(M_1M') = 0,$$

c'est-à-dire que M_1M' touche son enveloppe au point M'.

Ainsi la courbe (M') est la développée de la courbe lieu des points tels que M_1. C'est la généralisation d'un théorème énoncé par Quetelet dans le cas où la courbe (M) se réduit à un point.

Si l'on prend le point M'_1 symétrique de M' par rapport à la tangente, la courbe (M) est la développée de la courbe (M'_1). Puisque les courbes (M) et (M') sont les développées des courbes (M_1) et (M'_1) et que l'on a $M_1M' = M'_1M$, les arcs élémentaires ds, ds' des courbes (M) et (M') sont égaux.

Si l'on observe que les angles de contingence des courbes (M) et (M') sont

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + d\theta,$$
$$\varepsilon' = \varepsilon_0 - d\theta,$$

on en déduit

$$\frac{ds}{\rho} = \left(\frac{\varepsilon_0}{ds_0} + \frac{d\theta}{ds_0}\right) = \frac{ds_0}{h},$$
$$\frac{ds}{\rho'} = \left(\frac{\varepsilon_0}{ds_0} - \frac{d\theta}{ds_0}\right) = \frac{ds_0}{h'},$$

d'où

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{h}{h'}.$$

Cette formule permet, connaissant le centre de courbure de l'une des courbes (M) ou (M'), de déterminer le centre de courbure de l'autre. Elle nous montre, en effet, que les parallèles, menées par les centres de courbure en deux points correspondant à la normale à (M_0), rencontrent les droites MM_0, $M'M_0$ en des points situés sur une droite parallèle à MM'.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que les droites $M_0 M$, $M_0 M'$ faisaient des angles égaux avec la normale en M_0. On peut plus généralement prendre

$$\theta' = f(\theta),$$

θ' désignant l'angle de $M_0 M'$ avec la normale.

On en déduit

$$d\theta' = f'(\theta)\, d\theta.$$

Les formules (2) et (3) nous donnent alors

$$(6) \qquad f'(\theta)\left(\frac{\sin\theta}{u} - \frac{1}{\rho_0}\right) = \frac{\sin\theta'}{u'} - \frac{1}{\rho_0}.$$

En particulier, prenons

$$\sin\theta = n \sin\theta_1.$$

La formule (6) devient

$$\cos\theta\left(\frac{\sin\theta}{u} - \frac{1}{\rho_0}\right) = n\cos\theta_1\left(\frac{\sin\theta'}{u'} - \frac{1}{\rho_0}\right).$$

NOTE SUR L'INTÉGRALE $\int_0^\infty e^{-u^2} du$;

PAR M. STIELTJES.

M. Méray a montré récemment (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1889) qu'on peut obtenir la valeur de cette intégrale à l'aide de la formule de Wallis. La déduction suivante se fonde sur la même idée, mais on la trouvera peut-être un peu plus simple.

Soit

$$I_n = \int_0^\infty u^n e^{-u^2} du;$$

une intégration par parties donne

$$I_n = \frac{n-1}{2} I_{n-2};$$

d'où l'on conclut,

$$I_{2k} = \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2^k} I_0,$$

$$I_{2k+1} = \frac{1.2.3\ldots k}{2}.$$

L'expression

$$I_{n+1} + 2x\,I_n + x^2\,I_{n-1} = \int_0^\infty u^{n-1}(u+x)^2\,e^{-u^2}\,du$$

est évidemment *positive* pour toute valeur réelle de x; donc

$$I_n^2 < I_{n-1} I_{n+1}$$

ou, à cause de $I_{n+1} = \frac{n}{2} I_{n-1}$,

$$I_n^2 < \frac{n}{2} I_{n-1}^2.$$

On a, par conséquent,

$$I_{2k}^2 > \frac{2}{2k+1} I_{2k+1}^2, \qquad I_{2k}^2 < I_{2k-1} I_{2k+1},$$

c'est-à-dire

$$I_{2k}^2 > \frac{(1.2.3\ldots k)^2}{4k+2}, \qquad I_{2k}^2 < \frac{(1.2.3\ldots k)^2}{4k},$$

en sorte qu'on peut poser

$$I_{2k}^2 = \frac{(1.2.3\ldots k)^2}{4k+2}(1+\varepsilon), \qquad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2k},$$

ou, en exprimant I_{2k} par I_0,

$$2I_0^2 = \frac{[2.4.6\ldots(2k)]^2}{[1.3.5\ldots(2k-1)]^2(2k+1)}(1+\varepsilon).$$

En faisant croître indéfiniment l'entier k, il vient, d'après la formule de Wallis,

$$2I_0^2 = \frac{\pi}{2}, \qquad I_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES D'APRÈS LEUR DÉFINITION (1);

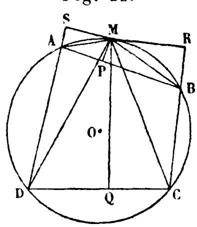
PAR M. L. MALEYX.

Théorème de Pappus.

V. *Si d'un point pris sur la circonférence d'un cercle on abaisse des perpendiculaires sur les côtés d'un quadrilatère inscrit, le produit des perpendiculaires abaissées sur deux côtés opposés est égal à celui des perpendiculaires abaissées sur les deux autres.*

Soient O la circonférence considérée (*fig.* 22), ABCD le quadrilatère inscrit, MP, MQ les perpendiculaires

Fig. 22.



abaissées du point M sur les deux côtés opposés AB, CD; MR, MS les perpendiculaires abaissées du même point sur les deux autres. Joignons le point M aux points A, B, C, D, par des lignes droites : on a, d'après un théorème connu, et désignant par R le rayon du cercle O,

$$MA \times MB = MP \times 2R, \qquad MD \times MC = MQ \times 2R;$$

(1) *Voir* même Tome, p. 424.

d'où, multipliant ces égalités membre à membre,

$$MA \times MB \times MC \times MD = 4R^2 \times MP \times MQ;$$

on trouve encore par l'application du même théorème

$$MA \times MB \times MC \times MD = 4R^2 \times MR \times MS;$$

de là, par comparaison,

$$MP \times MQ = MR \times MS.$$

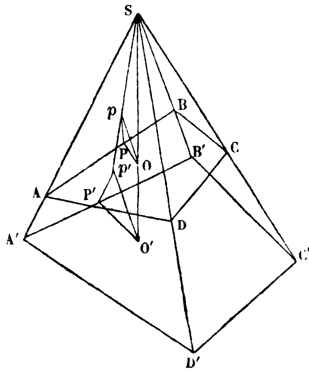
Ce théorème s'applique aux sections planes d'un cône à base circulaire avec une légère modification d'énoncé :

Si d'un point pris sur une section conique on abaisse des perpendiculaires sur les côtés d'un quadrilatère inscrit, le produit des perpendiculaires abaissées de ce point sur deux côtés opposés du quadrilatère est au produit des perpendiculaires abaissées sur les deux autres dans un rapport constant.

Si l'on unit les sommets du quadrilatère inscrit dans la section conique au sommet du cône, auquel elle appartient, par des lignes droites, génératrices du cône, ces droites rencontrent la circonférence directrice du cône en quatre points, sommets d'un quadrilatère inscrit dans cette circonférence et dont le quadrilatère inscrit dans la conique peut être considéré comme la perspective.

Soient S le sommet du cône, ABCD le quadrilatère inscrit dans la conique, et perspective du quadrilatère $A'B'C'D'$ inscrit dans la directrice circulaire (*fig.* 23); soit O un point du plan ABCD, traçons la droite SO et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre en O' avec le plan $A'B'C'D'$; puis des points O et O' abaissons les perpendiculaires Op, $O'p'$ sur le plan SAB, et pP, $p'P'$ respectivement perpendiculaires sur AB, $A'B'$; enfin joignons par des lignes droites OP, $O'P'$. OP et $O'P'$ sont respectivement perpendiculaires à AB et A′B′, d'après le théorème des trois perpendiculaires; de plus, dans les triangles rectangles OPp, $O'P'p'$, les angles en P et P′

Fig. 23.



sont fixes comme angles rectilignes des dièdres aigus formés par le plan SAB avec les plans ABCD, A′B′C′D′; il en résulte que dans ces triangles les rapports des hypoténuses OP, O′P′, aux côtés Op, $O'p'$, sont des nombres fixes, et que le rapport $\frac{OP}{O'P'}$ est égal au produit du rapport $\frac{Op}{O'p'}$ par un nombre constant, soit α_1, d'où

$$\frac{OP}{O'P'} = \alpha_1 \frac{Op}{O'p'}.$$

Comme, du reste, les triangles $SO'p'$, SOp sont semblables, puisque Op, $O'p'$, perpendiculaires à un même plan, sont parallèles, on a $\frac{Op}{O'p'} = \frac{SO}{SO'}$ et, en conséquence,

$$\frac{OP}{O'P'} = \alpha_1 \frac{SO}{SO'}. \tag{1}$$

On trouverait de même, désignant par Q, R, S les pieds des perpendiculaires abaissées du point O sur les droites DC, BC, AD, et de même par Q′, R′, S′ ceux des perpendiculaires abaissées du point O′ sur les droites D′C′, B′C′, A′D′, respectivement :

$$(2) \qquad \frac{OQ}{O'Q'} = \alpha_2 \frac{SO}{SO'},$$

$$(3) \qquad \frac{OR}{O'R'} = \alpha_3 \frac{SO}{SO'},$$

$$(4) \qquad \frac{OS}{O'S'} = \alpha_4 \frac{SO}{SO'},$$

α_2, α_3, α_4 étant des coefficients constants.

On déduit des égalités (1), (2), (3), (4), par une transformation évidente,

$$\frac{OP \times OQ}{OR \times OS} = \frac{O'P' \times O'Q'}{O'R' \times O'S'} \times \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3 \alpha_4}.$$

Si nous supposons alors le point O placé en un point de la section conique, le point O′ sera placé sur la circonférence directrice; dès lors on aura, d'après le théorème précédent,

$$\frac{O'P' \times O'Q'}{O'R' \times O'S'} = 1,$$

d'où

$$\frac{OP \times OQ}{OR \times OS} = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3 \alpha_4},$$

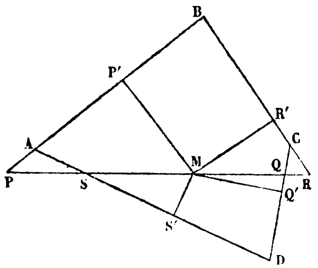
qui établit le théorème énoncé.

Théorème et application à la construction des points communs d'une droite quelconque et d'une conique dont on donne cinq points.

VI. *Si l'on considère une conique circonscrite à un quadrilatère et que par un quelconque de ses points on mène une parallèle à une direction fixe, le* **rapport involutif** *de ce point, par rapport aux deux couples* *de points de rencontre de la sécante avec les deux systèmes de côtés opposés du quadrilatère, est un nombre constant.*

Soient ABCD le quadrilatère inscrit, PS la sécante parallèle à une direction fixe menée par le point M va-

Fig. 24.



riable sur la conique circonscrite, et coupant les couples de côtés opposés du quadrilatère aux points P et Q, R et S (*fig.* 24). Abaissons du point M les perpendiculaires MP′, MQ′, MR′, MS′, sur les côtés du quadrilatère; les triangles rectangles MP′P, MQ′Q, MR′R, MS′S, restent semblables à eux-mêmes dans le déplacement de la sécante : il en résulte qu'on a les égalités

$$\mathrm{MP} = \mathrm{MP}'.\beta_1, \qquad \mathrm{MQ} = \mathrm{MQ}'.\beta_2,$$
$$\mathrm{MR} = \mathrm{MR}'.\beta_3, \qquad \mathrm{MS} = \mathrm{MS}'.\beta_4;$$

β_1, β_2, β_3, β_4 étant des nombres fixes; et, en conséquence, on a

$$\frac{\mathrm{MP}\times\mathrm{MQ}}{\mathrm{MR}\times\mathrm{MS}} = \frac{\mathrm{MP}'\times\mathrm{MQ}'}{\mathrm{MR}'\times\mathrm{MS}'}\times\frac{\beta_1.\beta_2}{\beta_3.\beta_4}.$$

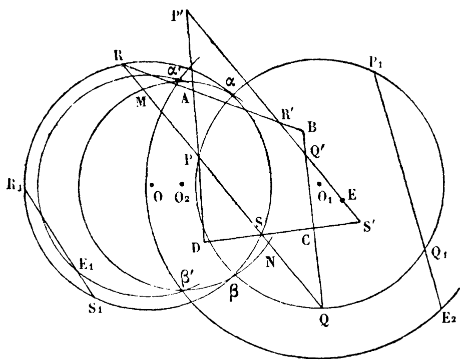
Or, d'après le théorème de **Pappus**, établi au numéro précédent, le second membre est fixe.

Le second membre de l'égalité précédente est numériquement fixe : on pourra définir son signe, d'après ceux des segments MP, MQ, MR, MS, pour une position particulière du point M; ce signe, une fois déterminé, restera le même pour tous les points de la courbe, car il ne peut changer que tout autant que l'un des segments change de signe, et cela ne peut arriver que tout autant que le point M, dans son déplacement continu, vient passer par un des sommets du quadrilatère inscrit; dans ce cas, deux des segments changent à la fois de signe, et le rapport involutif conserve le sien.

On déduit de ce théorème une construction, **relativement simple**, des points communs d'une conique, dont on donne cinq points, et d'une droite quelconque.

Soient A, B, C, D, E cinq points d'une conique, RQ une droite donnée (*fig.* 25); construisons le quadrilatère

Fig. 25.



inscrit ABCD, et menons par le point E une parallèle P'S' à RQ. D'après le théorème précédent et si M, N sont les points communs de la conique et de la droite RQ, les trois rapports involutifs

$$\frac{ER' \times ES'}{EP' \times EQ'}, \quad \frac{NR \times NS}{NP \times NQ}, \quad \frac{MR \times MS}{MP \times MQ}$$

sont égaux; il en résulte que, si l'on construit deux cercles, soit O passant par R et S, et O_1 passant par P et Q, les points M et N appartiennent au cercle lieu des points dont les puissances par rapport aux cercles O et O_1 sont dans le rapport $\frac{ER' \times ES'}{EP' \times EQ'}$, n° I, Chap. II.

Ce dernier cercle, dont les points communs avec la droite RQ sont les points cherchés, peut être construit; en effet, on sait d'abord qu'il a même axe radical avec les deux cercles O et O_1 et qu'en conséquence il passe par leurs points communs α et β; en second lieu, on peut en déterminer facilement un et même deux autres points. Si nous inscrivons dans les cercles O et O_1 deux cordes R_1S_1, P_1Q_1 respectivement égales à $R'S'$, $P'Q'$, puis que nous prenions sur elles les segments R_1E_1, P_1E_2, respectivement égaux à $R'E$, $P'E$, le cercle décrit de O comme centre avec OE_1 pour rayon sera le lieu des points dont les puissances, par rapport au cercle O, sont égales à $ER' \times ES'$, et celui qui est décrit de O_1 comme centre avec O_1E_2 pour rayon sera le lieu des points dont les puissances par rapport au cercle O_1 sont égales à $EP' \times EQ'$; les points communs α', β' de ces deux cercles appartiennent au cercle cherché, dont on connaît ainsi quatre points, ce qui permet de le décrire.

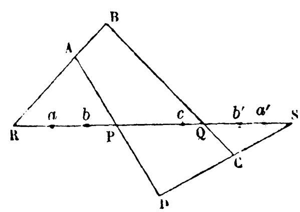
Remarque I. — On peut ainsi remplacer les deux points communs, réels ou imaginaires, de la conique et de la droite par ceux de la droite et d'un cercle facile à construire.

Remarque II. — En dehors de ses autres usages, cette construction peut être utilisée, **en Géométrie descriptive**, pour construire les tangentes au point double effectif de deux quadriques qui ont un plan tangent commun et même point de contact.

VII. Théorème. — *Si trois coniques sont circonscrites à un même quadrilatère, et que par un point variable de l'une d'elles on mène une sécante rectiligne parallèle à une direction fixe, le rapport involutif de ce point par rapport aux deux couples de points de rencontre de la sécante avec les deux autres coniques est un nombre constant.*

Soient ABCD le quadrilatère inscrit dans les trois coniques (*fig.* 26), PQ la sécante parallèle à la direc-

Fig. 26.



tion donnée menée par le point c d'une de ces courbes. Soient P et Q, R et S les points de rencontre de la sécante avec les couples de côtés opposés du quadrilatère, a et a', b et b' les couples de points de rencontre avec les deux autres courbes.

D'après le théorème précédent, on a, θ, θ_1, θ_2 étant des nombres fixes,

$$\frac{a\text{P} \times a\text{Q}}{a\text{R} \times a\text{S}} = \theta = \frac{a'\text{P} \times a'\text{Q}}{a'\text{R} \times a'\text{S}}.$$

Ramenons ces deux égalités à la forme entière; en prenant le point c pour origine des distances, nous aurons

$$(ca - c\text{P})(ca + c\text{Q}) = \theta(c\text{R} - ca)(ca + c\text{S}),$$
$$(ca' + c\text{P})(ca' - c\text{Q}) = \theta(ca' + c\text{R})(c\text{S} - ca').$$

Ordonnons ces deux égalités, lues aux premiers membres, par rapport aux puissances décroissantes de

ca, ca', respectivement, et remarquant que

$$cP \times cQ = cR \times cS \times \theta_2,$$

nous aurons

$$\begin{aligned}\overline{ca}^2(1+\theta)+ca\,[cQ-cP+\theta(cS-cR)]\\ -cR\times cS(\theta_2+\theta)=0,\\ \overline{ca'}^2(1+\theta)-ca'[cQ-cP+\theta(cS-cR)]\\ -cR\times cS(\theta_2+\theta)=0.\end{aligned}$$

Multipliant la première par ca', la seconde par ca et ajoutant, on trouve

$$(ca+ca')[ca\times ca'(1+\theta)-cR\times cS(\theta_2+\theta)]=0,$$

égalité qui exige

$$(1)\qquad ca\times ca'(1+\theta)=cR\times cS(\theta_2+\theta).$$

Par un calcul analogue et partant des égalités

$$\frac{bP\times bQ}{bR\times bS}=\theta_1=\frac{b'P\times b'Q}{b'R\times b'S},$$

on trouve

$$(2)\qquad cb\times cb'(1+\theta_1)=cR\times cS(\theta_2+\theta_1);$$

d'où, divisant membre à membre les égalités (1) et (2),

$$\frac{ca\times ca'}{cb\times cb'}=\frac{(1+\theta_1)(\theta_2+\theta)}{(1+\theta)(\theta_2+\theta_1)};$$

le second membre étant constant, le théorème est démontré.

Théorème de Desargues et sa généralisation.

VIII. Le théorème de DESARGUES consiste en ce qui suit :

Une sécante rectiligne quelconque détermine par ses rencontres avec une conique et les systèmes de côtés *opposés d'un quadrilatère inscrit six points en involution.*

La démonstration de ce théorème se déduit immédiatement du théorème qui précède de deux rangs; en effet, puisque, conformément à ce théorème, le rapport involutif du point M par rapport aux couples de points P et Q, R et S, est le même pour tous les points de la courbe, quand la sécante se déplace parallèlement à une direction fixe, il aura la même valeur pour le second point commun M′ de la sécante PR avec la courbe; en conséquence, les deux points M, M′, ayant même rapport involutif par rapport aux deux couples de points P et Q, R et S, forment avec eux un système en involution (n° II, Chap. II, fin).

La généralisation du théorème de Desargues par Sturm consiste en ce qui suit :

Une sécante rectiligne quelconque détermine par ses rencontres avec trois coniques circonscrites au même quadrilatère un système de six points en involution.

Cette généralisation se déduit du théorème du numéro précédent par le raisonnement au moyen duquel nous avons déduit le théorème de Desargues de celui qui précède de deux rangs; nous ne nous y arrêterons pas.

Conséquence du théorème de Desargues. — *Si trois côtés d'un quadrilatère inscrit dans une conique tournent autour de trois points fixes pris sur une ligne droite, la quatrième tourne autour d'un point fixe de la même droite.*

En effet, le point où le quatrième côté rencontre la droite est le conjugué du point de rencontre du côté opposé avec la même droite, dans l'involution déterminée par les deux autres points et les deux points de rencontre de la conique avec la droite; et ceci a lieu alors même que les points communs de la conique et de la droite seraient imaginaires, puisqu'on peut toujours remplacer les points communs d'une conique et d'une droite par ceux d'un cercle et de la même droite (n° VI, Chap. II).

Note sur le n° VII du présent Chapitre. — La démonstration analytique du théorème du n° VII, dont celui du n° VI n'est qu'un cas particulier, est presque immédiate; on sait en effet que, si les équations de deux coniques, rapportées au même système d'axes rectilignes, sont $F(x,y)=0$, $F_1(x,y)=0$, l'équation générale des coniques passant par les points communs des deux premières est $F(x,y)+\lambda F_1(x,y)=0$, λ étant un coefficient constant pour chacune de ces courbes.

On sait encore que les distances du point du plan dont les coordonnées sont x_0, y_0, aux points où une droite passant par (x_0, y_0) et dont le point directeur ayant pour coordonnées a, b rencontre la courbe $F(x,y)=0$, sont les racines de l'équation

$$F(x_0,y_0)+\rho(aF'_{x_0}+bF'_{y_0})+\rho^2\varphi(a,b)=0,$$

$\varphi(x,y)$ étant l'ensemble des termes du second degré de $F(x,y)$.

Il en résulte que le produit de ces distances est égal à $\dfrac{F(x_0,y_0)}{\varphi(a,b)}$; de même le produit des distances du point (x_0, y_0) aux points où la même droite rencontre la courbe $F_1(x,y)=0$ est égal à $\dfrac{F_1(x_0,y_0)}{\varphi_1(a,b)}$.

Or l'équation $F(x_0,y_0)+\lambda F_1(x_0,y_0)=0$, qui est vérifiée par les coordonnées de tout point, (x_0, y_0), de la troisième courbe, peut se mettre sous la forme

$$\frac{\dfrac{F(x_0,y_0)}{\varphi(a,b)}}{\dfrac{F_1(x_0,y_0)}{\varphi_1(a,b)}}=-\lambda\,\frac{\varphi_1(a,b)}{\varphi(a,b)};$$

et sous cette forme elle exprime que le rapport involutif du point (x_0, y_0), par rapport aux couples de points où la droite, définie de direction par le point (a, b), et passant par le point (x_0, y_0), rencontre les deux autres courbes, est constant.

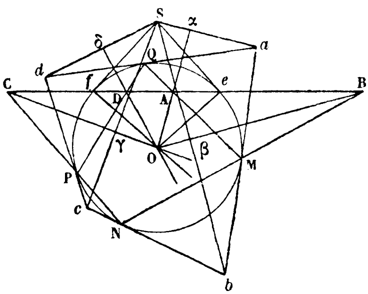
Cette démonstration est sans doute très simple; mais je dois à la vérité de dire que, quoique j'aie eu l'occasion de retourner et de voir retourner l'équation $F(x,y)+\lambda F_1(x,y)=0$ de bien des manières, il ne m'est jamais venu à l'esprit de l'interpréter ainsi; et que, si je n'avais été conduit par les considérations géométriques de la présente étude, je ne l'aurais probablement jamais connue.

Théorème corrélatif de celui de Desargues.

IX. *Si l'on considère une circonférence de cercle et un quadrilatère circonscrit, qu'on joigne un point de son plan aux deux couples de sommets opposés du quadrilatère, que du même point on mène les deux tangentes au cercle, ces trois couples de deux droites font partie d'un faisceau en involution.*

Soient $abcd$ le quadrilatère circonscrit à la circonférence O (*fig.* 27), S le point de son plan, Se, Sf les

Fig. 27.



deux tangentes issues de ce point; il s'agit de démontrer que les trois couples de droites Sa et Sc, Se et Sf, Sb et Sd forment un faisceau en involution.

Construisons le quadrilatère inscrit dont les sommets M, N, P, Q sont les points de contact des côtés du quadrilatère circonscrit et prolongeons ses côtés opposés jusqu'à leurs points de rencontre avec la polaire ef du point S, par rapport au cercle O, en A, B, C, D.

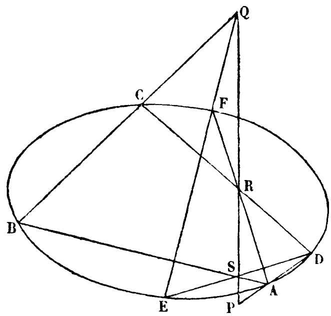
L'un de ces points, A par exemple, étant le point commun des polaires des points S et a par rapport au cercle O, est le pôle de la droite Sa : dès lors $OA\alpha$ est perpendiculaire sur Sa; on voit de même que Oe, $O\beta B$, $O\gamma C$, Of, $OD\delta$ sont respectivement perpendiculaires sur Se, Sb, Sc, Sf, Sd; il en résulte que le faisceau des droites admettant pour rayons associés Sa et Sc, Se et Sf, Sb et Sd, est superposable sur celui dont les rayons correspondants OA et OC, Oe et Of, OB et OD, leur sont respectivement perpendiculaires; et, comme ces derniers forment un faisceau en involution, d'après le théorème de Desargues, il en est de même des premiers, ce qu'on voulait démontrer.

Le théorème qu'on vient de démontrer pour le cercle s'applique également à l'une quelconque des trois sections coniques; en effet, une quelconque des trois sections coniques est, par définition, la perspective d'un cercle en prenant le sommet du cône pour point de vue; un quadrilatère circonscrit à la conique est celle d'un quadrilatère circonscrit au cercle; dès lors, si l'on unit un point du plan d'une conique aux sommets opposés d'un quadrilatère circonscrit à cette conique, et que du même plan on lui mène des tangentes, ces six droites seront perspectives de six droites du plan du cercle qui font partie d'un faisceau en involution, d'après le théorème précédent; il résulte de ce qui a été dit à la fin du n° IV, Ch. II, que ces six droites font aussi partie d'un faisceau en involution.

X. Théorème de Pascal. — *Les points de rencontre des trois couples de côtés opposés d'un hexagone inscrit dans une conique sont situés en ligne droite.*

Soit l'hexagone ABCDEF inscrit dans une conique (*fig.* 28) : construisons la diagonale AD, unissant deux sommets opposés, et prenons son point commun P avec la droite QR, qui joint les points Q et R où se coupent deux systèmes de deux côtés opposés, BC et FE, DC et AF. Trois côtés AD, DC, CB du quadrilatère inscrit ADCB passent par les trois points P, Q, R; il en est de même des trois côtés AD, AF, FE du quadrilatère in-

Fig. 28.



scrit AFED; donc les quatrièmes côtés de ces quadrilatères, AB et DE, vont se couper au même point S de la droite QR, ce qu'on voulait démontrer (conséquence du théorème de Desargues, n° VIII, Chap. II).

Ce théorème continue à avoir lieu si un ou plusieurs côtés de l'hexagone deviennent nuls, en remplaçant chaque côté devenant nul par la tangente qui en est la limite ([1]).

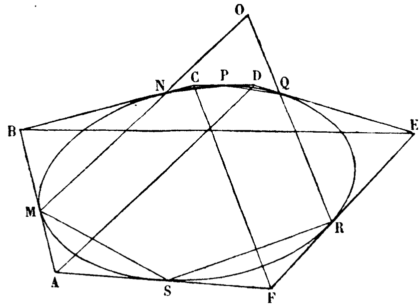
XI. Théorème de Brianchon. — *Les diagonales unissant deux sommets opposés d'un hexagone circonscrit à une conique se coupent en un même point.*

Soit ABCDEF un hexagone circonscrit à une conique

([1]) Si l'on admet le théorème de Pascal pour le cercle, et il y en a plusieurs démonstrations élémentaires que nous n'avons pas à rapporter, on peut en déduire que ce théorème a aussi lieu pour une conique quelconque, considérée comme perspective d'un cercle, ce qui constitue une démonstration simple du même théorème.

(*fig.* 29), M, N, P, Q, R, S les points de contact des côtés qui sont les sommets d'un hexagone inscrit; considérons la diagonale BE qui unit deux sommets opposés de l'hexagone circonscrit. La droite MN passant par les

Fig. 29.



pôles M et N des tangentes AB, BC, par rapport à la conique, a pour pôle leur point commun B (n° XIX, Chap. I); de même la droite QR a pour pôle le point E où se coupent les tangentes DE, EF; la diagonale BE passant par les pôles B et E des cordes MN et QR, le point O où se coupent ces cordes est le pôle de la droite BE.

Or ce point O est un des points de la droite de Pascal relative à l'hexagone inscrit : dès lors la droite BE passe par le pôle de la droite de Pascal; il en est de même des deux autres diagonales AD, CF : donc ces trois diagonales se coupent en un même point.

Ce théorème continue encore à s'appliquer si deux côtés consécutifs viennent se placer dans le prolongement l'un de l'autre, en considérant le point de contact comme le sommet commun à ces deux côtés; il s'applique encore dans ces conditions s'il en est ainsi pour plusieurs couples de deux côtés consécutifs. (*A suivre.*)

RECHERCHE DE QUELQUES COURBES PLANES, PAR L'INTERMÉDIAIRE DE LEURS DÉVELOPPÉES;

PAR M. V. JAMET.

1. THÉORÈME. — *Si le rayon de courbure d'une courbe* (C) *est, en chaque point, moyenne harmonique entre les distances du pied de la normale aux points où celle-ci rencontre une courbe algébrique fixe* (S), *la développée de* (C) *jouit de la propriété suivante, qui est caractéristique : son arc, augmenté d'une longueur constante et élevé à une puissance égale au degré de* (S), *est une fonction entière et rationnelle des coordonnées de son extrémité mobile.*

En effet, soit $f(x,y)=0$ l'équation de la courbe (S); on peut toujours supposer que la lettre f désigne une fonction entière et rationnelle de x, y; soit m son degré. Soient, aussi, x, y les coordonnées d'un point de la développée de (C), X, Y les coordonnées du point correspondant situé sur (C), ρ le rayon de courbure de (C) en ce point, s l'arc de la développée, compté sur cette courbe à partir d'un point fixe jusqu'au point (x, y). On connaît les relations

$$(1)\qquad X = x + \rho\frac{dx}{ds},\qquad Y = y + \rho\frac{dy}{ds},$$

$$(2)\qquad \rho = a - s,$$

où a désigne une constante. Pour trouver les distances du point (x, y), aux points où la normale rencontre la courbe (S), il suffit de remplacer, dans son équation,

x, y par les seconds membres des équations (1). On trouve ainsi l'équation

$$f(x,y)+\rho\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right) \\ +\frac{\rho^2}{1.2}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right)\right)^2+\ldots=0,$$

de degré m par rapport à ρ. Soient $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ ses racines.

On a, par hypothèse,

$$\frac{m}{\rho}=\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}+\ldots+\frac{1}{\rho_m};$$

donc

$$\frac{m}{a-s}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds}}{f(x,y)}$$

ou bien

$$(3)\qquad -\frac{m\,ds}{s-a}+\frac{df}{f(x,y)}=0.$$

On trouve, en intégrant,

$$\log f(x,y)-m\log(s-a)=\log C$$

ou

$$(4)\qquad f(x,y)=C(s-a)^m,$$

C désignant une constante.

Cette équation démontre la proposition directe : la réciproque est vraie, parce que l'équation (3) peut être regardée comme une conséquence de l'équation (4).

2. Celle-ci permet également de trouver une équation différentielle du premier ordre, contenant une constante arbitraire et devant être vérifiée par les coordonnées d'un point quelconque de la développée : il suffit d'éli-

miner $s - a$ entre l'équation (4) et l'équation

$$df = m\,C(s-a)^{m-1}\,ds,$$

qu'on en déduit par différentiation, puis, dans l'équation obtenue, de remplacer ds par $\sqrt{dx^2+dy^2}$. Mais on conçoit aussi la possibilité de vérifier l'équation (4) en y remplaçant x, y, s par des fonctions de deux paramètres : il faudra alors établir, entre ces deux paramètres, une relation équivalente à celle-ci

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Comme application de ce qui précède, nous traiterons le cas où la courbe (S) est une conique, laissant au lecteur le soin de ramener aux éléments du Calcul intégral les cas particuliers où cette conique dégénère en un cercle, ou en une couple de droites. Nous rappellerons en outre que le cas du cercle a été traité incidemment (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, p. 178, 353; 1888) par M. Cesaro, qui vient également de publier, dans le Journal *Mathesis* (octobre 1889), une étude directe de la courbe (C) dans le cas où la conique se compose de deux droites parallèles.

3. Si la conique donnée possède un centre à distance finie, nous pourrons écrire l'équation (4) comme il suit

$$\frac{x^2}{a_1}+\frac{y^2}{a_2}-\frac{(s-a)^2}{a_3}=1,$$

a_3 désignant une constante arbitraire. Cette équation sera vérifiée si l'on y remplace x, y, $s-a$ par les fonctions de λ, μ, qui résultent des formules suivantes

$$x^2=\frac{a_1(a_1+\lambda)(a_1+\mu)}{(a_1-a_1)(a_1-a_3)},\qquad y^2=\frac{a_2(a_2+\lambda)(a_2+\mu)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)},$$
$$-(s-a)^2=\frac{a_3(a_3+\lambda)(a_3+\mu)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}.$$

(Celles-ci résultent de la théorie des coordonnées elliptiques, telle que Jacobi l'a exposée dans ses *Leçons de Dynamique.*)

La substitution de ces expressions dans l'équation

$$dx^2 + dy^2 - ds^2 = 0$$

conduit, après la suppression du facteur $\lambda - \mu$, à l'équation différentielle suivante

$$\frac{\lambda\, d\lambda^2}{(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)(a_3+\lambda)} - \frac{\mu\, d\mu^2}{(a_1+\mu)(a_2+\mu)(a_3+\mu)} = 0$$

ou

$$(5) \quad \sqrt{\frac{\lambda}{(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)(a_3+\lambda)}}\, d\lambda \pm \sqrt{\frac{\mu}{(a_1+\mu)(a_2+\mu)(a_3+\mu)}}\, d\mu = 0$$

et l'on est ramené à effectuer deux quadratures. Les deux intégrales que l'on trouve ainsi se transforment en des fonctions qu'on désigne, d'après Jacobi, par la notation $\Pi(x, a)$. En effet, posons

$$\frac{\lambda}{a_1+\lambda} = h \operatorname{sn}^2 \varphi, \qquad \frac{\mu}{a_1+\mu} = h \operatorname{sn}^2 \psi.$$

Nous trouvons, successivement,

$$\lambda = \frac{a_1 h \operatorname{sn}^2 \varphi}{1 - h \operatorname{sn}^2 \varphi},$$

$$d\lambda = 2 a_1 h \frac{\operatorname{sn} \varphi \operatorname{cn} \varphi \operatorname{dn} \varphi\, d\varphi}{(1 - h \operatorname{sn}^2 \varphi)^2},$$

$$a_2 + \lambda = \frac{a_2 + h(a_1 - a_2) \operatorname{sn}^2 \varphi}{1 - h \operatorname{sn}^2 \varphi},$$

$$a_3 + \lambda = \frac{a_3 + h(a_1 - a_3) \operatorname{sn}^2 \varphi}{1 - h \operatorname{sn}^2 \varphi};$$

puis, si nous faisons

$$h = \frac{a_2}{a_2 - a_1}, \qquad k^2 = \frac{a_3 - a_1}{a_3} \, \frac{a_2}{a_2 - a_1},$$

nous trouverons encore

$$a_2 + \lambda = \frac{a_2 \operatorname{cn}^2 \varphi}{1 - h \operatorname{sn}^2 \varphi}, \qquad a_3 + \lambda = \frac{a_3 \operatorname{dn}^2 \varphi}{1 - h \operatorname{sn}^2 \varphi},$$

et nous en conclurons que l'intégrale

$$\int_0^\lambda \sqrt{\frac{\lambda}{(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)(a_3+\lambda)}}\, d\lambda$$

ne diffère que par un facteur constant de l'intégrale suivante :

$$\int_0^\varphi \frac{\operatorname{sn}^2 \varphi \, d\varphi}{1 - h \operatorname{sn}^2 \varphi}.$$

Soit encore

$$h = k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{sn}^2 \alpha = \frac{a_3}{a_3 - a_1}.$$

L'équation différentielle (5), transformée comme il vient d'être dit, sera équivalente à celle-ci

$$\int_0^\varphi \frac{k^2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha \operatorname{sn}^2 \varphi \, d\varphi}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \operatorname{sn}^2 \varphi} \pm \int_0^\psi \frac{k^2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha \operatorname{sn}^2 \psi \, d\psi}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \operatorname{sn}^2 \psi} = \mathrm{C},$$

C désignant une constante arbitraire ; ou encore

$$\Pi(\varphi, \alpha) \pm \Pi(\psi, \alpha) = \mathrm{C}.$$

4. Si la conique donnée est une parabole, l'équation (4) prend la forme

$$2x - \frac{y^2}{p} - \frac{(s-a)^2}{q} = 0.$$

où q désigne une constante arbitraire. Cette relation est celle qui existe entre les limites de x, y, s, si l'on suppose que dans l'équation

$$\frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{a_2} - \frac{(s-a)^2}{a_3} = 1.$$

lorsque, après avoir remplacé x par $x - \sqrt{a_1}$, on suppose que a_1, a_2, a_3 deviennent infinis, avec les conditions suivantes

$$(6) \qquad \lim \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} = p, \qquad \lim \frac{a_3}{\sqrt{a_1}} = q.$$

Si l'on suppose, en outre,

$$(7) \qquad \lim \frac{\lambda}{\sqrt{a_1}} = u, \qquad \lim \frac{\mu}{\sqrt{a_1}} = v,$$

les formules qui font connaître $x, y, s - a$ en fonction de λ, μ se transforment comme il suit

$$\begin{aligned} -2x &= u + v + p + q, \\ y^2 &= \frac{p(p+u)(p+v)}{q-p}, \\ -(s-a)^2 &= \frac{q(q+u)(q+v)}{q-p}. \end{aligned}$$

Si, dans l'équation

$$dx^2 + dy^2 = ds^2,$$

on tient compte de ces relations, ou, si l'on fait, dans l'équation (5) les hypothèses (6), (7), on trouve l'équation différentielle suivante

$$\frac{v\,dv^2}{(p+v)(q+v)} - \frac{u\,du^2}{(p+u)(q+u)} = 0$$

ou

$$\sqrt{\frac{v}{(p+v)(q+v)}}\,dv \pm \sqrt{\frac{u}{(p+u)(q+u)}}\,du = 0,$$

dont l'intégration se ramène au calcul des fonctions désignées habituellement par la notation $Z(x)$. Il suffit, en effet, de poser

$$u = -p\,\mathrm{sn}^2\varphi, \qquad v = -p\,\mathrm{sn}^2\psi,$$

avec la condition

$$k^2 = \frac{q}{p}.$$

On trouve ainsi l'équation différentielle

$$\operatorname{sn}^2\varphi\, d\varphi \pm \operatorname{sn}^2\psi\, d\psi = 0,$$

dont l'intégrale est

$$Z(\varphi) \pm Z(\psi) = C,$$

C désignant une constante arbitraire.

MÉTHODE ÉLÉMENTAIRE POUR ÉTUDIER LES VARIATIONS DES FONCTIONS CONTINUES. MAXIMUMS ET MINIMUMS;

PAR M. L. MALEYX.

1. Soit $F(x)$ une fonction continue de x : attribuant à la variable une valeur quelconque x_1, la différence $F(x) - F(x_1)$ devient nulle quand on y fait $x = x_1$ et, généralement, change de signe quand x passe, d'une manière continue, d'une valeur un peu inférieure à x_1 à une valeur un peu supérieure.

Si $F(x)$ est une fonction algébrique entière, on peut mettre $x - x_1$ en facteur dans la différence $F(x) - F(x_1)$, puisqu'elle est divisible par $x - x_1$ et puisque, aussi, on connaît la forme du quotient.

On le peut encore, d'après le même principe, si $F(x)$ est rationnelle, mais fractionnaire. Soit, en effet, $F(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$; on a

$$F(x) - F(x_1) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} - \frac{\varphi(x_1)}{\psi(x_1)} = \frac{\varphi(x)\psi(x_1) - \varphi(x_1)\psi(x)}{\psi(x)\psi(x_1)},$$

et le numérateur contient en facteur $x - x_1$ qu'on peut mettre en évidence.

Si $F(x)$ est irrationnelle, ou même parfois compliquée d'expressions trigonométriques, on peut, sans sortir des procédés du calcul algébrique élémentaire, mettre en évidence le facteur $x - x_1$ dans la différence $F(x) - F(x_1)$.

Supposons qu'il en soit ainsi, et que nous ayons pu mettre $F(x) - F(x_1)$ sous la forme

$$(x - x_1) \times F_1(x, x_1).$$

Désignons par $F_1(x_1, x_1)$ ce que devient $F_1(x, x_1)$ quand on y remplace x par x_1, nous pouvons poser

$$F_1(x, x_1) = F_1(x_1, x_1) + \varepsilon,$$

ε tendant vers zéro quand x tend vers x_1, et nous aurons

$$F(x) - F(x_1) = (x - x_1)[F_1(x_1, x_1) + \varepsilon].$$

Si $F_1(x_1, x_1)$ est un nombre différent de zéro, quand x sera très voisin de x_1, que du reste il lui soit inférieur ou supérieur, ε sera très petit et numériquement inférieur à $F_1(x_1, x_1)$; dès lors, ce sera ce terme $F_1(x_1, x_1)$ qui donnera son signe à la parenthèse, et la différence $F(x) - F(x_1)$ sera du signe de $x - x_1$ ou du signe contraire, suivant que $F_1(x_1, x_1)$ sera positif ou négatif.

Il résulte de là que, si $F_1(x_1, x_1)$ est positif quand x passera d'une valeur un peu inférieure à x_1 à une valeur un peu supérieure, la différence $F(x) - F(x_1)$ passera d'une valeur négative à une valeur positive, et qu'en conséquence $F(x)$ croîtra avec x; qu'au contraire, si $F_1(x_1, x_1)$ est négatif, $F(x)$ décroîtra dans les mêmes conditions.

Si, actuellement, nous faisons varier x_1 en le faisant croître d'une manière continue, tant que $F_1(x_1, x_1)$ restera positif, $F(x)$ croîtra, et, tant que $F_1(x_1, x_1)$ restera négatif, $F(x)$ décroîtra.

Dès lors, $F(x)$ passera par un maximum ou un minimum quand $F_1(x_1, x_1)$ passera du positif au négatif, car alors $F(x)$ cessera de croître pour décroître, ou du négatif au positif, car alors $F(x)$ cessera de décroître pour croître; et l'on voit de plus que $F(x)$ ne peut passer par un maximum ou un minimum que dans ces conditions.

On n'aura donc, pour trouver les maximums ou minimums de la fonction $F(x)$, qu'à chercher les valeurs de x pour lesquelles la fonction $F_1(x, x)$ change de signe, et l'on pourra distinguer les maximums des mimums par l'ordre des signes que prend $F_1(x, x)$ quand x passe d'une valeur un peu inférieure à une valeur un peu supérieure à celle pour laquelle ce changement se produit.

2. Prenons, comme premier exemple, la recherche des maximums ou minimums de la fonction

$$F(x) = (x-a)^\alpha \times (x-b)^\beta \times (x-c)^\gamma.$$

Supposons α, β, γ entiers et positifs, et $a < b < c$.

Nous avons, identiquement,

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_1) \equiv\ & (x-a)^\alpha \times (x-b)^\beta \times [(x-c)^\gamma - (x_1-c)^\gamma] \\ & + (x-a)^\alpha \times (x_1-c)^\gamma \times [(x-b)^\beta - (x_1-b)^\beta] \\ & + (x_1-b)^\beta \times (x_1-c)^\gamma \times [(x-a)^\alpha - (x_1-a)^\alpha]. \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}F(x) - F(x_1) \equiv\ & (x-a)^\alpha \times (x-b)^\beta \\ & \times [(x-c)^{\gamma-1} + (x-c)^{\gamma-2}(x_1-c) + \ldots \\ & \qquad + (x_1-c)^{\gamma-1}] \times (x-x_1) \\ & + (x-a)^\alpha \times (x_1-c)^\gamma \\ & \times [(x-b)^{\beta-1} + (x-b)^{\beta-2}(x_1-b) + \ldots \\ & \qquad + (x_1-b)^{\beta-1}] \times (x-x_1) \\ & + (x_1-c)^\beta \times (x_1-c)^\gamma \\ & \times [(x-a)^{\alpha-1} + (x-a)^{\alpha-2}(x_1-a) + \ldots \\ & \qquad + (x_1-a)^{\alpha-1}] \times (x-x_1).\end{aligned}$$

On en déduit, conformément à la notation du numéro précédent,

$$\begin{aligned}F_1(x_1, x_1) = {} & (x_1-a)^{\alpha-1} \times (x_1-b)^{\beta-1} \times (x_1-c)^{\gamma-1} \\ & \times [\gamma(x_1-a)(x_1-b) + \beta(x_1-a)(x_1-c) + \alpha(x_1-b)(x_1-c)].\end{aligned}$$

Le quatrième facteur de $F_1(x_1, x_1)$ est un trinôme du second degré, décomposable en deux facteurs réels du premier, car il prend alternativement les signes $+$, $-$, $+$, quand on y remplace x_1 par a, b, c; désignons par x' et x'' les valeurs de x_1 pour lesquelles il devient nul, et qui satisfont aux inégalités

$$a < x' < b < x'' < c,$$

nous aurons

$$\begin{aligned}F_1(x, x) = {} & (\alpha + \beta + \gamma)(x-a)^{\alpha-1}(x-x') \\ & \times (x-b)^{\beta-1}(x-x'')(x-c)^{\gamma-1}.\end{aligned}$$

Sous cette forme, on voit immédiatement quelles sont toutes les valeurs de x pour lesquelles $F(x, x)$ change de signe, et l'on a ainsi une solution du problème qui nous paraît plus simple que celle qu'on obtient par la méthode, dite *des multiplicateurs*, et qui en tout cas est plus complète.

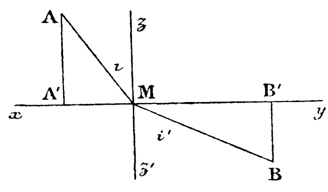
Remarque. — On trouve aussi d'une manière analogue, et encore plus simple, la solution complète du maximum et du minimum de la fonction entière du troisième degré, décomposée ou non en facteurs du premier degré; nous ne nous y arrêterons pas, laissant aux élèves le soin de la traiter.

3. Comme deuxième et dernier exemple, considérons le suivant :

Deux points A et B sont placés de part et d'autre d'une droite XY située avec eux dans un même plan; un point mobile doit passer de A en B, il se meut d'un mouvement uniforme et rectiligne dont la vitesse est V dans la région du point A, et d'un mouvement uniforme et rectiligne dont la vitesse est V′ dans la région du point B : on demande la propriété caractéristique du point M, où il doit traverser XY, pour que le trajet s'effectue dans le moindre temps possible.

Soient A′ et B′ (*fig.* 1) les projections orthogonales de A et B sur XY, d la distance A′B′, a et b les distances

Fig. 1.



AA′ et BB′; soit M le point de passage. Posons $A'M = x$, $B'M = y$, $AM = l$, $BM = \lambda$; y, l et λ sont des fonctions continues de x faciles à déterminer; nous désignerons ce que deviennent y, l et λ par y_1, l_1 et λ_1, quand on y remplace x par x_1.

D'après ces notations, le temps du trajet est représenté par

$$F(x) = \frac{l}{V} + \frac{\lambda}{V'},$$

et l'on a

$$F(x) - F(x_1) = \frac{l - l_1}{V} + \frac{\lambda - \lambda_1}{V'}$$

ou

$$F(x) - F(x_1) = \frac{l^2 - l_1^2}{V(l + l_1)} + \frac{\lambda^2 - \lambda_1^2}{V'(\lambda + \lambda_1)},$$

ou encore

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_1) &= \frac{x^2 - x_1^2}{V(l + l_1)} + \frac{y^2 - y_1^2}{V'(\lambda + \lambda_1)} \\ &= \frac{(x - x_1)(x + x_1)}{V(l + l_1)} + \frac{(y - y_1)(y + y_1)}{V'(\lambda + \lambda_1)}. \end{aligned}$$

Mais on a

$$x + y = x_1 + y_1 = d$$

et, en conséquence,

$$y - y_1 = -(x - x_1);$$

d'où

$$F(x) - F(x_1) = (x - x_1)\left[\frac{x + x_1}{V(l + l_1)} - \frac{y + y_1}{V'(\lambda + \lambda_1)}\right].$$

D'après nos notations,

$$F_1(x, x_1) = \frac{x + x_1}{V(l + l_1)} - \frac{y + y_1}{V'(\lambda + \lambda_1)},$$

et

$$F_1(x, x) = \frac{x}{Vl} - \frac{y}{V'\lambda}$$

ou, en conséquence de relations géométriques évidentes,

$$F_1(x, x) = \frac{1}{V\sqrt{1 + \frac{a^2}{x^2}}} - \frac{1}{V'\sqrt{1 + \frac{b^2}{y^2}}}.$$

Quand x varie de zéro à d d'une manière continue, le premier terme de $F(x, x)$, qui est additif, croît de zéro à $\frac{1}{V\sqrt{1 + \frac{a^2}{d^2}}}$, tandis que le deuxième, qui est soustractif, croît de $\frac{-1}{V\sqrt{1+\frac{b^2}{d^2}}}$ à zéro; de là résulte que $F(x, x)$ croît de $\frac{-1}{V'\sqrt{1+\frac{b^2}{d^2}}}$ à $\frac{1}{V\sqrt{1+\frac{a^2}{d^2}}}$, et devient nul une et une seule fois, dans l'intervalle, en passant du négatif au positif : c'est pour cette valeur de x que le temps du trajet est minimum.

Ce minimum a lieu quand

$$\frac{\frac{x}{l}}{V} = \frac{\frac{y}{\lambda}}{V'},$$

ou, observant que $\frac{x}{l}$ et $\frac{y}{\lambda}$ sont les sinus des angles i et i' formés par les trajets l et λ avec la normale à XY en M, le minimum a lieu quand

$$\frac{\sin i}{V} = \frac{\sin i'}{V'}.$$

RÉALISATION ET USAGE DES FORMES IMAGINAIRES EN GÉOMÉTRIE.

Conférences données par M. Maximilien MARIE au Collège Stanislas, à Sainte-Barbe, à l'École Sainte-Geneviève et à l'École Monge [1].

---

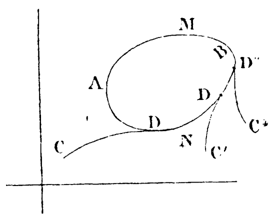
14. *De la manière la plus générale dont s'engendrent les périodes correspondant aux parcours des anneaux fermés de l'une des deux enveloppes.* — Il n'est pas nécessaire que le point décrivant $[x, y]$ passe même

---

[1] *Voir* même tome, p. 435.

une seule fois sur l'un de ces anneaux, pour que s'engendre la période qui correspondrait à son parcours. En effet, soit AMBNA (*fig.* 16) l'un de ces anneaux : supposons que les deux limites $[x_0, y_0]$, $[x, y]$ de l'intégrale $\int y\,dx$ appartiennent à deux conjuguées CD, C′D′, tangentes en D et D′ à l'anneau AMBNA, et représentent les points C et C′ des deux conjuguées : l'intégrale $\int y\,dx$, à la différence près des expressions algébriques des aires des triangles introduits par les changements de direction de l'axe des y en C, D, D′ et C′, se composera de l'aire, en partie réelle et en partie imaginaire, du segment de la conjuguée CD, compris entre l'arc CD, l'axe des x et les cordes réelles de la conjuguée CD,

Fig. 16.



menées en C et en D ; de la valeur de l'intégrale $\int y\,dx$, prise le long de l'arc DD′ de l'enveloppe ; enfin, de l'aire, en partie réelle et en partie imaginaire, du segment de la conjuguée D′C′, compris entre l'arc D′C′, l'axe des x et les cordes réelles de la conjuguée D′C′, menées en D′ et C′.

Si, la limite inférieure $[x_0, y_0]$ restant fixe, la limite supérieure $[x, y]$ se transportait de C′ en C″ sur la conjuguée C″D″, la première partie de l'intégrale resterait fixe, la seconde s'accroîtrait de la valeur de l'intégrale $\int y\,dx$, prise le long de l'arc D′D″ de l'anneau considéré de l'enveloppe, enfin la troisième varierait en raison de la substitution de l'arc D″C″ à l'arc D′C′.

Supposons maintenant que, la limite supérieure continuant à se mouvoir dans le même sens, le point D″ s'avance sur l'arc DND′D″BMAD, de façon à rejoindre à la fin le point D, en même temps que le point C″ reviendrait au point C, l'accroissement total de l'intégrale $\int y\,dx$ se réduira à la valeur de l'intégrale prise le long de l'anneau DNBMAD de l'enveloppe.

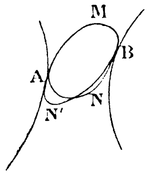
C'est de cette façon, en général, que s'engendrent les périodes relatives aux parcours des anneaux fermés des deux enveloppes.

Au reste, le multiple, sous lequel chaque période devra entrer dans la valeur de l'intégrale, sera marqué par le nombre de fois que la limite supérieure aura passé successivement et dans le même ordre sur toutes les conjuguées tangentes à l'anneau correspondant.

15. *De la manière la plus générale dont s'engendrent les périodes correspondant aux parcours des anneaux fermés des conjuguées.* — Nous avons vu que le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire enfermée dans un anneau, composé de points imaginaires conjugués deux à deux, qui se rejoignent sur les deux branches de la courbe réelle entre lesquelles sont comprises des conjuguées fermées d'une même catégorie, constitue une période égale à celle qui s'engendrerait dans le parcours d'une de ces conjuguées fermées; mais, comme nous l'avons également remarqué, il n'est pas nécessaire, pour que la même période s'engendre, que les deux arcs de l'anneau fermé, qui ont leurs extrémités sur les deux branches de la courbe réelle, soient composés de points imaginaires conjugués deux à deux. En effet, si AMBNA (*fig.* 17) est tel que les points de AMB et de ANB soient deux à deux imaginaires conjugués, on pourra toujours, d'après le théorème de Cauchy, substituer au chemin BNA, par

exemple, un autre chemin voisin BN′A, ce qui n'altérera pas l'intégrale, et le chemin AMBN′A ne sera plus composé de points imaginaires conjugués deux à deux; la valeur de l'intégrale, le long de ce nouveau parcours AMBN′A, n'en restera pas moins égale au produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire entourée par une des conjuguées fermées;

Fig. 17.

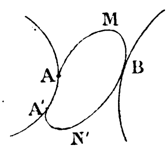


toute la différence sera que cette valeur de l'intégrale n'aura plus une relation simple avec les aires des segments correspondants aux arcs AMB et AN′B.

C'est ainsi, généralement, que s'engendrent les périodes qui représentent les produits par $\sqrt{-1}$ des aires enveloppées par les anneaux fermés de conjuguées.

Quant au multiple entier, sous lequel chacune des périodes de ce genre devrait entrer dans la valeur de

Fig. 18.



l'intégrale, il se comptera par le nombre de fois que le chemin suivi par le point mobile $[x, y]$ aura successivement touché les deux branches de la courbe réelle, sans rebroussement; car, si le chemin ne se fermait pas, comme dans le parcours AMBN′A′ (*fig.* 18), la période imaginaire n'en serait pas moins complète, puisqu'en fermant le parcours, par l'addition du chemin A′A, on n'ajouterait rien à la partie imaginaire de l'intégrale.

16. *Sur une forme géométrique singulière que peuvent affecter les périodes engendrées dans le parcours d'une des enveloppes.* — Chacune des périodes imaginaires, engendrées dans le parcours des conjuguées, a toujours une infinité de représentations géométriques, sous la forme des aires des anneaux fermés de ces conjuguées ; tandis que les périodes, engendrées dans le parcours de l'une ou l'autre enveloppe, n'en ont jamais qu'une chacune ; d'où il résulte que les premières sont toujours beaucoup mieux représentées que les autres.

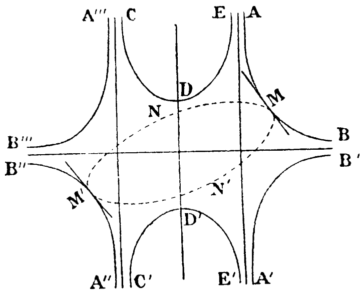
Parmi les formes géométriques des périodes de la première espèce, il s'en trouve toujours de singulières : ce sont celles des anneaux qui dégénèrent en branches infinies, lorsqu'on fait tendre la caractéristique de la conjuguée vers le coefficient angulaire de l'une des asymptotes aux branches de la courbe réelle qui comprennent entre elles un anneau de la conjuguée.

On pourrait toujours éviter la considération d'une conjuguée ainsi déformée, puisqu'on aurait à sa disposition une infinité d'autres anneaux fermés se prêtant beaucoup mieux, par exemple, à une quadrature approchée.

Il n'en sera naturellement plus de même si c'est l'une des périodes engendrées dans le parcours de l'une ou l'autre enveloppe, qui se présente sous une forme géométrique singulière, puisqu'il n'en existera pas d'autre représentation. Il importe donc de pouvoir reconnaître ces périodes sous leur figure exceptionnelle.

Mais nous donnerons d'abord un exemple de ce qui vient d'être dit : considérons l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ qui donne l'aire de la courbe $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$, figurée en $ABA'B'A''B''A'''B'''$; cette courbe est du quatrième degré, si on lui mène deux tangentes parallèles en M et en M', une droite quelconque parallèle à ces deux tangentes et comprise entre elles, ne coupera la courbe réelle qu'en deux points; il se trouvera donc, entre ces deux tangentes, un anneau fermé de la conjuguée, dont la caractéristique serait le coefficient angulaire des deux tan-

Fig. 19.



gentes. Le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire, enfermée dans cet anneau $MNM'N'$, sera une période de l'intégrale.

L'anneau $MNM'N'$ s'allongerait indéfiniment si la direction commune des deux tangentes tendait à devenir parallèle à l'axe des y et à la limite, cet anneau dégénérerait dans la courbe à branches infinies $CDEE'D'C'$, dont l'équation en coordonnées réelles serait

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

de sorte que l'aire $MNM'N'$ se transformerait dans l'aire egale, comprise entre les deux branches CDE, $C'D'E'$ et leurs asymptotes CC' et DD'.

Considérons maintenant l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$: les limites étant supposées les mêmes de part et d'autre, les deux intégrales auront les mêmes valeurs, au facteur $\sqrt{-1}$ près; si la période de la première est le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire CDEE'D'C', celle de l'autre sera égale à cette même aire considérée comme réelle.

Mais la période imaginaire de la première intégrale aura une infinité de représentations géométriques, tandis que la période réelle de la seconde n'en a qu'une, exceptionnelle.

L'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ est $\arcsin x$, dont la période est 2π; et 2π représente l'aire CDEE'D'C' ou celle qu'enveloppe l'anneau MNM'N'N.

17. *Condition pour que l'aire comprise entre une branche de courbe et son asymptote soit finie.* — Les considérations précédentes nous amènent à rechercher la condition pour que l'aire comprise entre une courbe et son asymptote soit finie.

Supposons qu'on ait pris l'asymptote pour axe des y; l'équation de la courbe, supposée résolue par rapport à y, sera

$$y = \frac{\varphi(x)}{x^\alpha};$$

$\varphi(x)$ ne devenant ni nul ni infini pour $x = 0$.

L'intégrale quadratrice de la courbe sera

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{x^\alpha},$$

et l'aire de la courbe, comprise entre cette courbe et son asymptote, sera

$$\int_0^\varepsilon \frac{\varphi(x)\,dx}{x^\alpha},$$

ε étant aussi petit qu'on le voudra.

$\varphi(x)$ ne variera qu'infiniment peu de o à ε : on pourra donc le remplacer par $\varphi(0) = A$, par exemple; l'intégrale se réduira ainsi à

$$A\int_0^\varepsilon \frac{dx}{x^\alpha} = A\int_0^\varepsilon x^{-\alpha}\,dx = A\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_0^\varepsilon.$$

Si $1-\alpha$ est positif, ou si α est moindre que 1, l'intégrale aura pour valeur

$$A\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} - 0$$

et restera finie, tandis que si $1-\alpha$ est négatif, ou si α est plus grand que 1, l'intégrale acquerra une valeur

$$A\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \infty,$$

et croitra indéfiniment.

On sait du reste, par l'exemple de l'hyperbole du second degré, que, si $\alpha = 1$, l'intégrale prendra une valeur infinie.

La condition pour que l'aire reste finie est donc

$$\alpha < 1.$$

C'est ce qui arrive pour chacune des asymptotes des deux courbes, conjuguées l'une de l'autre,

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

La condition peut s'exprimer sous une forme préférable : elle signifie que

$$\frac{x\,\varphi(x)}{x^\alpha}$$

doit tendre vers o pour $x = 0$.

Mais x, dans ce qui précède, représente la distance d'un point de la courbe à l'asymptote et $\frac{\varphi(x)}{x^\alpha}$ représente l'ordonnée de la courbe; or, si l'on fait intervenir un changement d'axes, la distance d'un point de la courbe à son asymptote changera simplement d'expression, et quant à l'ordonnée, restée infinie, du point de la courbe, elle sera simplement multipliée par un rapport de sinus, de sorte que si, dans un système d'axes, le produit de l'ordonnée, devenue infinie, d'un point d'une branche indéfinie d'une courbe, par la distance, évanouissante, d'un point de cette branche à son asymptote, tend vers zéro ou croît indéfiniment, il en sera de même dans tout autre système d'axes.

On pourrait donc, les axes étant quelconques et l'équation de l'asymptote à la branche de courbe considérée étant $y - cx - d = 0$, se borner à évaluer la limite vers laquelle tendrait le produit

$$y(y - cx - d),$$

lorsque x croîtrait indéfiniment : l'aire comprise entre la courbe et son asymptote serait finie ou infinie, selon que la limite trouvée serait nulle ou infinie.

Mais, lorsqu'il s'agit d'une courbe algébrique, la condition peut recevoir une expression géométrique très simple et dont l'existence sera toujours facile à vérifier.

L'équation d'une courbe algébrique ayant pour asymptote l'axe des y est de la forme

$$xy^{m-1} + (ax^2 + bx + c)y^{m-2} + \ldots = 0;$$

il s'agit d'exprimer la condition pour que le produit de x tendant vers zéro par y devenu infini tende vers zéro. Posons $xy = z$, d'où $y = \frac{z}{x}$, la relation entre z

et x sera

$$z^{m-1} + (ax^2 + bx + c)z^{m-2} + (dx^3 + ex^2 + fx + g)xz^{m-3} + \ldots = 0.$$

Cette équation, pour $x = 0$, a toujours au moins $(m - 2)$ racines nulles, qui sont les produits des $(m - 2)$ valeurs finies de y par x devenu nul; la dernière est c. Ainsi, pour que le produit de $x = 0$ par $y = \infty$ soit nul, il faut que $c = 0$, c'est-à-dire que l'asymptote coupe la courbe en trois points situés à l'infini.

Telle est la condition générale pour que l'aire comprise entre une courbe algébrique et son asymptote soit finie.

Mais cela suppose que la courbe n'ait pas d'autres asymptotes parallèles à celle que l'on considère. Dans le cas contraire, on trouverait par le même calcul qu'il faudrait que l'asymptote considérée coupât la courbe à l'infini en un nombre de points égal à 3 + le nombre des asymptotes parallèles à la première.

Corollaire. — Dans l'exemple qui nous a servi précédemment, des deux courbes $y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ et $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$, conjuguées l'une de l'autre, les quadratrices avaient la même période, réelle dans l'une et affectée du signe $\sqrt{-1}$ dans l'autre. Le fait est évidemment général, parce que si une courbe a pour conjuguée une autre courbe, réciproquement, la seconde a pour conjuguée la première, et les anneaux fermés réels de l'une se retrouvent imaginaires dans l'autre.

Remarque. — Il n'y aurait pas lieu de rechercher des périodes imaginaires dans les aires des conjuguées qui ne toucheraient que l'enveloppe imaginaire, parce que ces conjuguées ne pourraient pas présenter d'anneaux fermés. En effet, on ne pourrait même pas leur mener de tangentes parallèles à leurs cordes réelles, car le point de contact d'une pareille tangente réunirait deux points imaginaires conjugués et serait, par conséquent, réel, c'est-à-dire appartiendrait à la courbe réelle.

18. *Des périodes cycliques ou logarithmiques.* — Il nous reste à parler d'une classe particulière de périodes, dont la théorie et la génération n'ont rien de particulier, mais qui s'expriment, dans tous les lieux, d'une façon exceptionnelle très simple. Ce sont les produits par $\sqrt{-1}$ des aires d'anneaux fermés qui se séparent des conjuguées auxquelles ils appartiennent, lorsque les caractéristiques de ces conjuguées tendent à venir se confondre avec les coefficients angulaires des asymptotes du lieu.

Si une asymptote d'une courbe algébrique de degré m coupe la courbe en $(m-2)$ points à distance finie, les deux branches correspondantes de la courbe se trouvent de part et d'autre de l'asymptote et la touchent à l'infini à ses deux extrémités opposées. Ces deux branches présentent chacune un certain nombre de points d'inflexion, à partir du dernier desquels chacune des branches ne formera plus qu'un arc dont les points se rapprocheront de plus en plus de l'asymptote. Si l'on conçoit à ces deux arcs terminaux deux tangentes parallèles, très peu inclinées sur la direction de l'asymptote, une parallèle quelconque à ces deux tangentes, et comprise entre elles, coupera le lieu, à distance finie, en des points infiniment peu éloignés de ceux où l'asymptote elle-même coupe déjà ce lieu à distance finie, c'est-à-dire en $m-2$ points. Mais il en manquera deux, situés à des distances plus ou moins grandes; d'où il faut conclure que les deux tangentes comprendront entre elles un anneau de la conjuguée ayant pour caractéristique leur coefficient angulaire commun, anneau d'ailleurs complètement isolé des autres branches de la même conjuguée. Le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire de cet anneau fermé sera une des périodes de la quadratrice de la courbe; c'en sera une période cyclique.

Tous ces anneaux ont même aire : le fait n'a pas besoin d'une nouvelle démonstration; mais à la limite ils deviennent des ellipses, dont l'aire constante peut être évaluée. Ces ellipses recouvrent deux fois l'asymptote, comme si l'équation de la courbe était du second degré et représentait une hyperbole.

En effet, si l'asymptote en question a été prise pour axe des y et que l'équation de la courbe soit

$$xy^{m-1} + (ax^2 + bx + c)y^{m-2} + \ldots = 0,$$

on a vu que le produit de x, tendant vers zéro par y devenu infini, a pour limite $-c$. Cela signifie que les deux branches de la courbe, asymptotes à l'axe des y, tendent à se confondre avec l'hyperbole du second degré

$$xy = -c,$$

et, par conséquent, que l'une des conjuguées du lieu tend à se confondre, dans une de ses parties, avec une conjuguée de l'hyperbole $xy = -c$. La coïncidence n'a lieu, il est vrai, que lorsque les cordes réelles de la conjuguée sont devenues parallèles à l'asymptote; mais, à ce moment, l'anneau considéré de la conjuguée devient une ellipse indéfiniment allongée et indéfiniment aplatie; d'un autre côté, l'aire enveloppée par cet anneau, tout en changeant de figure, a conservé la même valeur; on peut donc prendre pour cette valeur celle de l'aire de l'ellipse, laquelle est $\pm 2\pi c$, de sorte que la période est

$$\pm 2\pi c\sqrt{-1}.$$

19. *Relation entre les m périodes cycliques d'un lieu de degré m.* — La quadratrice d'une courbe de degré m a, en général, m périodes cycliques; mais ces périodes ne sont pas indépendantes.

En effet, soit

$$(y - a_1 x - b_1)(y - a_2 x - b_2)\ldots(y - a_m x - b_m) + x^{m-2}\varphi_{m-2}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \ldots = 0$$

l'équation de la courbe.

Si l'on voulait rendre nulle la période cyclique relative à l'asymptote $y - a_1 x - b_1 = 0$, il faudrait faire en sorte que cette asymptote coupât la courbe en $m - 3$ points seulement à distance finie; mais, en éliminant y entre l'équation de la courbe et $y = a_1 x + b_1$, on trouverait

$$x^{m-2}\varphi_{m-2}\left(1, a_1 + \frac{b_1}{x}\right) + x^{m-3}\ldots = 0;$$

de sorte que pour faire disparaître le terme en x^{m-2}, il faudrait faire en sorte que $\varphi_{m-2}(1, a_1)$ fût nul.

On pourrait bien ainsi faire disparaître $m - 2$ périodes cycliques en posant

$$\varphi_{m-2}\left(1, \frac{y}{x}\right) = k\left(\frac{y}{x} - a_1\right)\left(\frac{y}{x} - a_2\right)\ldots\left(\frac{y}{x} - a_{m-2}\right);$$

mais, pour en faire disparaître encore une, il faudrait faire $k = 0$, et alors la dernière disparaîtrait aussi.

Ainsi les m périodes cycliques de la quadratrice d'un lieu de degré m sont nécessairement liées entre elles par une relation telle que, si $m - 1$ d'entre elles sont nulles, la dernière l'est aussi.

Cette relation consiste en ce que *la somme des périodes cycliques est toujours nulle*, pourvu, bien entendu, qu'on en tire les expressions d'une même formule générale; car, autrement, chacune d'elles pouvant recevoir le double signe $\pm\sqrt{-1}$, la somme totale ne serait pas déterminée.

Remarquons d'abord que, si l'équation de la courbe a été mise sous la forme

$$L(x-h)y^{m-1}+(Mx^2+Nx+P)y^{m-2}+\ldots=0,$$

les axes faisant entre eux un angle α, la période cyclique relative à l'asymptote $x=h$ sera exprimée par

$$\frac{2\pi(Mh^2+Nh+P)\sin\alpha}{L}\sqrt{-1}.$$

Cela posé, soit, en coordonnées rectangulaires,

$$(y-a_1x-b_1)(y-a_2x-b_2)\ldots(y-a_mx-b_m) \\ +x^{m-2}\varphi_{m-2}\left(1,\frac{y}{x}\right)+\ldots=0$$

l'équation de la courbe : rendons l'axe des y parallèle à l'asymptote $y=a_1x+b_1$, sans changer l'origine, ni l'axe des x, les formules de transformation seront

$$x=x'+y\cos\alpha_1 \qquad \text{et} \qquad y=y'\sin\alpha_1,$$

α_1 désignant l'angle dont la tangente est a_1.

La substitution donnera

$$(-a_1x'-b_1)[y'(\sin\alpha_1-a_2\cos\alpha_1)-a_2x'-b_2]\ldots \\ \times[y'(\sin\alpha_1-a_m\cos\alpha_1)-a_mx'-b_m] \\ +\varphi_{m-2}(x'+y'\cos\alpha_1, y'\sin\alpha_1)+\ldots=0;$$

en conséquence, le coefficient de $x'y'^{m-1}$ sera

$$L=-a_1\cos^{m-1}\alpha_1(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_m).$$

Quant au terme en y'^{m-2}, qui proviendrait de

$$(-a_1x'-b_1)[y(\sin\alpha_1-a_2\cos\alpha_1 \ -a_2x'-b_2]\ldots \\ \times[y'(\sin\alpha_1-a_m\cos\alpha_1)-a_mx'-b_m],$$

il disparaîtrait de lui-même, quand on y ferait

$$a_1x'+b_1=0,$$

il sera donc inutile de le transcrire.

Il reste à chercher la partie utile du coefficient de y^{m-2} dans

$$\varphi_{m-2}(x'+y'\cos\alpha_1, y'\sin\alpha_1).$$

Ce coefficient est simplement

$$\varphi_{m-2}(\cos\alpha_1, \sin\alpha_1),$$

ou, à cause de l'homogénéité de cette fonction,

$$\cos^{m-2}\alpha_1\varphi_{m-2}(1, a_1).$$

La période cyclique relative à l'asymptote

$$y-a_1x-b_1=0$$

est donc

$$\frac{2\pi\sqrt{-1}\cos^{m-2}\alpha_1\varphi_{m-2}(1, a_1)\sin\alpha_1}{-a_1\cos^{m-1}\alpha_1(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_m)}$$

ou, simplement,

$$-\frac{2\pi\sqrt{-1}\,\varphi_{m-2}(1, a_1)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_m)}.$$

Les autres s'exprimeraient de la même manière.

Mais un polynôme de degré $(m-2)$ est déterminé par $(m-1)$ substitutions et, d'après la formule de Lagrange,

$$\begin{aligned}\varphi_{m-2}(1, a) = \quad & \varphi_{m-2}(1, a_1)\frac{(a-a_2)(a-a_3)\ldots(a-a_{m-1})}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_{m-1})} \\ & +\varphi_{m-2}(1, a_2)\frac{(a-a_1)(a-a_3)\ldots(a-a_{m-1})}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_1-a_{m-1})} \\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & +\varphi_{m-2}(1, a_{m-1})\frac{(a-a_1)\ldots(a-a_{m-2})}{(a_{m-1}-a_1)\ldots(a_{m-1}-a_{m-2})}.\end{aligned}$$

En remplaçant, dans cette identité, a par a_m, il vient

$$\begin{aligned}\varphi_{m-2}(1, a_m) = \quad & \varphi_{m-1}(1, a_1)\frac{(a_m - a_2)\ldots(a_m - a_{m-1})}{(a_1 - a_2)\ldots(a_1 - a_{m-1})} \\ & + \varphi_{m-2}(1, a_2)\frac{(a_m - a_1)\ldots(a_m - a_{m-1})}{(a_2 - a_1)\ldots(a_2 - a_{m-1})} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \varphi_{m-2}(1, a_{m-1})\frac{(a_m - a_1)\ldots(a_m - a_{m-2})}{(a_{m-1} - a_1)\ldots(a_{m-1} - a_{m-2})},\end{aligned}$$

ou, en multipliant les deux termes de la première fraction du second membre par $(a_1 - a_m)$, les deux termes de la seconde par $(a_2 - a_m)$, ..., divisant les deux membres par

$$(a_m - a_1)(a_m - a_2)\ldots(a_m - a_{m-1}),$$

et, faisant tout passer dans le premier membre,

$$\sum \frac{\varphi_{m-2}(1, a_1)}{(a_1 - a_2)\ldots(a_1 - a_m)} = 0$$

ou

$$\sum \frac{\varphi_{m-2}(1, a_1)}{\varphi'_m(1, a)_{a=a_1}} = 0.$$

C. Q. F. D.

20. Théorème. — *Les périodes cycliques de la quadratrice d'une courbe algébrique de degré m sont les produits par* $2\pi\sqrt{-1}$ *des racines d'une équation algébrique de degré m, manquant de second terme, et dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de ceux de l'équation de la courbe.*

En effet, soit $2\pi\sqrt{-1}\,R$ l'une des périodes cycliques, R est donné par la formule

$$R = \frac{\varphi_{m-2}(1, a)}{\varphi'_m a},$$

a désignant le coefficient angulaire de l'une des asymptotes, racine de l'équation $\varphi_m(a) = 0$, de sorte que les valeurs de R seraient les racines de l'équation qu'on obtiendrait en éliminant a entre les équations

$$R = \frac{\varphi_{m-2}(1, a)}{\varphi'_m(a)} \qquad \text{et} \qquad \varphi_m(a) = 0.$$

Mais les coefficients de $\varphi_{m-2}(1, a)$ ne sont pas explicités dans l'équation de la courbe; car, dans ce qui précède, $\varphi_{m-2}(x, y)$ désigne la différence entre l'ensemble des termes de degré $(m - 2)$ du premier membre de l'équation de la courbe, lesquels seuls sont connus d'avance, et l'ensemble des termes de degré $(m - 2)$ du produit

$$(y - a_1 x - b_1)(y - a_2 x - b_2)\ldots(y - a_m x - b_m).$$

Mais l'expression générale d'un terme de degré $(m - 2)$ de ce produit est

$$b_1 b_2 (y - a_3 x)(y - a_4 x)\ldots(y - a_m x)$$

ou

$$\frac{\varphi_{m-1}(1, a_1)\varphi_{m-1}(1, a_2)}{\varphi'_m(1, a_1)\varphi'_m(1, a_2)}(y - a_3 x)(y - a_4 x)\ldots(y - a_m x),$$

$\varphi_{m-1}(x, y)$ désignant l'ensemble connu des termes de degré $(m - 1)$ du premier membre de l'équation de la courbe, telle qu'elle est donnée, de sorte que l'ensemble des termes que l'on cherchait est

$$\sum \frac{\varphi_{m-1}(1, a_1)\varphi_{m-1}(1, a_2)}{\varphi'_m(1, a_1)\varphi'_m(1, a_2)}(y - a_3 x)\ldots(y - a_m x).$$

Or les coefficients de cette fonction de x et de y seront des fonctions symétriques de $a_1, a_2, \ldots, a_m$; ils s'exprimeront donc rationnellement en fonction des coefficients de $\varphi_m(x, y)$; par conséquent, les coefficients de $\varphi_{m-2}(x, y)$

ou ceux de $\varphi_{m-2}(1, a)$ s'exprimeront aussi rationnellement en fonction des coefficients donnés de l'équation de la courbe.

Donc les coefficients de l'équation en R seront des fonctions rationnelles des coefficients de l'équation donnée de la courbe proposée.

Ainsi, la théorie des périodes cycliques est ramenée à celle des équations algébriques. On pourra savoir si la quadratrice d'une courbe a des périodes cycliques égales, si les quadratrices de deux courbes ont des périodes cycliques communes, etc. ([1]).

21. *Classification des quadratrices des courbes algébriques d'après le nombre et l'espèce de leurs périodes.* — D'après la théorie qui a été exposée dans ce qui précède, les périodes de l'intégrale quadratrice d'une courbe algébrique sont représentées par les aires d'anneaux fermés de la courbe réelle, des conjuguées de cette courbe ou de l'enveloppe imaginaire; mais les figures géométriques de ces anneaux ne dépendent pas du choix des axes : les périodes de l'intégrale quadratrice d'une courbe restent donc toujours les mêmes, quels que soient les axes auxquels cette courbe soit rapportée.

Nous savons dans quelles conditions les périodes cycliques peuvent disparaître.

D'un autre côté, si un anneau fermé de la courbe réelle ou d'une conjuguée devient accidentellement évanouissant, l'aire qu'il enveloppait sera nulle et la quadratrice de la courbe perdra une de ses périodes,

---

([1]) Ce dernier théorème ne se trouve pas dans ma *Théorie des fonctions de variables imaginaires;* il n'a été publié qu'en 1876, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences.*

réelle dans le premier cas, et imaginaire sans partie réelle dans le second.

Dans l'un et l'autre cas, il se forme dans la courbe un point double réel. C'est évident dans le premier cas et facile à voir dans le second, parce qu'un anneau fermé de conjuguée est toujours tangent à la courbe réelle en deux points appartenant à deux branches distinctes et que ces deux points doivent forcément se réunir en un seul pour que l'anneau s'évanouisse. Nous avons démontré, en effet, que les conjuguées qui ne touchent que l'enveloppe imaginaire ne peuvent pas présenter d'anneaux fermés.

Le fait est encore facile à constater lorsqu'il s'agit d'un anneau fermé de l'enveloppe imaginaire, composé de points imaginaires conjugués deux à deux : lorsqu'un pareil anneau devient évanouissant, la période représentée par l'aire qu'il enveloppait disparaît, et en même temps il se forme un point double réel, réunion de deux séries de points imaginaires conjugués deux à deux.

Enfin, le cas, plus général, où deux périodes imaginaires conjuguées seraient liées à l'existence simultanée, dans l'enveloppe imaginaire, de deux anneaux composés chacun des points imaginaires conjugués de ceux qui formeraient l'autre, rentre encore dans les précédents, mais présente une particularité qui consiste en ce que les deux périodes ne peuvent disparaître qu'en même temps et par la formation simultanée de deux points doubles.

Supposons, s'il s'agissait d'une équation à coefficients imaginaires,

$$P + Q\sqrt{-1} = 0,$$

qu'on l'ait complétée par l'addition du facteur

$$P - Q\sqrt{-1} = 0;$$

de façon à obtenir l'équation

$$P^2 + Q^2 = 0.$$

Les deux périodes imaginaires conjuguées seront représentées par les formules

$$I = 2S_1 - \frac{S + S'}{2} + \frac{S - S'}{2}\sqrt{-1}$$

et

$$I' = 2S_1 - \frac{S + S'}{2} - \frac{S - S'}{2}\sqrt{-1};$$

elles s'évanouiront en même temps si les anneaux dont les aires sont S et S' se réduisent à deux points imaginaires conjugués parce que l'arc dont l'aire est S_1 se réduira alors aussi à un seul point; mais les deux points imaginaires conjugués où se seront concentrées les deux suites de points imaginaires conjugués qui constituaient les deux anneaux seront alors deux points doubles.

C'est ce qui arrive, par exemple, dans le système des deux cercles imaginaires conjugués, représentés par l'équation

$$\begin{aligned}&\left[(x - a - b\sqrt{-1})^2 + (y - a' - b'\sqrt{-1})^2 - (r + r'\sqrt{-1})^2\right]\\ \times &\left[(x - a + b\sqrt{-1})^2 + (y - a' + b'\sqrt{-1})^2 - (r - r'\sqrt{-1})^2\right] = 0,\end{aligned}$$

Les deux périodes sont

$$\pi(r + r'\sqrt{-1})^2 \quad \text{et} \quad \pi(r - r'\sqrt{-1})^2;$$

elles ne s'annulent ni l'une ni l'autre que pour $r = 0$ et $r' = 0$, mais alors le lieu acquiert deux points doubles,

$$\begin{cases} x = a + b\sqrt{-1}, \\ y = a' + b'\sqrt{-1}, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x = a - b\sqrt{-1}, \\ y = a' - b'\sqrt{-1}. \end{cases}$$

Remarque. — Les deux périodes I et I′ s'évanouiraient arithmétiquement sans disparaître géométriquement si S, S′ et S_1 satisfaisaient aux conditions

$$S - S' = 0 \qquad \text{et} \qquad 2S_1 - \frac{S + S'}{2} = 0;$$

mais ces deux conditions, fortuitement satisfaites, seraient d'ordre transcendant.

Ces périodes peuvent souvent disparaître dans des conditions analogues, sans que leur disparition entraîne la formation de points doubles, comme nous aurons occasion de le dire plus loin; mais ce n'est pas de ce genre de réduction dans le nombre des périodes que nous nous occupons ici. Nous cherchons à fixer les conditions dans lesquelles la valeur d'une période devient nulle en même temps que sa représentation géométrique devient évanouissante; et nous trouvons que, dans tous les cas, la condition consiste en ce qu'il se forme dans le lieu un ou deux points doubles, selon qu'il s'agit de faire disparaître une période réelle, ou imaginaire sans partie réelle, ou deux périodes imaginaires conjuguées. (*A suivre.*)

ERRATA.

Page 355, ligne 12, *au lieu de* $\frac{q_n^{n-\nu}}{q_{n+1}^{n-\nu+1}}$ *lire* $\frac{q_{n-\nu+1}^{n+1}}{q_{n-\nu}^{n}}$, et, *au lieu de* $(u - \nu)$ *lire* $(n - \nu)$.

Page 356, ligne 16, *remplacer* le premier signe — *par* =.

Page 360, ligne 7, *au lieu de* $1 + h$ *lire* $1 + k$.

Page 361, ligne 3, *au lieu de* $a_n \sigma$ *lire* $a_n \sigma_n$.

Page 361, ligne 4, *remplacer* le dernier signe = *par* —.

Page 365, ligne 18, *au lieu de* (14) *lire* (13).

DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES DE PASCAL ET DE BRIANCHON SUR LES HEXAGONES INSCRITS ET CIRCONSCRITS;

PAR M. P. SOULIER,
Actuaire de la C[ie] le Phénix.

Il est facile de construire dans l'espace un hexagone gauche dont les côtés opposés 1 et 4, 2 et 5, 3 et 6 se rencontrent deux à deux en trois points a, b, c.

Par les six sommets de l'hexagone on peut faire passer une double infinité de cônes du second degré. Le lieu des sommets de ces cônes est une surface qui rencontre le plan déterminé par les trois points abc suivant une courbe s.

Si, d'un point de la courbe s comme point de vue, on considère la perspective de l'hexagone sur un plan quelconque, les perspectives des six sommets seront sur une conique et les perspectives des trois points a, b, c seront en ligne droite.

On a donc ainsi la démonstration de ce théorème de Pascal : *Les points d'intersection des côtés opposés* 1 *et* 4, 2 *et* 5, 3 *et* 6 *d'un hexagone inscrit dans une conique sont en ligne droite.*

Le théorème de Brianchon sur l'hexagone circonscrit peut se démontrer d'une façon analogue.

Il existe, en effet, une double infinité de cônes du second degré tangents aux six côtés d'un hexagone gauche, et le lieu de leurs sommets est une surface S.

Les trois diagonales de l'hexagone déterminent un hyperboloïde qui rencontre la surface S suivant une certaine courbe.

Si, d'un point de cette courbe comme point de vue, on met l'hexagone en perspective, sa perspective sera un hexagone circonscrit à une conique, dont les trois diagonales seront concourantes; ce qui démontre le théorème de Brianchon.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1890).

Mathématiques élémentaires.

On donne deux droites xOx', yOy', qui se coupent en un point O, et sur la première un point A, sur la seconde un point B. Une droite mobile rencontre xOx' en M et yOy' en N, et l'on suppose que la longueur MN est égale à la somme ou à la valeur absolue de la différence des longueurs AM et BN :

1° Démontrer qu'il y a deux séries de droites qui satisfont à cette condition. Trouver combien on peut faire passer de ces droites par un point donné P du plan. Construire ces droites et distinguer parmi ces droites celles pour lesquelles la longueur MN est la somme des longueurs AM et BN de celles pour lesquelles elle en est la différence;

2° Soit MN une droite appartenant à l'une des deux séries; démontrer que le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle OMN est une conique qui a un foyer au point O, et que l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle OMN est un cercle.

Mathématiques spéciales.

On donne un triangle ABC et un point P dans son plan :

1° Trouver le lieu des centres des coniques S inscrites dans le triangle ABC et qui sont vues du point P sous un angle donné ω;

2° Discuter ce lieu en supposant que le point P se déplace dans le plan du triangle;

3° Démontrer que, si l'angle donné ω est droit, toutes les coniques S sont aussi vues sous un angle droit d'un autre point P'. Montrer que, dans ce cas, si le point P se déplace, la droite PP' passe par un point fixe I, et que le produit IP.IP' est constant.

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

Théorie. — Définir ce qu'on entend par un système complet d'équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles du premier ordre.

Exposer la méthode d'intégration de Mayer.

Application. — Intégrer le système suivant

$$\begin{aligned}&x_1x_5p_1+(3x_1x_4-2x_1x_6-2x_3x_5)p_3\\&\qquad-(2x_1^2-2x_1x_2+3x_4x_5-2x_5x_6)p_4\\&\qquad+x_5^2p_5-(3x_1^2-2x_1x_2+3x_4x_5-2x_5x_6)p_6=0\\&x_2p_2-x_3p_3+2(x_4-x_6)p_4+x_5p_5+3(x_4-x_6)p_6=0,\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$p_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Composition de Mécanique rationnelle.

On donne un tétraèdre non pesant OABC dans lequel l'angle trièdre O est trirectangle, et dont les arêtes OA, OB, OC ont respectivement pour longueurs a, b, c :

1° Déterminer les axes principaux de l'ellipsoïde central d'inertie, c'est-à-dire de l'ellipsoïde d'inertie relatif au centre de gravité G du tétraèdre, dans l'hypothèse suivante

$$a=\sqrt{2},\qquad b=\sqrt{1},\qquad c=\sqrt{3};$$

2° On imprime au tétraèdre une rotation initiale autour d'un diamètre GD de l'ellipsoïde central, et l'on propose d'étudier le mouvement de ce tétraèdre autour de son centre de gravité G. On déterminera sa position dans l'espace à une époque quelconque. Les composantes p_0, q_0, r_0 de la rotation initiale par rapport au grand axe, à l'axe moyen et au petit axe de l'ellipsoïde central d'inertie ont respectivement pour valeurs

$$p_0 = \sqrt{6+\sqrt{5}}, \qquad q_0 = 0, \qquad r_0 = \sqrt{6-\sqrt{5}}.$$

On rappelle que le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe peut être déterminé par les équations

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}\frac{dp}{dt} + (\mathrm{C}-\mathrm{B})qr = \mathrm{L}, &\qquad p &= \sin\theta\sin\varphi\frac{d\psi}{dt} + \cos\varphi\frac{d\theta}{dt},\\
&\mathrm{B}\frac{dq}{dt} + (\mathrm{A}-\mathrm{C})rp = \mathrm{M}, & q &= \sin\theta\cos\varphi\frac{d\psi}{dt} - \sin\varphi\frac{d\theta}{dt},\\
&\mathrm{C}\frac{dr}{dt} + (\mathrm{B}-\mathrm{A})pq = \mathrm{N}, & r &= \cos\theta\frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}.
\end{aligned}$$

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1891).

PROGRAMME DES QUESTIONS D'ANALYSE ET DE MÉCANIQUE D'OU SERA TIRÉ LE SUJET D'UNE DES COMPOSITIONS ÉCRITES.

Analyse.

Étude de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\mathrm{F}(x, y, z, p, q) = 0$$

dans laquelle z désigne une fonction des deux variables indépendantes x, y, et où l'on a posé

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Intégrale complète. Intégrale générale. Intégrale singulière dans le cas où l'une au moins des intégrales complètes représente une surface ayant une enveloppe.

Surfaces intégrales. Caractéristiques.

Méthode d'intégration de Lagrange et Charpit.

Ouvrages a consulter :

Lagrange. — *Mémoire sur l'intégration des équations aux différences partielles du premier ordre* (*Œuvres de Lagrange*, t. III, p. 549).

DARBOUX. — *Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (Ire Partie, *à l'exception des* § 8, 9 *et* 13).

JORDAN. — *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique.*

SERRET. — *Cours de Calcul différentiel et intégral.*

PICARD. — *Cours d'Analyse professé à la Faculté des Sciences de Paris.*

GOURSAT. — *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.*

Mécanique.

Équations de Lagrange. Équations canoniques. Méthode de Jacobi ramenant l'intégration d'un système canonique à la recherche d'une intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

OUVRAGES A CONSULTER :

LAGRANGE. — *Mécanique analytique*, t. I, Note VI de M. *Bertrand.*

JACOBI. — *Vorlesungen über Dynamik.*

MATHIEU. — *Dynamique analytique.*

DESPEYROUS. — *Cours de Mécanique.*

APPELL. — *Cours de Mécanique rationnelle.*

SUJETS DE LEÇONS.

Mathématiques élémentaires.

1. Plus grand commun diviseur et plus petit multiple commun de deux nombres entiers. (On n'emploiera pas la décomposition en facteurs premiers.)

2. Première leçon sur les nombres premiers.

3. Conversion d'une fraction ordinaire en fraction décimale. Fractions périodiques.

4. Racine carrée d'un nombre entier à moins d'une unité. Racine carrée d'un nombre quelconque avec une approximation donnée.

5. Fractions continues limitées. Applications.

6. Notions générales sur la mesure des grandeurs. Mesure du fuseau, mesure de l'aire d'un triangle sphérique.

7. Calcul de π par la méthode des isopérimètres. Exposer sommairement les autres méthodes élémentaires permettant de

résoudre la même question, et les comparer à la méthode des isopérimètres.

8. Transformation par rayons vecteurs réciproques. Applications.

9. Polyèdres semblables.

10. Division et faisceaux en involution. Applications.

11. Sphères tangentes à quatre sphères données.

12. Sphères tangentes à quatre plans.

13. Triangles sphériques. Triangles sphériques polaires réciproques. Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse construire un triangle sphérique avec trois côtés donnés, ou avec trois angles donnés. (Pour cette leçon, on n'empruntera à la théorie des trièdres que la propriété suivante : dans un trièdre toute face est moindre que la somme des deux autres.)

14. Pôle et polaire par rapport à un cercle tracé sur une sphère. Axe radical de deux cercles, centre radical de trois cercles tracés sur une sphère. Applications.

15. Propriétés générales des polyèdres. Théorème d'Euler; applications. Nombre des conditions nécessaires pour déterminer un polyèdre.

16. Démontrer qu'une ellipse quelconque peut être considérée comme la projection orthogonale d'un cercle. Déduire de là les principales propriétés de l'ellipse.

17. Démontrer que toute section plane d'un cône à base circulaire peut être considérée comme le lieu des points d'intersection des rayons homologues de deux faisceaux homographiques. Réciproque. Application à la démonstration de quelques propriétés des coniques. (Consulter les Ouvrages suivants : Chasles, *Traité des sections coniques;* Rouché et de Comberousse, *Traité de Géométrie.*)

18. Division des polynômes.

19. Décomposition d'un trinôme du second degré en une somme ou en une différence de deux carrés. Application à la résolution de l'équation du second degré; séparation des racines quand elles sont réelles. (On ne supposera pas que l'équation du second degré a déjà été résolue par une autre méthode.)

20. Décomposition du trinôme x^4+px^2+q en un produit de facteurs réels du second degré; application à la résolution

de l'équation bicarrée. (On ne supposera pas que l'équation bicarrée ait été déjà résolue par une autre méthode.)

21. Théorème des projections. Établir les formules relatives à l'addition des arcs.

22. Vitesse dans le mouvement uniforme et dans le mouvement varié. Étude du mouvement uniformément varié.

23. Composition des mouvements. Composition des vitesses. Composition de deux mouvements rectilignes et uniformément variés.

24. Réduction à deux forces d'un système de forces appliquées à un corps solide. Conditions d'équilibre.

25. Définition et détermination de la longitude et de la latitude d'un point du globe terrestre.

26. Méthode des rabattements, des changements de plan, des rotations en Géométrie descriptive. Applications.

27. Résolution des angles trièdres. (Géométrie descriptive.)

Mathématiques spéciales.

1. Première leçon sur les déterminants.

2. Résolution d'un système de n équations du premier degré à p inconnues. Cas où les équations sont homogènes.

3. Décomposition d'une fonction homogène du second degré de n variables en une somme de carrés de fonctions linéaires homogènes des mêmes variables. En supposant ces fonctions linéaires indépendantes, trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que le nombre des carrés se réduise à $n - p$.

4. Fractions continues illimitées; fractions continues périodiques; développement des irrationnelles du second degré en fractions continues.

5. Première leçon sur les séries.

6. Expressions imaginaires. Calcul de ces expressions.

7. Application de la théorie des dérivées à l'étude des variations d'une fonction d'une seule variable. Exemples.

8. Définition de l'intégrale définie. Exemples.

9. Condition nécessaire et suffisante pour que deux fonctions entières d'une même variable admettent un diviseur commun. Application à l'élimination d'une inconnue entre deux équations algébriques entières et rationnelles.

10. Calcul des fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique.

11. Transformation d'une équation algébrique dans le cas où chaque racine de l'équation cherchée doit être une fonction rationnelle d'une ou de deux racines de l'équation donnée. Exemples.

12. Abaissement des équations algébriques. Exemples.

13. Théorème de Sturm. Applications.

14. Méthode de M. Hermite pour déterminer le nombre des racines réelles d'une équation algébrique qui sont comprises entre deux limites données. (Consulter le *Cours d'Algèbre supérieure* de SERRET, t. I, 4° édition, p. 985.)

15. Résolution algébrique de l'équation du troisième degré.

16. Les racines d'une équation algébrique du quatrième degré étant a, b, c, d, on pose

$$y = ab + cd, \qquad z = a + b - c - d, \qquad t = a + b;$$

montrer qu'on peut résoudre cette équation à l'aide des transformées en y, en z, ou en t. Comparer ces méthodes de résolution et développer l'une d'elles.

17. Le nombre e ne peut être racine d'aucune équation algébrique à coefficients entiers. (On pourra consulter, outre le Mémoire de M. Hermite *Sur la fonction exponentielle*, *Comptes rendus*, t. LXXVII, un article de M. JULES MOLK inséré au *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XIV.)

18. Recherche de l'équation d'un lieu géométrique (Géométrie plane). Exemples.

19. Étude d'une courbe algébrique dans le voisinage d'un de ses points.

20. Recherche des sécantes communes à deux coniques. Application à la détermination du nombre de points réels ou imaginaires communs à ces courbes.

21. Figures polaires réciproques. Cas où la conique directrice est un cercle. Applications.

22. Théorèmes de Desargues et de Sturm. Théorèmes corrélatifs. Application à la construction des coniques.

23. Équation du plan tangent à une surface définie par les équations

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v).$$

Application aux surfaces réglées.

24. Un plan (P) coupe une quadrique suivant une conique à centre; former les équations des axes de cette conique et calculer les longueurs de ces axes. (On suppose que la quadrique est rapportée à des axes rectangulaires quelconques.)

25. Foyers dans les surfaces de second degré.

26. Intersection de deux quadriques dans le cas où cette ligne se décompose.

27. Intersection d'un cône et d'un cylindre dans le cas où la section a des branches infinies (Géométrie descriptive).

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1890.

Composition de Géométrie descriptive (¹).

Une sphère pleine ayant été percée d'un trou conique, représenter, par ses projections, le solide restant.

La sphère est inscrite dans un cube de $0^m,2$ de côté dont une des trois directions d'arêtes est verticale, et une autre perpendiculaire au plan vertical.

Le cône qui traverse la sphère a pour sommet le sommet du cube commun à la face supérieure, à la face postérieure et à la face de gauche. La directrice du même cône est la circonférence tangente, en leurs milieux, à celle des diagonales de cette dernière face qui ne contient pas le sommet du cône et à la diagonale parallèle dans la face opposée.

On placera les projections du centre du cube à $0^m,21$ de distance l'une de l'autre, de manière que la ligne de rappel ainsi déterminée ait pour milieu le centre du cadre et se trouve parallèle aux grands côtés.

En fait de constructions, et en dehors de celles qui se rapportent aux points remarquables, on ne laissera subsister, dans le tracé à l'encre, que la détermination d'un point de chaque courbe et celle de la tangente en ce point.

(¹) Deuxième sujet.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1890.

Mathématiques.

1. Entre les coordonnées x, y d'un point A et les coordonnées u, v d'un point B, on établit les relations

$$x = \frac{u^3 + \lambda u v^2}{u^2 + v^2}, \qquad y = \frac{v^3 + \lambda v u^2}{u^2 + v^2},$$

où λ est un nombre positif donné.

Après avoir déduit de ces relations l'équation qui relie les coefficients angulaires α, β des droites qui joignent l'origine aux points A, B, on montrera que, en général, à chaque point A correspondent trois positions du point B : ces points B_1, B_2, B_3 peuvent-ils être réels et distincts? Où le point A doit-il se trouver pour qu'il en soit ainsi? Sur quel lieu doit-il être situé pour que deux de ces points, B_2 et B_3, par exemple, soient confondus? Si le point A décrit ce lieu, quels sont les lieux décrits par les points confondus B_2, B_3 et par le point B_1?

2. Étant donnés deux axes rectangulaires Ox, Oy, on prend sur l'axe des x un point fixe A, sur l'axe des y un point fixe B, et l'on mène par le point O une parallèle à la droite AB. On considère un système de trois cercles assujettis à avoir même axe radical et à être tangents, le premier en A à l'axe des x, le second en B à l'axe des y, le troisième en O à la parallèle à AB.

Démontrer que l'axe radical des trois cercles passe par un point fixe.

Trouver le lieu des points communs à ces trois cercles : on indiquera quelle est en général la forme de cette courbe, et l'on examinera en particulier le cas où l'angle en A du triangle OAB est égal à $\frac{\pi}{6}$.

Physique.

1. Montrer que la différence constatée par Regnault entre

les deux coefficients de dilatation d'un même gaz est d'accord avec la manière dont le gaz s'écarte de la loi de Mariotte.

2. Étudier la marche des rayons qui, partis d'un point lumineux, ont traversé une lentille, de faible ouverture et d'épaisseur négligeable, dont l'une des faces est taillée suivant un cylindre circulaire droit convexe, la deuxième face étant plane et parallèle à l'axe du cylindre. Passer de là au cas où la source de lumière est une petite droite perpendiculaire à l'axe principal. Examiner enfin ce qui se passe quand la lentille plancylindrique est immédiatement suivie d'une lentille sphérique convergente infiniment mince.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1890.

PREMIÈRE SESSION.

Géométrie analytique.

On donne deux axes rectangulaires $x'Ox, y'Oy$, et deux points A, B symétriques par rapport au point O.

1° On prend, sur l'axe des x, un point quelconque P, et l'on considère la parabole (P) qui est tangente aux droites PA, PB au point A et au point B. Lieu du sommet et lieu du foyer de cette parabole quand le point P parcourt l'axe $x'Ox$.

2° On prend, sur l'axe des y, un point Q quelconque, et l'on considère la parabole (Q) qui est tangente aux droites QA, QB, au point A et au point B. Les deux paraboles (P) et (Q) qui correspondent ainsi à un point P pris sur $x'Ox$ et à un point Q pris sur $y'Oy$, se coupent aux points A, B et en deux autres points C, D. Former l'équation de la droite CD, et trouver le lieu décrit par les points C et D quand les deux points P et Q se déplacent l'un sur $x'Ox$, l'autre sur $y'Oy$, de façon que l'abscisse du premier soit toujours égale à l'ordonnée du second.

Calcul trigonométrique.

1° Calculer les angles d'un triangle dans lequel

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{1,50} = \frac{c}{1,75};$$

2° Calculer la surface et le rayon du cercle inscrit dans un triangle semblable au précédent et dans lequel

$$a = 25675^{m},24.$$

Épure.

Intersection de deux cônes.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à 255^{mm} du petit côté supérieur.

Les bases des cônes sont des cercles dont les rayons sont égaux à 80^{mm} et dont les plans sont perpendiculaires à la droite $(ab, a'b')$ qui joint leurs centres (a, a') et (b, b').

La ligne de rappel aa' est à 120^{mm} du grand côté gauche du cadre et la ligne de rappel bb' à 145^{mm} du même grand côté. La cote et l'éloignement du point (a, a') sont égaux à 80^{mm}; la cote du point (b, b') est de 145^{mm} et son éloignement de 105^{mm}.

On prend les diamètres horizontaux des cercles de base, on joint les extrémités de ces diamètres voisines du grand côté gauche du cadre et, sur la droite ainsi obtenue, on prend le point dont la cote est égale à 248^{mm} : c'est le sommet du cône qui a pour base le cercle (a, a'). On joint les secondes extrémités des diamètres horizontaux des cercles de base, et, sur la droite ainsi obtenue, on prend le point dont la cote est égale à 3^{mm} : c'est le sommet du cône qui a pour base le cercle (b, b').

On demande de représenter par ses deux projections le corps solide formé par l'ensemble des deux cônes supposés pleins et limités chacun à son sommet et à sa base.

On indiquera *à l'encre rouge* les constructions employées pour placer les données et pour déterminer :

1° Un point *quelconque* de chacune des bases et les tangentes en ces points;

2° Un point *quelconque* de la trace de chaque cône sur le plan de base de l'autre et les tangentes en ces points;

3° Un point *quelconque* de l'intersection des deux cônes et la tangente en ce point;

4° Les génératrices de contour apparent des deux cônes et les points des bases, des traces sur les plans de base et de l'intersection, situés sur ces génératrices.

On n'indiquera pas d'autre construction.

Une légende sur une feuille à part fera connaître succinctement le procédé suivi pour chacune des déterminations précédentes.

Titre extérieur : Intersection de deux cônes. Ce titre, en lettres dessinées, est de rigueur.

Physique.

Une bouteille en fer munie d'un robinet contient un gaz liquéfié; on en laisse échapper par ébullition un poids p.

On demande :

1° De calculer le volume V occupé par le gaz *sorti* sous la pression H et à la température $t°$, d_g étant sa *densité* à 0° et à 760°;

2° D'exprimer le poids ϖ de gaz *formé* tant à l'intérieur qu'à l'extérieur de la bouteille; on désignera par d_v et d_l les *poids spécifiques* du gaz et du liquide dans les conditions où ils se trouvent dans le récipient;

3° Quelle sera la température finale x de l'appareil, son équivalent en eau étant P, sa température initiale t, si l'on suppose qu'il n'emprunte pas de chaleur au milieu ambiant et si l'on représente par l la chaleur latente de vaporisation dans les conditions de l'expérience :

$$\begin{array}{llll} p = 65^{gr}, & H = 754^{mm}, & l = 90^{cal}, & d_l = 1{,}43, \\ P = 125^{gr}, & t = 15^{\circ}, & & d_g = 2{,}234, \\ & & & d_v = 0{,}0044. \end{array}$$

a poids du litre d'air à 0° et 760 égale $1^{gr},293$.

Chimie.

1. Donner, *sous forme de Tableau,* les formules chimiques qui expriment les propriétés comparatives du gaz des marais et du gaz oléfiant.

Chaque formule *devra* être écrite :

1° En notation en équivalents;

2° En notation atomique.

2. Un gaz, composé oxygéné de l'azote, possède une densité égale à 1,039.

On fait passer 2^{lit} de ce gaz sur du sulfure de baryum chauffé au rouge.

On recueille 1^{lit} de gaz azote pur, dont la densité est égale à 0,972.

Établir d'après cela :

1° La composition en volume du gaz donné;

2° La formule de ce gaz, sachant que la densité de l'oxygène est 1,1056.

SECONDE SESSION.

Géométrie analytique.

On donne une parabole rapportée à deux axes rectangulaires Ox et Oy; cette parabole a son axe parallèle à l'axe des y, elle passe par l'origine et le point de l'axe des x dont l'abscisse est l, enfin elle admet une ordonnée maxima égale à f.

On donne en outre une droite passant par l'origine et un point $A(x = l, y = h)$:

1° Démontrer que, si, pour une abscisse déterminée, on porte en ordonnée la somme algébrique de l'ordonnée de la droite et de celle de la parabole correspondant à cette abscisse, l'extrémité de cette ordonnée est sur une parabole (P) égale à la première;

2° Démontrer que les axes des coniques qui passent par l'intersection d'un cercle et d'une conique sont parallèles aux axes de celle-ci;

3° Une circonférence de cercle décrite sur OA comme diamètre coupant la parabole (P) en quatre points O, A, B, C, chercher le lieu du point d'intersection des sécantes communes OA, BC quand on fait varier h et construire ce lieu qui n'est pas du deuxième degré;

4° Chercher la valeur du rapport $\frac{l}{f}$ pour laquelle le cercle décrit sur OA comme diamètre est tangent à la parabole quel que soit h.

Calcul trigonométrique.

On donne

$$a = 3456,742,$$
$$b = 5264,823,$$
$$C = 118^\circ 37' 43'',4.$$

Calculer les angles A, B, et le côté c, et le rayon du cercle inscrit.

Épure.

Intersection de deux cônes de révolution.

Placer la ligne parallèlement aux petits côtés du cadre, à $0^m,255$ du petit côté supérieur.

La ligne de rappel oo' du centre du cercle de base du premier cône est à égale distance des grands côtés du cadre. La cote du point (o, o') est de 100^{mm} et son éloignement de 93^{mm}. La ligne de rappel ss' du sommet du premier cône est à 87^{mm} de oo' vers la droite. La cote du point (ss') est de 210^{mm} et son éloignement de 162^{mm}. Le rayon du cercle de base est de 80^{mm}.

On prend le diamètre horizontal de ce cercle de base et l'on fait tourner de 90° le premier cône autour de cette horizontale, de manière que la cote du sommet reste supérieure à celle du centre de la base; on a ainsi le second cône.

On demande de représenter par ses deux projections le corps solide formé par l'ensemble des deux cônes supposés pleins et limités chacun à son sommet et à sa base.

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour placer les données et pour déterminer :

1° Un point quelconque de chacune des bases et les tangentes en ces points;

2° Un point quelconque de l'intersection des deux cônes et la tangente en ce point;

3° Les génératrices de contour apparent des deux cônes et les points des bases et de l'intersection situés sur ces génératrices.

On n'indiquera pas d'autre construction.

Titre extérieur : *Intersection de surfaces.* Titre intérieur : *Assemblage de deux cônes.*

Ces titres, en lettres dessinées, sont de rigueur.

Une légende, sur une feuille à part, fera connaître succinctement le procédé suivi pour chacune des déterminations précédentes.

Physique.

1. Un récipient de volume invariable renferme, à la température de $0°$, 10^{kg} de gaz comprimé.

On fait sortir du récipient 3^{kg} du gaz qu'il contient et l'on chauffe pour rétablir dans l'appareil la même pression qu'au début.

A quelle température faut-il chauffer?

On donne

$$\alpha = 0,00367.$$

2. De l'influence électrique, électroscope.

Chimie.

1. Comment liquéfie-t-on dans un tube de Faraday le gaz ammoniac, l'acide sulfhydrique et le chlore? et comment prépare-t-on les substances destinées à ces liquéfactions?

2. Déterminer la composition de l'oxyde de carbone à l'aide de l'eudiomètre à mercure.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (1890).

Mathématiques (3^h).

1. Calcul logarithmique (obligatoire). On donne les côtés d'un triangle

$$a = 895839, \qquad b = 789858, \qquad c = 603649;$$

calculer l'angle A (celui-là seulement).

2. Discuter les racines de l'équation

$$(m-2)x^4-(m-1)(a^2+b^2)x+ma^2b^2=0,$$

lorsque m varie.

3. On donne dans un triangle l'angle A, un côté adjacent b et le rapport du côté a à la médiane issue de A. Calculer le côté c. Discuter.

4. On donne dans l'espace deux droites orthogonales X et Y et leur perpendiculaire commune, qui rencontre X en I et Y en K. Une droite AB de longueur constante se meut en appuyant ses extrémités A et C, respectivement, sur X et sur Y. On joint AK et IB, ce qui forme le tétraèdre variable ABIK.

1° Démontrer que la somme des carrés des six arêtes est constante, que le rayon de la sphère circonscrite est constant, et que les trois droites joignant les milieux des arêtes opposées ont aussi des longueurs constantes.

2° On sait que ces trois dernières droites se coupent au même point qui est le milieu de chacune d'elles; trouver le lieu géométrique de ce point.

Géométrie descriptive ($2^{\text{h}}30^{\text{m}}$).

Un cône de révolution a pour base sur le plan horizontal un cercle O de 50^{mm} de rayon, tangent à la ligne de terre, et il a une hauteur de 112^{mm}. On mène :

1° Par le milieu A de la génératrice de front (celle de gauche), le plan parallèle au plan tangent au cône suivant la génératrice opposée;

2° La normale au cône en A qui rencontre le plan horizontal en B, les tangentes BC et BD au cercle O, et enfin les plans ABC et ABD.

On demande de représenter par ses projections le solide commun au cône et au tétraèdre que forment le plan horizontal et les trois plans précédents.

NOTE SUR LE PROBLÈME DE MÉCANIQUE PROPOSÉ AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1890.

(Extrait d'une lettre de M. DE SAINT-GERMAIN à M. ROUCHÉ).

Je vais encore indiquer, pour quelques lecteurs des *Nouvelles Annales,* une solution du problème de Mécanique proposé en 1890 au concours d'agrégation des Sciences mathématiques : la question est classique; les calculs seuls exigent un peu d'attention.

Il s'agit, en premier lieu, de trouver la grandeur et la direction des axes de l'ellipsoïde d'inertie P, relatif au centre de gravité G d'un tétraèdre homogène OABC dont le trièdre en O est trirectangle, et où l'on a

$$\mathrm{OA} = a = \sqrt{2}, \qquad \mathrm{OB} = b = 1, \qquad \mathrm{OC} = c = \sqrt{3};$$

on propose ensuite de déterminer le mouvement du tétraèdre, en supposant qu'il ne soit pas pesant et que son mouvement initial se réduise à une rotation dont l'axe passe au point G et dont les composantes, suivant l'axe majeur, l'axe moyen et l'axe mineur de P, soient

$$p_0 = \sqrt{6+\sqrt{5}}, \qquad q_0 = 0, \qquad r_0 = \sqrt{6-\sqrt{5}}.$$

1° Soient ε la densité du tétraèdre, m sa masse. Prenons d'abord les droites OA, OB, OC pour axes des x, des y, des z et cherchons les intégrales de la forme

$$\mathrm{U} = \iiint \varepsilon x^2\, dx\, dy\, dz, \qquad \mathrm{V} = \iiint \varepsilon yz\, dx\, dy\, dz,$$

étendues à tout le volume du tétraèdre : un calcul très simple, que des considérations géométriques peuvent encore abréger, donne

$$U = \frac{a^3bc\varepsilon}{60} = \frac{ma^2}{10}, \qquad V = \frac{ab^2c^2\varepsilon}{120} = \frac{mbc}{20}:$$

ces résultats se déduiraient immédiatement de la formule, bonne à retenir,

$$\int\int\int x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\,dx\,dy\,dz = a^p b^q c^r \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r+1)},$$

l'intégrale s'étendant à la partie de l'espace où x, y, z sont positifs et satisfont à l'inégalité

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leqq 1.$$

Par le point G, dont les coordonnées sont $\frac{a}{4}$, $\frac{b}{4}$, $\frac{c}{4}$, menons des axes Gx', Gy', Gz' parallèles aux premiers : l'équation de l'ellipsoïde central P sera de la forme

$$(1) \qquad \mathcal{A}x'^2 + \mathcal{B}y'^2 + \mathcal{C}z'^2 - 2\mathcal{D}y'z' - 2\mathcal{E}'z'x' - 2\mathcal{F}x'y' = 1,$$

et l'on a, d'après des théorèmes bien connus et d'après les valeurs des intégrales analogues à U et à V,

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \sum (y'^2 + z'^2)\,dm \\ &= \sum (y^2 + z^2)\,dm - \frac{b^2+c^2}{16}m = 3\,\frac{b^2+c^2}{80}m,\\ \mathcal{D} &= \sum y'z'\,dm = \sum \left(y - \frac{b}{4}\right)\left(z - \frac{c}{4}\right)dm = -\frac{bcm}{80}.\end{aligned}$$

Avec les valeurs numériques attribuées à a, b, c, on a

$$\mathcal{A} = \frac{12m}{80}, \qquad \mathcal{B} = \frac{15m}{80}, \qquad \mathcal{C} = \frac{9m}{80},$$

$$\mathcal{D} = -\frac{m\sqrt{3}}{80}, \qquad \mathcal{E} = -\frac{m\sqrt{6}}{80}, \qquad \mathcal{F} = -\frac{m\sqrt{2}}{80}.$$

Rapporté à ses axes principaux $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$, P aurait pour équation

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1,$$

A, B, C étant égaux aux moments principaux d'inertie relatifs au point G, et aussi aux racines de l'équation en S pour la surface (1) : écrivons cette équation sous la forme, dite de Jacobi,

$$(2)\qquad \frac{1}{\mathcal{D}^2(S-\lambda)}+\frac{1}{\mathcal{E}^2(S-\mu)}+\frac{1}{\mathcal{F}^2(S-\nu)}+\frac{1}{\mathcal{D}\mathcal{E}\mathcal{F}}=0,$$

en posant

$$\lambda=\mathcal{A}+\frac{\mathcal{E}\mathcal{F}}{\mathcal{D}}=\frac{5m}{40},\qquad \mu=\ldots=\frac{7m}{40},\qquad \nu=\frac{3m}{40}.$$

Pour simplifier l'écriture, faisons $m=40$, puis, dans l'équation (2), remplaçons les lettres par leurs valeurs et réduisons : il vient

$$S^3-18S^2+103S-186=0;$$

on trouve que cette équation a pour racines 6 et $6\pm\sqrt{5}$. Nous poserons

$$A=6-\sqrt{5},\qquad B=6,\qquad C=6+\sqrt{5};$$

le moment d'inertie minimum A correspond à l'axe majeur $G\xi$ de P, B à l'axe moyen, C à l'axe mineur.

Les cosinus directeurs de ces axes sont, on le sait, proportionnels aux inverses de $\mathcal{D}(S-\lambda)$, $\mathcal{E}(S-\mu)$, $\mathcal{F}(S-\nu)$ en faisant S égal à A pour $G\xi$, à B pour $G\eta$, à C pour $G\zeta$: on trouve pour ces trois axes respectifs, après quelques réductions simples,

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)}=\frac{\beta}{\sqrt{5}-1}=\frac{\gamma}{-\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}=\frac{\pm 1}{\sqrt{60+20\sqrt{5}}},$$

$$\frac{\alpha'}{\sqrt{6}}=\frac{\beta'}{-\sqrt{3}}=\gamma'=\frac{\pm 1}{\sqrt{10}},$$

$$\frac{\alpha''}{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}=\frac{\beta''}{\sqrt{5}+1}=\frac{\gamma''}{\sqrt{3}(3-\sqrt{5})}=\frac{\pm 1}{\sqrt{60-20\sqrt{5}}}.$$

2° La recherche du mouvement du tétraèdre revient à celle du mouvement de l'ellipsoïde P qui lui est lié d'une manière fixe et connue, sinon simple. Le centre G reste immobile et P est animé d'un *mouvement de Poinsot*. Pour déterminer ce mouvement, on calcule d'abord, en fonction du temps, les composantes p, q, r de la rotation instantanée suivant $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$. A cet effet, j'associe la seconde équation d'Euler à celles qui expriment la conservation de la force vive et du couple résultant des quantités de mouvement : j'ai trois équations de la forme

$$Ap^2 + \ldots = H, \qquad A^2p^2 + \ldots = K^2, \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{C-A}{B}pr,$$

qui, eu égard aux valeurs de A, B, C, p_0, q_0, r_0, deviennent

$$(3) \qquad (6-\sqrt{5})p^2 + 6q^2 + (6+\sqrt{5})r^2 = 31 \times 2,$$

$$(4) \qquad (6-\sqrt{5})^2p^2 + 36q^2 + (6+\sqrt{5})^2r^2 = 31 \times 12.$$

$$(5) \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{\sqrt{5}}{3}pr.$$

L'élimination de q entre les équations (3) et (4) donne

$$(6) \qquad \frac{r}{p} = \pm\sqrt{\frac{6+\sqrt{5}}{6-\sqrt{5}}};$$

le signe +, qui convient d'abord, doit être conservé jusqu'à ce que p et r s'annulent, ce qui, on le verra, ne se produira jamais. Le lieu de l'axe instantané dans le solide est un plan. On est dans le cas simple où la distance $\frac{\sqrt{H}}{K}$ du centre G au plan sur lequel P doit rouler est égale au demi-axe moyen de l'ellipsoïde. Des équations (3) et (6) on déduit

$$(7)\qquad p = \pm\sqrt{\frac{31-3q^2}{6-\sqrt{5}}},\qquad r = \pm\sqrt{\frac{31-3q^2}{6+\sqrt{5}}};$$

on prendra les signes + qui conviennent à l'état initial. L'équation (5) donne alors

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\sqrt{5}}{3}\,\frac{31-3q^2}{\sqrt{31}}$$

ou, en posant, pour abréger,

$$\sqrt{\frac{5}{3}} = n,\qquad \sqrt{31} = \omega\sqrt{3},$$

$$n\,dt = \frac{\omega\,dq}{\omega^2-q^2}.$$

Intégrons, en nous rappelant que q_0 est nul, et résolvons par rapport à q : il vient

$$q = \omega\,\frac{e^{2nt}-1}{e^{2nt}+1} = \omega\,\frac{e^{nt}-e^{-nt}}{e^{nt}+e^{-nt}};$$

les équations (7) donnent, après des réductions simples,

$$p = \frac{2\sqrt{6+\sqrt{5}}}{e^{nt}+e^{-nt}},\qquad r = \frac{2\sqrt{6-\sqrt{5}}}{e^{nt}+e^{-nt}}.$$

Rien de plus facile que de discuter les valeurs de p, q, r. L'axe de la rotation instantanée, d'abord égal à $\sqrt{31}$, tend, pour t infini, à devenir égal à ω ou à $\sqrt{\frac{31}{3}}$ et à prendre la direction de $G\eta_1$.

Reste à déterminer, pour chaque instant, la position de P par rapport à un système d'axes fixes $Gx_1y_1z_1$;

Gz_1 coïncide avec l'axe du couple K des quantités de mouvement, Gy_1 avec la position initiale de $G\eta$, Gx_1 forme avec Gy_1z_1 un trièdre superposable à $G\xi\eta\zeta$. La position de ce dernier trièdre par rapport à $Gx_1y_1z_1$ sera définie par les trois angles d'Euler ψ, θ, φ et il suffit de faire la figure pour voir qu'à l'instant initial on a

$$\psi \; \frac{3\pi}{2}, \qquad \varphi = \frac{\pi}{2}, \qquad \theta = \theta_0 = \arccos \sqrt{\frac{6+\sqrt{5}}{12}}.$$

Les angles θ et φ sont donnés par les équations bien connues

$$\cos\theta = \frac{Cr}{K} = \frac{\sqrt{6+\sqrt{5}}}{(e^{nt}+e^{-nt})\sqrt{3}},$$

$$\sin\theta\sin\varphi = \frac{Ap}{K} = \frac{\sqrt{6-\sqrt{5}}}{(e^{nt}+e^{-nt})\sqrt{3}},$$

$$\sin\theta\cos\varphi = \frac{Bq}{K} = \frac{e^{nt}-e^{-nt}}{e^{nt}+e^{-nt}};$$

pour t infini, θ tend vers $\frac{\pi}{2}$, φ vers zéro; à la limite, $G\zeta$ et $G\xi$ sont dans le plan Gx_1y_1 et $G\eta$ coïncide avec Gz_1 ou K.

La détermination de ψ exige une quadrature : on a

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{p\sin\varphi + q\cos\varphi}{\sin\theta}$$

$$= \frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2}K = \frac{(e^{2nt}+e^{-2nt})\sqrt{93}}{3e^{2nt}-\sqrt{5}+3e^{-2nt}};$$

l'équation peut se mettre sous la forme

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \frac{12ne^{2nt}}{\sqrt{31}\left[1+\frac{(6e^{2nt}-\sqrt{5})^2}{31}\right]}.$$

L'intégration introduit un arc tang, qu'on supposera compris entre o et $\frac{\pi}{2}$ et dont la valeur initiale est θ_0; on aura

$$\psi = \omega t + \operatorname{arc\,tang} \frac{6e^{2nt} - \sqrt{5}}{\sqrt{31}} + \frac{3\pi}{2} - \theta_0.$$

Il est sans doute inutile d'insister sur l'interprétation bien connue des résultats précédents, ni sur la recherche de l'herpolhodie, la polhodie étant une ellipse.

RECHERCHE D'UNE ÉQUATION DES SURFACES MOULURES;

Par M. P. DE SANCTIS,
Docteur ès Sciences de la Faculté de Rome.

On sait que les surfaces moulures peuvent être engendrées par une courbe tracée sur un plan qui se meut perpendiculairement à une autre courbe dans l'espace en ne roulant jamais autour de la tangente à cette seconde courbe.

En partant de cette définition, on peut trouver l'équation d'une surface moulure quelconque.

Soient

$$(1) \qquad x = \varphi(\gamma), \qquad y = \psi(\gamma), \qquad z = \gamma$$

les équations d'une courbe dans l'espace, γ étant le paramètre fondamental, l'équation

$$(2) \qquad (x - \varphi)\frac{d\varphi}{d\gamma} + (y - \psi)\frac{d\psi}{d\gamma} + z - \gamma = 0$$

représente, pour les différentes valeurs de γ, les différentes positions du plan normal à la courbe (1). Cette courbe rencontre le plan normal qui correspond à la valeur quelconque

$$\gamma = \gamma_0$$

du paramètre, dans le point

$$x = \varphi(\gamma_0), \qquad y = \psi(\gamma_0), \qquad z = \gamma_0.$$

Si l'on appelle s l'arc de la courbe dans l'espace et ρ son rayon de courbure, les cosinus de direction de la normale principale à la courbe (1) sont

$$\frac{1}{\rho}\frac{d^2 x}{ds^2}, \quad \frac{1}{\rho}\frac{d^2 y}{ds^2}, \quad \frac{1}{\rho}\frac{d^2 z}{ds^2};$$

en outre,

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{d\gamma}\frac{d\gamma}{ds}, \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{d\gamma}\frac{d\gamma}{ds}, \qquad \frac{dz}{ds} = \frac{d\gamma}{ds},$$

et, puisque

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

en posant

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{d\gamma}, \qquad \psi' = \frac{d\psi}{d\gamma}, \qquad \varphi'' = \frac{d^2\varphi}{d\gamma^2}, \qquad \psi'' = \frac{d^2\psi}{d\gamma^2},$$

on aura

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{d\gamma}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\gamma}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi'^2 + \psi'^2}}.$$

De là on tire, au moyen d'une dérivation,

$$\frac{d^2\gamma}{ds^2} = -\frac{\varphi'\varphi'' + \psi'\psi''}{(1 + \varphi'^2 + \psi'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or on a

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = \frac{d^2 x}{d\gamma^2}\left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2 + \frac{dx}{d\gamma}\frac{d^2\gamma}{ds^2},$$

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = \frac{d^2 y}{d\gamma^2}\left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2 + \frac{dy}{d\gamma}\frac{d^2\gamma}{ds^2},$$

$$\frac{d^2 z}{ds^2} = \frac{d^2\gamma}{ds^2},$$

et, par conséquent, en substituant,

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{\varphi''(1+\varphi'^2+\psi'^2)^{\frac{1}{2}} - \varphi'(\varphi'\varphi''+\psi'\psi'')}{(1+\varphi'^2+\psi'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{\psi''(1+\varphi'^2+\psi'^2)^{\frac{1}{2}} - \psi'(\varphi'\varphi''+\psi'\psi'')}{(1+\varphi'^2+\psi'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} = -\frac{\varphi'\varphi''+\psi'\psi''}{(1+\varphi'^2+\psi'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Les trois quantités $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$, $\frac{d^2z}{ds^2}$ sont proportionnelles aux cosinus des angles que la normale principale à la courbe (1) fait avec les axes; par conséquent, l'équation du plan de la tangente et de la binormale à la même courbe est la suivante :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}&(x-\varphi)\left[\varphi''(1+\varphi'^2+\psi'^2)^{\frac{1}{2}} - \varphi'(\varphi'\varphi''+\psi'\psi'')\right]\\&\quad+(y-\psi)\left[\psi''(1+\varphi'^2+\psi'^2)^{\frac{1}{2}} - \psi'(\varphi'\varphi''+\psi'\psi'')\right]\\&\qquad-(z-\gamma)(\varphi'\varphi''+\psi'\psi'')=0.\end{aligned}\right.$$

Pour les différentes valeurs de γ l'équation précédente donne les différentes positions du plan de la tangente et de la binormale.

Divisons le premier membre de l'équation (3) par le coefficient du dernier terme et écrivons les équations (2) et (3) symboliquement de la façon suivante :

$$Z = A_1(x-\varphi) + A_2(y-\psi) + z - \gamma = 0,$$
$$X = B_1(x-\varphi) + B_2(y-\psi) + z - \gamma = 0.$$

L'équation du plan de la tangente et de la normale principale à la courbe (1) sera alors

$$(A_2 - B_2)(x-\varphi) + (B_1 - A_1)(y-\psi) + (A_1B_2 - A_2B_1)(z-\gamma) = 0.$$

que nous écrirons brièvement

$$Y = 0.$$

Aux plans coordonnés fixes substituons les plans coordonnés mobiles

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0.$$

Les formules de transformation des coordonnées, comme on le voit facilement, sont

$$(4) \quad \begin{cases} X = B_1(x-\varphi) + B_2(y-\psi) + z - \gamma, \\ Y = (A_2 - B_2)(x-\varphi) + (B_1 - A_1)(y-\psi) \\ \qquad + (A_1 B_2 - A_2 B_1)(z-\gamma), \\ Z = A_1(x-\varphi) + A_2(y-\psi) + z - \gamma. \end{cases}$$

Sur le plan normal à la courbe (1) et dont l'équation dans le nouveau système d'axes mobiles est

$$(5) \qquad Z = 0,$$

soit située une courbe

$$(6) \qquad f(X, Y) = 0.$$

Si nous substituons à X, Y leurs valeurs (4), nous aurons une équation contenant x, y, z, γ, et cette équation avec l'équation (5) nous représente, pour les valeurs successives de γ, les positions successives de la courbe plane. Il est sous-entendu que la substitution voulue par les équations (4) doit aussi être faite dans le premier membre de l'équation (5).

Si nous éliminons γ dans les deux équations (5) et (6) transformées, nous obtiendrons une équation résultante qui nous donnera la position générique de la courbe plane : c'est-à-dire la surface engendrée par son mouvement, qui n'est autre que la surface moulure dont elle est le profil. Comme on le voit, cette équation contient les différences partielles du second ordre des fonetions φ et ψ.

En faisant varier les fonctions f, φ, ψ, on a toutes les surfaces moulures.

GÉNÉRALISATION ET SOLUTION DE LA QUESTION 1593;

PAR M. LOUIS BOSI,
Professeur de Mathématiques au lycée de Chiavari (Italie).

On donne un triangle abc et deux points arbitraires p, q sur le plan abc. On trace une conique qui passe par p, q, a, elle coupe ab en c' et ac en b'. On trace une conique qui passe par p, q, b, c', elle coupe bc en a' et la première conique en i : les points p, q, c, a', b', i sont sur une même conique.

On prend un troisième point arbitraire O sur le plan abc. La droite Oa coupe en α la conique qui passe par a. La droite Ob coupe en β la conique qui passe par b. Enfin, sur la troisième conique on a γ à sa rencontre avec Oc.

Démontrer que les points p, q, O, α, β, γ, i sont sur une même conique.

Soient $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ les équations (en coordonnées cartésiennes ou en coordonnées homogènes) des droites $ba'c$, $cb'a$, $ac'b$; $A' = 0$, $B' = 0$, $C' = 0$ celles des droites $a'p$, $b'p$, $c'p$, et A_q, B_q, C_q, A'_q, B'_q, C'_q ce que deviennent les expressions A, B, C, A', B', C', quand on y remplace les coordonnées courantes par celles du point q : appelons X la conique qui passe par a, Y celle qui passe par b, Z la conique déterminée par les points p, q, c, a', b'.

La conique X appartient au faisceau déterminé par les points p, a, b', c' et passe par le point q; par conséquent son équation est

$$(1) \qquad BB'_q.C'C_q - B'B_q.CC'_q = 0 :$$

de même les coniques Y, Z qui appartiennent aux faisceaux déterminés par les points p, b, c', a' et p, c, a', b', et passent par le point q, auront pour équations

$$(2) \qquad CC'_q.A'A_q - C'C_q.AA'_q = 0,$$

$$(3) \qquad AA'_q.B'B_q - A'A_q.BB'_q = 0.$$

La forme des équations (1), (2), (3) nous montre que la conique Z passe par le point i commun aux X, Y. Donc les points p, q, c, a', b', i sont sur une même conique.

Considérons maintenant le triangle Oab : la conique X passe par p, q, a et coupe aO en α et ab en c'; Y passe par p, q, b, c' et coupe Ob en β et la première conique en i : il en résulte que les points $p, q, O, \alpha, \beta, i$ sont sur une même conique T. De même, en considérant le triangle Oac, on démontre que les points $p, q, O, \alpha, \gamma, i$ sont sur une même conique. Cette dernière conique rencontre T dans les cinq points p, q, O, α, i et par là elle doit coïncider avec T. Donc les points $p, q, O, \alpha, \beta, \gamma, i$ sont sur une même conique T.

Si nous supposons, en particulier, que p, q soient les points cycliques, les coniques X, Y, Z, T seront des circonférences : c'est le cas considéré dans la question 1593.

Si le point O est sur la droite pq, les points α, β, γ, i seront sur une même droite.

Supposons, en particulier, que p, q soient les points cycliques, c'est-à-dire que X, Y, Z soient trois circonférences : nous trouverons que trois droites parallèles quelconques tracées par les points a, b, c rencontrent respectivement les circonférences X, Y, Z en trois points α, β, γ qui sont sur une même droite avec i.

Note. — La même question a été résolue par M. Jean Dewulf, élève du lycée de Marseille; par M. Francisque Sondat, élève du lycée d'Annecy

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. d'Ocagne.

... La solution, insérée aux *Nouvelles Annales* (1890, p. 157), de la question 1566 est inexacte pour ce qui est de la seconde partie. Lorsque l'hyperbole est équilatère, le segment M_1M_2 ne se réduit nullement à zéro, mais devient *égal à l'axe transverse de l'hyperbole.*

L'erreur où est tombé l'auteur de la solution tient à ce que, en remarquant que le rapport $\frac{PM_1}{PM_2}$ devient égal à 1 dans le cas de l'hyperbole équilatère, il n'a pas pris garde que le point P étant alors rejeté à l'infini on ne pouvait conclure de là $PM_1 = PM_2$, mais bien $PM_1 - PM_2 =$ quantité finie. Un calcul facile montre que cette différence est égale, comme nous venons de le dire, à l'axe transverse de l'hyperbole équilatère.

DÉMONSTRATION DES FORMULES DE FRENET;

PAR M. J.-B. POMEY,
Ingénieur des Télégraphes, à Tours.

Les formules de Frenet relatives aux différentielles des cosinus directeurs de la tangente, de la normale et de la binormale en un point d'une courbe gauche peuvent s'obtenir aisément par les projections, de la manière suivante, qui n'a peut-être pas été publiée.

Soit

$$(1)\qquad \begin{cases} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda & \mu & \nu \end{cases}$$

le tableau des cosinus directeurs de la tangente, de la binormale et de la normale principale en un point M d'une courbe gauche. Prenons pour direction positive de la tangente celle des arcs s croissants, pour direction positive de la normale principale celle de la droite MO menée du point M au centre de courbure O, et pour direction positive de la binormale le sens tel que le déterminant formé par le tableau (1) soit égal à $+1$.

Soit k la courbure, ε l'angle de contingence, on aura

$$\varepsilon = k\, ds$$

et k sera considéré comme une grandeur absolue.

Soit τ la torsion, η l'angle de deux plans osculateurs infiniment voisins, on aura

$$\eta = \tau\, ds;$$

τ et η seront considérés comme positifs si la rotation d'un angle η autour de la tangente MT fait décrire au point O un élément de chemin OO_1 dans la direction positive de la binormale.

Soit M′ un point infiniment voisin de M. Négligeons les infiniment petits d'ordre supérieur au premier. La tangente MT étant la caractéristique du plan osculateur, le plan osculateur en M′ est le plan mené par MT qui fait avec le plan OMT un angle η. Soit OC l'axe du plan osculateur, le plan normal a OC pour caractéristique; donc le plan normal en M′ est le plan mené par OC qui fait avec le plan COM un angle égal à ε. L'intersection du plan osculateur et du nouveau plan normal est la nouvelle normale principale M′O′ qui coupe OC en un point O_1. Soit A l'origine des trois axes rectangulaires Ax, Ay, Az. Soient m, m' les points dont les coordonnées sont a, b, c et $a+da$, $b+db$, $c+cd$. On a $mm'=\varepsilon$ et mm' est parallèle à la normale principale MO et de même sens. En projetant sur Ax le contour Amm', on a

$$da = \lambda k \, ds.$$

Soient c et c' les points dont les coordonnées sont α, β, γ et $\alpha+d\alpha$, $\beta+d\beta$, $\gamma+d\gamma$. On a $cc'=\operatorname{mod}\eta$, et $c'c$ est parallèle à la normale principale MO; $c'c$ est dirigé suivant MO ou en sens contraire, suivant que η est positif ou négatif. En projetant sur Ax le contour Acc', on a

$$d\alpha = -\lambda\tau \, ds.$$

Projetons sur Ax le contour MOO_1M' et remarquons que OO_1 est dirigé suivant la binormale ou en sens contraire, selon que η est positif ou négatif, et il vient

$$d\lambda = \alpha\tau \, ds - ak \, ds.$$

Les autres formules de Frenet s'obtiennent en projetant les mêmes contours sur les autres axes de coordonnées.

FORMULE DE WARING;

PAR M. AURIC,
Ingénieur des Ponts et Chaussées, à Rochefort.

La formule de Waring exprime une fonction symétrique de la forme

$$\sum x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

en fonction des sommes des puissances semblables des éléments constituants, ces puissances étant elles-mêmes des sommes exclusives des exposants primitifs

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n.$$

Soient

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n$$

des nombres entiers positifs ou nuls, tels que

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n.$$

Partageons les n exposants en

λ_1 groupes de 1 exposant,
λ_2 groupes de 2 exposants,
. . . . ,
λ_n groupes de n exposants.

Posons

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = \nu$$

et soient

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \ldots, \quad \sigma_\nu$$

les sommes des exposants dans chaque groupe.

Considérons le produit

$$s_{\sigma_1} s_{\sigma_2} \cdots s_{\sigma_n}$$

et faisons toutes les permutations des exposants entre eux qui font acquérir à ce produit une valeur distincte, additionnons-les toutes et soit

$$T(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

la fonction des s, ainsi obtenue, qui est évidemment symétrique par rapport aux exposants.

Nous écrirons

$$(1) \qquad \sum x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} = \sum \mu \mathrm{T}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n),$$

μ étant un coefficient fonction de

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n,$$

qu'il s'agit de déterminer. Nous nous appuierons sur la formule évidente, identique,

$$\sum x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} = s_{\alpha_n} \sum x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} - \sum_{i=1}^{i=n-1} \sum x_1^{\alpha_1} \ldots x_i^{\alpha_i + \alpha_n} \ldots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}.$$

En adoptant la formule de représentation (1)

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum \mu \mathrm{T}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = {} & s_{\alpha_n} \sum \mu' \mathrm{T}(\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_{n-1}) \\ & - \sum_{i=1}^{i=n-1} \sum \mu' \mathrm{T}'(\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_{n-1}), \end{aligned} \right.$$

ceci est une identité; il n'y a aucune réduction possible dans le second membre, car le premier terme renferme toujours s_{α_n} et le deuxième toujours $s_{\alpha_i + \alpha_n}$; donc un terme quelconque dans le second membre doit trouver son égal dans le premier, et réciproquement.

Il faut toutefois remarquer que si, dans la fonction symétrique

$$\sum x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$$

développée suivant (1), on considère un groupe de j exposants (il s'en trouve λ'_j), quand on changera chacun de ces j exposants en

$$\alpha_i + \alpha_n, \quad \alpha_{i+1} + \alpha_n, \quad \ldots, \quad \alpha_{i+j-1} + \alpha_n,$$

on aura toujours le même résultat, c'est-à-dire qu'il sera répété j fois.

D'ailleurs pour égaliser terme à terme dans (2), il faut évidemment prendre pour les valeurs de

$$\lambda'_1, \quad \lambda'_2, \quad \lambda'_3, \quad \ldots, \quad \lambda'_{n-1},$$

soit

$$\lambda_{1-1}, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \ldots, \quad \lambda_{n-1}$$

dans le premier terme; soit

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \ldots, \quad \lambda_i + 1, \quad \lambda_{i+1} - 1, \quad \ldots, \quad \lambda_{n-1}$$

dans le deuxième terme.

Nous avons alors

$$(3) \qquad \mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n) = \mu(\lambda_1 - 1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}),$$

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n) \\ &\quad = - i\mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i + 1, \lambda_{i+1} - 1, \ldots, \lambda_{n-1}). \end{aligned} \right.$$

C'est de ces deux formules fondamentales que nous allons déduire la forme de μ. Suivons les transformations

$$\begin{aligned} \mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) &= (-i)\mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i + 1, \lambda_{i+1} - 1, \ldots, \lambda_{n-1}), \\ &= (-i)[-(i-1)]\mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{i-1} + 1, \lambda_i, \lambda_{i+1} - 1, \ldots, \lambda_{n-1}) \\ &= (-1^{i|1})\mu(\lambda_1 + 1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \lambda_{i+1} - 1, \ldots, \lambda_{n-1}) \\ &= (-1^{i|1})^{\lambda_{i+1}}\mu(\lambda_1 + \lambda_{i+1}, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, 0, \lambda_{i+2}, \ldots, \lambda_{n-1}) \\ &= (-1^{1|1})^{\lambda_2}(-1^{2|1})^{\lambda_3}\ldots(-1^{n-1|1})^{\lambda_n}\mu(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n, 0, 0, \ldots, 0) \text{ (1)}. \end{aligned}$$

---

(1) Nous adoptons la notation connue

$$a(a + r)(a + 2r)\ldots[a + (n-1)r] = a^{n|r}.$$

Mais

$$\mu(\lambda, 0, 0, 0, \ldots, 0) = \mu(\lambda - 1, 0, 0, \ldots, 0) = \mu(1, 0, 0, \ldots, 0) = 1;$$

donc

$$\mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = (-1^{1|1})^{\lambda_2}(-1^{2|1})^{\lambda_3} \ldots (-1^{n-1|1})^{\lambda_n}.$$

On met généralement ce résultat sous une autre forme. Le signe de μ est celui de

$$(-1)^{\lambda_2 + 2\lambda_3 + 3\lambda_4 + \cdots + (n-1)\lambda_n};$$

mais

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \ldots + n\lambda_n &= x, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \ldots + \lambda_n &= \nu : \end{aligned}$$

c'est donc le signe de

$$(-1)^{n-\nu}.$$

D'ailleurs, en groupant les facteurs, on a

$$\mu = (-1)^{n-\nu}(2)^{\lambda_3 + \lambda_4 \cdots + \lambda_n}(3)^{\lambda_4 + \lambda_5 + \cdots + \lambda_n} \ldots \\ (n-2)^{\lambda_{n-1} + \lambda_n}(n-1)^{\lambda_n}.$$

C'est d'ailleurs la forme à laquelle on arriverait en généralisant la formule fondamentale qui nous a servi de point de départ.

QUELQUES THÉORÈMES SUR LES COEFFICIENTS BINOMIAUX;

PAR M. J. TANO, à Rome.

J'indique par ρ une racine *primitive* de l'équation

$$x^n - 1 = 0,$$

et je considère la somme

$$\sum_{0}^{n-1}{}_{s} (1 - \rho^s)^m,$$

dans laquelle m est un entier positif quelconque; si, comme d'ordinaire, nous mettons

$$m_q = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-q+1)}{1.2.3\ldots q},$$

il est facile de voir qu'on a la relation suivante

$$\sum_{0}^{n-1}{}_s (1-\rho^s)^m = n - m_1 S_1 + m_2 S_2 - m_3 S_3 + \ldots$$
$$\pm m_n S_n \pm m_{n+1} S_{n+1} \pm \ldots + m_{2n} S_{2n} - \ldots,$$

ayant posé

$$S_r = 1 + \rho^r + \rho^{2r} + \rho^{3r} + \ldots + \rho^{(n-1)r}.$$

Or, il est connu que, si $r \equiv 0 (\text{mod } n)$, nous aurons $S_r = n$, et si r n'est pas $\equiv 0 (\text{mod } n)$, alors $S_r = 0$; par conséquent, si nous posons

$$\mu = \mathrm{E}\left(\frac{m}{n}\right),$$

c'est-à-dire, si μ indique le plus grand entier contenu dans le quotient $\frac{m}{n}$, nous aurons

$$\sum_{0}^{n-1}{}_s (1-\rho^s)^m = n(1 + m_n + m_{2n} + m_{3n} + \ldots + m_{\mu n})$$

si n est *pair*; tandis qu'on obtiendra

$$\sum_{0}^{n-1}{}_s (1-\rho^s)^m = n[1 - m_n + m_{2n} - m_{3n} + \ldots + (-1)^\mu m_{\mu n}]$$

si n est *impair*.

Cela étant, considérons l'équation

$$x^3 - 1 = 0,$$

par elle on aura

$$1-\rho=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right),$$

$$1-\rho^2=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right),$$

et, par le théorème de Moivre, on a

$$(1-\rho)^m+(1-\rho^2)^m=2.3^{\frac{m}{2}}\cos m\frac{\pi}{6}.$$

Supposons en premier lieu $m\equiv\pm 1 \pmod{12}$, on aura évidemment

$$2.3^{\frac{m}{2}}\cos m\frac{\pi}{6}=+3^{\frac{m+1}{2}};$$

au contraire, $m\equiv\pm 5 \pmod{12}$, on a

$$2.3^{\frac{m}{2}}\cos m\frac{\pi}{6}=-3^{\frac{m+1}{2}};$$

de manière que, en supposant que le symbole $\left(\frac{3}{m}\right)$ ait le même sens que lui a attribué Jacobi, on pourra poser

$$(1)\quad m_0-m_3+m_6-m_9+\ldots+(-1)^\mu m_{3\mu}=\left(\frac{3}{m}\right)3^{\frac{m-1}{2}}.$$

Supposons maintenant m pair; dans ce cas, si nous avons $m\equiv 0 \pmod 6$, nous aurons

$$(2)\quad \frac{1}{2}[m_0-m_3+m_6-m_9+\ldots+(-1)^\mu m_{3\mu}]=(-1)^{\frac{m}{6}}3^{\frac{m-2}{2}},$$

et si m n'est pas $\equiv 0 \pmod 6$, on a évidemment

$$(3)\quad m_0-m_3+m_6-m_9+\ldots+(-1)^\mu m_{3\mu}=(-1)^{\frac{m-2}{2}}3^{\frac{m-2}{2}}.$$

Considérons à présent l'équation

$$x^4-1=0.$$

nous aurons

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$1 - i^3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

par conséquent,

$$(1 - i)^m + (1 - i^3)^m = 2 . 2^{\frac{m}{2}} \cos m\frac{\pi}{4};$$

si donc nous supposons $m \equiv 2 \pmod 4$, on aura

$$(4) \qquad m_0 + m_4 + m_8 + m_{12} + \ldots + m_{4\mu} = 4^{\frac{m-2}{2}}.$$

Enfin, observant que les nombres gaussiens, c'est-à-dire les nombres premiers de la forme $2^h + 1$, ne peuvent être que de la forme $12K + 5$, si nous indiquons par p un nombre gaussien, nous avons de l'expression (1) la congruence

$$3^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p.$$

Cette congruence démontre très simplement le théorème suivant dû à Richelot : *Le nombre* 3 *est racine primitive des nombres gaussiens* (¹).

SUR LA MÉTHODE D'APPROXIMATION DE NEWTON;

PAR M. G. FOURET,

Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

1. L'application de la méthode si ingénieuse et si simple, imaginée par Newton, pour calculer par approxi-

(¹) RICHELOT, *De resolutione algebraica æquationis* $x^{257} = 1$ (*Journal de Crelle,* t. 9).

mations successives les racines des équations, s'est pendant longtemps heurtée à une sérieuse difficulté, consistant en ce que les résultats qu'on en déduisait pouvaient, suivant les cas, s'approcher ou s'éloigner de la racine cherchée. Il était donc indispensable d'en régulariser l'usage, en précisant les conditions dans lesquelles on peut l'employer utilement et à coup sûr. Fourier ([1]) a résolu la question, en indiquant un ensemble de caractères auxquels, dans chaque cas, on reconnaît d'avance que la méthode de Newton fournira une suite de valeurs s'approchant de plus en plus de la racine et dans le même sens. La règle de Fourier peut s'énoncer ainsi :

Étant donnée une équation

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

dont une racine réelle et une seule est comprise entre les deux nombres réels a *et* b, *pour que la méthode de Newton permette de calculer sûrement et régulièrement cette racine par approximations successives, il suffit que les deux premières dérivées de* $f(x)$ *ne s'annulent pour aucune valeur de* x, *dans l'intervalle limité par* a *et* b.

La formule de correction s'applique alors à celle des deux limites qui, substituée à x *dans* $f(x)$ *et* $f''(x)$, *donne des résultats de même signe.*

2. Cette règle est précise, mais elle a l'inconvénient d'être trop restrictive. La condition qu'elle impose à $f'(x)$ de ne pas s'annuler, dans l'intervalle qui comprend la racine, n'a pas sa raison d'être, et a disparu de l'exposé que l'on donne généralement aujourd'hui de la mé-

---

([1]) *Bulletin de la Société philomathique de Paris*, année 1818, p. 61 à 67. *Analyse des équations déterminées* (1831), p. 157 à 220.

thode de Newton [1]. Cette restriction n'est pas d'ailleurs la seule qui soit superflue, et comme il importe de laisser à un procédé de calcul aussi précieux le plus vaste champ d'applications possible, nous allons chercher *quelles sont les conditions strictement nécessaires et suffisantes pour que, en partant d'une valeur plus ou moins approchée d'une racine d'une équation, on obtienne, par l'application répétée de la méthode de Newton, une suite de valeurs s'approchant de plus en plus de cette racine, et toujours dans le même sens.*

Nous arriverons à cette conclusion : *L'équation à résoudre étant écrite sous la forme de l'équation* (1), *il faut et il suffit que la substitution de la valeur initiale dans* $f(x)$ *et* $f''(x)$ *donne des résultats de même signe, et que* $f''(x)$ *ne change pas de signe, lorsque* x *varie de cette valeur à la racine cherchée* [2].

Si donc, a et b étant deux limites qui comprennent la racine cherchée α, les conditions que nous venons d'indiquer sont remplies pour l'une des limites a, la correction de Newton sera applicable aux valeurs de x comprises entre a et α, lors même que $f(x)$, $f'(x)$ ou $f''(x)$ s'annuleraient, quand x varie de α à b. On remarquera notamment que la racine cherchée peut être indifféremment simple ou multiple, et qu'il n'est pas absolument indispensable d'en avoir opéré préalablement la sépara-

---

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. VIII (1869), p. 17 à 27 : *Sur la méthode d'approximation de Newton*, par M. Darboux.

[2] En publiant la présente Note, je n'ai aucunement la prétention de revendiquer la priorité des idées qui y sont exposées. Mon seul but est de contribuer à répandre, au sujet de la méthode d'approximation de Newton, des notions plus larges, et d'ailleurs tout aussi précises que celles qui ont généralement cours dans l'enseignement.

tion. En écartant ces restrictions théoriquement inutiles, on évitera, dans bien des cas, des difficultés souvent insurmontables au point de vue pratique, consistant à débarrasser une équation telle que (1) de ses racines multiples, et de trouver, pour chaque racine simple de cette équation, un intervalle qui n'en renferme pas d'autre, et dans lequel $f''(x)$ ne change pas de signe.

3. Soit

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

une équation, algébrique ou transcendante, à coefficients réels.

Supposons que, pour les valeurs de x variant de a à α inclusivement, la fonction $f(x)$ et ses deux premières dérivées $f'(x)$ et $f''(x)$ soient bien déterminées, et qu'en outre $f(x)$ et $f'(x)$ soient continues. On a, d'après la formule de Taylor, pour toute valeur de x comprise dans cet intervalle

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(x) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(z),$$

z désignant un nombre, variable avec x, compris entre a et x. On conclut de là, $f(\alpha)$ étant nul par hypothèse,

$$f(a) + (\alpha - a)f'(a) + \frac{(\alpha-a)^2}{2} f''(\zeta) = 0,$$

ζ étant un nombre compris entre a et α, mais dont on ignore la valeur.

Supposons

$$f'(a) \neq 0.$$

De la dernière relation on déduit

$$\alpha = a - \frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{(\alpha-a)^2}{2} \frac{f''(\zeta)}{f'(a)}. \tag{2}$$

La méthode d'approximation de Newton consiste à prendre pour nouvelle valeur approchée de la racine cherchée

$$(3) \qquad a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Cherchons à quelles conditions le nombre a_1 sera plus approché que a de la racine α.

Deux hypothèses sont à distinguer : a peut être inférieur ou supérieur à α. Nous raisonnerons, en supposant $a < \alpha$. Le cas où l'on aurait $a > \alpha$ se traiterait d'une manière toute semblable et conduirait aux mêmes conclusions. Nous montrerons d'ailleurs comment, par un artifice bien simple, on ramène ce second cas au premier.

Pour que a_1 diffère moins de α que a, il faut évidemment tout d'abord que a_1 soit supérieur à a, et par conséquent, d'après la relation (3), que $f(a)$ et $f'(a)$ aient des signes contraires, c'est-à-dire que l'on ait

$$(4) \qquad f(a)f'(a) < 0.$$

Cette condition est nécessaire; mais elle ne suffit pas pour que la méthode de Newton s'emploie avec avantage. Il pourrait arriver en effet, la condition (4) étant cependant remplie, que a_1 surpassât α, et à tel point que $a_1 - \alpha$ fût supérieur à $\alpha - a$. C'est ce qui aurait lieu si, dans la relation (2), la valeur de $\frac{f''(\zeta)}{f'(a)}$ était positive et suffisamment grande. En pareil cas a_1 serait moins approché de α par excès que ne l'est a par défaut, et, en appliquant la méthode de Newton, on s'éloignerait du but à atteindre. D'ailleurs, en raison de l'incertitude relative à la valeur absolue de $f''(\zeta)$, on ne voit pas, dans le cas ou $\frac{f''(\zeta)}{f'(a)}$ serait positif, comment on reconnaîtrait que le nombre $\frac{(\alpha - a)^2}{2}\frac{f''(\zeta)}{f'(a)}$ est assez petit pour que $a_1 - \alpha$ soit inférieur à $\alpha - a$. Il s'ensuit que l'on ne pourra employer la méthode de Newton en toute sûreté qu'autant que $\frac{f''(\zeta)}{f'(a)}$ sera négatif. Mais le signe de $f''(\zeta)$ sera inconnu, toutes les fois que $f''(x)$ changera de signe pour une ou plusieurs valeurs de x comprises entre a et α. De là résulte la nécessité de limiter l'usage de la méthode aux cas où $f''(x)$ conserve le même signe dans l'intervalle de a à α, c'est-à-dire au cas où cet intervalle ne comprend aucune racine, ou tout au moins ne renferme que des racines d'un ordre pair de multiplicité de l'équation

$$f''(x) = 0.$$

Dans cette hypothèse, $f''(\zeta)$ ayant le même signe que $f''(a)$, la condition nécessaire et suffisante pour que $\frac{f''(\zeta)}{f'(a)}$ soit négatif peut s'écrire

$$f'(a)f''(a) < 0. \tag{5}$$

Comparons les inégalités (4) et (5) : on voit que, pour qu'elles soient vérifiées, il faut et il suffit : 1° que $f(a)$ et $f''(a)$ aient le même signe ; 2° que $f'(a)$ ne soit pas nul et ait un signe différent.

4. On peut voir d'ailleurs que les conditions relatives à $f'(x)$ sont une conséquence de celles qui doivent être remplies par $f(x)$ et $f''(x)$. C'est ce qui résultera de la proposition suivante que nous allons démontrer :

Si $f''(x)$ a le même signe que $f(x)$, pour $x = a$, et conserve ce signe pour toutes les valeurs de x comprises entre a et α, la dérivée $f'(x)$ ne s'annule pour aucune de ces valeurs intermédiaires, ni pour $x = a$, et le signe *constant, dont elle est affectée dans l'intervalle, est différent du signe de $f(x)$ et de $f''(x)$.*

En effet, quand x croît de a à α, la fonction $f'(x)$ varie constamment dans le même sens, puisque sa dérivée $f''(x)$ ne change pas de signe. Il ne saurait en conséquence exister entre a et α plus d'une valeur de x annulant $f'(x)$. D'ailleurs, on peut toujours choisir un nombre η assez petit, pour que l'équation

$$f'(x) = 0 \tag{6}$$

n'ait pas de racine entre $x = \alpha - \eta$ et $x = \alpha$, et pour que l'on ait par conséquent [1]

$$f(\alpha - \eta) f'(\alpha - \eta) < 0, \tag{7}$$

Mais $f''(\alpha - \eta)$ et $f(\alpha - \eta)$ ayant, par hypothèse, le même signe, on déduit de l'inégalité précédente

$$f'(\alpha - \eta) f''(\alpha - \eta) < 0,$$

et cette inégalité indique qu'il ne saurait y avoir de racine de l'équation (6) entre $\alpha - \eta$ et la plus grande des racines simples, ou d'un ordre impair de multiplicité, inférieures à ce nombre, que peut admettre l'équation $f''(x) = 0$, c'est-à-dire, en définitive et *a fortiori*, entre $\alpha - \eta$ et a inclusivement.

La dérivée $f'(x)$ ne s'annule donc ni pour $x = a$, ni pour aucune valeur de x comprise entre a et α. Par

---

[1] Nous avons recours ici à une double propriété bien connue et souvent utilisée des fonctions, qui consiste en ce que, *dans les intervalles pour lesquels une fonction est continue et bien déterminée ainsi que sa dérivée $f'(x)$, un nombre substitué à x dans $f(x)$ et $f'(x)$ donne des résultats de signes contraires (de même signe), si entre ce nombre et la racine de $f(x) = 0$, qui lui est immédiatement supérieure (inférieure), il n'y a pas de racine de $f'(x) = 0$, ou s'il en existe un nombre pair.*

suite $f'(x)$ a un signe invariable, pour toutes ces valeurs de x, et ce signe, d'après l'inégalité (7), est différent de celui de $f(\alpha - \eta)$, c'est-à-dire du signe commun à $f(a)$ et à $f''(a)$. C'est ce qu'il s'agissait de démontrer.

5. Nous avons raisonné dans l'hypothèse où a est inférieur à α. Il est facile d'étendre les conclusions de notre raisonnement au cas où a serait supérieur à α. Considérons dans ce but l'équation

$$(8) \qquad g(y) \equiv f(-y) = 0.$$

Elle admet la racine $y = -\alpha$, et comme, par hypothèse, $-a$ est inférieur à $-\alpha$, nous pouvons appliquer à la nouvelle équation les conclusions auxquelles nous sommes arrivés précédement, c'est-à-dire que l'on pourra appliquer avantageusement, et en toute sûreté, la correction de Newton à la valeur approchée $-a$, si $g(-a)$ et $g''(-a)$ ont le même signe, et si $g(y)$ ne change pas de signe, quand y varie de $-a$ à $-\alpha$. On obtiendra ainsi une nouvelle valeur de la racine $-a_1$, plus approchée que $-a$, et dans le même sens, à savoir

$$-a_1 = -a - \frac{g(-a)}{g'(-a)}.$$

Or on déduit de là

$$(3) \qquad a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)},$$

en remarquant que l'on a

$$g(-a) \equiv f(a), \qquad g'(-a) \equiv -f'(a).$$

Par suite le nombre a_1, donné par la formule (3), et compris entre a et α, puisque $-a_1$ est compris entre $-a$ et $-\alpha$, sera une valeur approximative de la racine α de l'équation (1), plus approchée que a et dans le même sens.

D'ailleurs, en remarquant que l'on a

$$g''(y) \equiv f''(-y),$$

on voit que dans le second cas ($a > \alpha$) comme dans le premier ($a < \alpha$), les conditions d'application de la méthode d'approximation sont que $f(a)$ et $f''(a)$ aient le même signe, et que $f''(x)$ ne change pas de signe, quand x variera de a à α.

6. Nous pouvons donc énoncer, dans toute sa généralité, la règle suivante [1] :

Si le nombre a est une première valeur approximative d'une racine α de l'équation

$$(1) \qquad f(x) = 0,$$

le nombre

$$(3) \qquad a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)},$$

sera une nouvelle valeur approximative de la même racine, plus approchée que la première, et dans le même sens, toutes les fois que $f(a)$ et $f''(a)$ auront le même signe, et que $f''(x)$ ne changera pas de signe, quand x variera de a à la racine cherchée α [2].

Après avoir calculé le nombre a_1 par défaut, on en déduira, par la même méthode, un nouveau nombre

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)},$$

---

[1] Il est facile d'interpréter géométriquement le résultat auquel nous sommes parvenu : nous laissons ce détail de côté.

[2] Il est bien clair que nous aurions pu établir cette règle par une voie plus courte; mais nous n'aurions pas atteint le but que nous nous étions fixé, qui était de trouver quelles sont les conditions, aussi peu restrictives que possible, dans lesquelles la méthode de Newton peut s'appliquer.

plus approché que a_1 de la racine cherchée, et dans le même sens, et, en continuant ainsi, on obtiendra une suite de nombres $a_1, a_2, a_3, \ldots$ s'approchant de plus en plus, et dans le même sens, de la racine cherchée.

Remarquons en effet que les résultats de la substitution de l'un quelconque de ces nombres dans $f(x)$ et $f''(x)$ ont le même signe, à savoir le signe commun à $f(a)$ et à $f''(a)$. D'ailleurs $f''(x)$ conservant le même signe, quand x varie de ce nombre à α, chacun des nombres $a_1, a_2, a_3, \ldots$ remplit bien les conditions requises pour s'approcher de la racine cherchée plus que celui qui le précède, et dans le même sens que lui.

7. *Convergence des résultats obtenus.* — Il est facile de démontrer que la suite des nombres $a, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$ obtenus au moyen de la formule (3) a pour limite la racine α, et que l'on peut, en conséquence, par la méthode de Newton, approcher, autant qu'on le veut, de la valeur exacte de cette racine.

En effet, les nombres $a, a_1, a_2, \ldots a_n, a_{n+1}, \ldots$ forment une suite de nombres croissants et inférieurs à α, ou bien une suite de nombres décroissants et supérieurs à α. Par suite, dans un cas comme dans l'autre, ils tendent vers une limite λ.

On a d'ailleurs, d'une manière générale,

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{f(a_n)}{f'(a_n)}.$$

On tire de là

$$-f(a_n) = (a_{n+1} - a_n) f'(a_n).$$

La valeur absolue de $f(a_n)$ sera moindre qu'un nombre positif δ, choisi aussi petit que l'on veut, si l'on a

$$\operatorname{mod} f'(a_n) \operatorname{mod}(a_{n+1} - a_n) < \delta,$$

et, *a fortiori*,

$$\mu \bmod(a_{n+1} - a_n) < \delta,$$

μ désignant la plus grande valeur absolue que prenne $f'(x)$, quand x varie de a à α, c'est-à-dire la valeur absolue de $f'(a)$, puisque, en vertu des hypothèses, la valeur absolue de $f'(x)$ décroît constamment dans l'intervalle considéré.

Or la dernière inégalité peut s'écrire

$$\bmod(a_{n-1} - a_n) < \frac{\delta}{\mu},$$

et, en raison même de l'existence de la limite λ, on peut choisir l'entier n, de façon que la valeur absolue de la différence $a_{n+1} - a_n$ soit moindre que toute quantité donnée. La suite des nombres $f(a), f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n), f(a_{n+1}), \ldots$ a donc pour limite zéro, et par conséquent la suite $a, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$ a pour limite la racine cherchée α.

8. *Limite de l'erreur afférente à la correction de Newton.* — D'après la relation (2), on a

$$\alpha - a_{n+1} = \alpha - a_n + \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} = -\frac{(\alpha - a_n)^2}{2} \frac{f''(\zeta_n)}{f'(a_n)},$$

ζ_n étant un nombre compris entre a_n et α.

Pour avoir une limite supérieure de l'erreur commise, en prenant a_{n+1} comme valeur approchée de la racine α, remplaçons, dans $\frac{(\alpha - a_n)^2}{2} \frac{f''(\zeta_n)}{f'(a_n)}$, $f'(a_n)$ et $f''(\zeta_n)$ respectivement par un nombre m inférieur à la plus petite des valeurs absolues que prend $f'(x)$ [1], et par un

[1] La plus petite de ces valeurs absolues correspond, en vertu des hypothèses, à $x = \alpha$.

nombre M égal ou supérieur à la plus grande des valeurs absolues que prend $f''(x)$, quand x varie de a à α inclusivement. Pour obtenir des limites supérieures $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}, \ldots$ des erreurs commises en prenant respectivement $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$ comme valeurs approchées de la racine α, on fera usage de la relation

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{M}{2m} \varepsilon_n^2,$$

que l'on peut écrire

$$\varepsilon_{n+1} = k\varepsilon_n^2, \tag{9}$$

en désignant par k un nombre positif, que l'on calculera une fois pour toutes, et qui ne changera pas, quand on évaluera successivement $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}, \ldots$. On aura en particulier pour commencer

$$\varepsilon_1 = k\varepsilon^2, \tag{10}$$

ε étant une limite supérieure de l'erreur commise, en considérant a comme valeur approchée de α.

9. On n'applique habituellement la méthode d'approximation de Newton au calcul d'une racine α d'une équation $f(x) = 0$ qu'après avoir séparé cette racine, c'est-à-dire après avoir trouvé deux nombres a et b qui la comprennent et n'en comprennent pas d'autre. Supposons cette opération préliminaire effectuée. Si l'on a constaté de plus que $f''(x)$ ne change pas de signe, quand x varie d'une manière continue de a à b, il est évident qu'il y aura nécessairement une de ces valeurs limites qui, substituée à x dans $f(x)$ et $f''(x)$, donnera des résultats de même signe. Les conditions précédemment établies (§ 6) étant remplies, en appliquant la correction de Newton à cette limite, on sera certain d'en

déduire une nouvelle valeur de la racine, plus approchée, et dans le même sens, que celle dont on sera parti. Telles sont les circonstances les plus ordinaires dans lesquelles on emploie la méthode de Newton. Voyons comment on peut en étendre l'usage.

1° Supposons que l'on sache qu'entre deux nombres a et b se trouvent deux racines α et β de l'équation à résoudre. Il sera souvent difficile, dans le cas où α et β différeront très peu, de séparer ces racines. Mais, en pareil cas, on pourra sans inconvénient se dispenser de cette recherche. Supposons que les nombres a, α, β, b se succèdent par ordre de grandeurs croissantes. Après avoir reconnu, par exemple, que $f(a)$ et $f''(a)$ ont le même signe, il suffira de constater que $f''(x)$ ne change pas de signe, lorsque x varie de a à α. En effet, on pourra dès lors appliquer, en toute sûreté, la correction de Newton à la limite a (§ 6) et approcher autant qu'on le voudra de la racine α, en se rendant compte du degré d'approximation obtenu, à l'aide des formules (9) et (10). Il pourra même arriver fréquemment que, pour des raisons analogues à celles que nous venons d'indiquer, la méthode de Newton soit en même temps applicable à la seconde limite b, et permette de calculer la racine β par approximations successives.

2° Il n'est pas nécessaire que la racine, pour laquelle on applique la méthode de Newton, soit simple : elle peut être double, triple, et généralement d'un ordre de multiplicité quelconque, pourvu que les conditions énoncées plus haut (§ 6) soient remplies relativement à la valeur approchée de cette racine, qui sert de point de départ dans le calcul. Il arrivera même souvent, lorsqu'une pareille racine sera séparée, que l'on pourra appliquer la correction de Newton à chacune des deux limites.

10. En un mot, étant donnée une équation $f(x) = 0$, pour appliquer utilement et sûrement la méthode d'approximation de Newton au calcul d'une de ses racines, que l'on sait être comprise entre deux nombres a et b, non seulement il sera toujours inutile, contrairement à ce qui est encore prescrit par quelques auteurs, de constater préalablement que $f'(x)$ ne change pas de signe dans l'intervalle; mais, toutes les fois que l'on pourra s'assurer que les conditions énoncées plus haut (§ 6) sont remplies pour l'une des limites a et b, il sera absolument indifférent que la racine cherchée soit simple ou multiple, que l'intervalle (a, b) contienne une ou plusieurs autres racines, enfin que la dérivée seconde s'annule pour une ou plusieurs valeurs de x comprises entre la racine cherchée et celle des deux limites à laquelle on n'applique pas la correction de Newton. Cette correction, appliquée à l'autre limite, donnera, avec l'approximation que l'on voudra, celle des racines, contenues dans l'intervalle (a, b), qui diffère le moins de cette limite.

Il ne faut pas se dissimuler toutefois que l'emploi de la méthode de Newton, dans les conditions que nous avons fait connaître (§ 6), pourra, dans certains cas, rencontrer une difficulté sérieuse, provenant de la nécessité de s'assurer que $f''(x)$ ne change pas de signe, pour les valeurs comprises entre la racine que l'on ne connaît pas et la valeur approchée de cette racine, qui doit servir de point de départ au calcul. Nous allons montrer, sur quelques exemples, comment on pourra, dans bien des cas, résoudre la difficulté que nous venons de signaler.

11. *Premier exemple.* — Lorsqu'une équation algébrique entière a toutes ses racines réelles, on peut appliquer en toute sûreté la correction de Newton à une

limite supérieure des racines, pour calculer la plus grande de ces racines ([1]). Les approximations pourront d'ailleurs converger aussi rapidement que l'on voudra, puisque l'on peut dans ce cas, comme chacun sait, déterminer, d'après une règle due à Newton, une limite supérieure des racines, différant, aussi peu qu'on le veut, de la plus grande d'entre elles.

Lorsqu'une équation algébrique entière a toutes ses racines réelles, on peut également appliquer, avec un avantage certain, la méthode d'approximation de Newton au calcul de la plus petite racine, en partant d'une limite inférieure des racines ([1]).

12. *Second exemple.* — Soit

$$f(x) = 0. \tag{11}$$

une équation algébrique entière, dont le premier membre, supposé ordonné, est de la forme

$$f(x) \equiv \varphi(x) - \psi(x);$$

$\varphi(x)$ et $\psi(x)$ désignent des polynômes entiers, dont tous les termes sont positifs.

L'équation (11), ainsi écrite, ne présentant qu'une variation, n'admet qu'une racine positive. Soit α cette racine. Lorsque x croît à partir de α, la fonction $f(x)$ est constamment croissante, et sa dérivée

$$f'(x) \equiv \varphi'(x) - \psi'(x),$$

est par suite constamment positive. Comme d'ailleurs cette dérivée ordonnée ne présente qu'une variation, elle ne

---

([1]) On trouvera la démonstration de cette question de Laguerre dans les *Leçons d'Algèbre* de M. Amigues, p. 515.

peut s'annuler pour plus d'une valeur positive α' (¹) de x, qui est nécessairement inférieure à α.

Un raisonnement identique montre que

$$f''(x) = \varphi''(x) - \psi''(x)$$

ne peut s'annuler pour plus d'une valeur positive α'' (¹) de x, qui est inférieure à α', et à plus forte raison à α.

On conclut de là que les conditions strictement nécessaires et suffisantes, pour l'application de la méthode de Newton (§ 6), se trouveront remplies pour tout nombre supérieur à la plus grande racine de l'équation (11), et si ce nombre ne diffère pas trop de cette racine, on pourra, en le prenant comme premier terme d'une série d'approximations successives, s'approcher rapidement, et aussi près qu'on le voudra, de la racine cherchée.

Cet exemple d'un cas, qui se présente souvent dans la pratique, nous paraît très propre à montrer l'intérêt qui s'attache à laisser à la méthode d'approximation de Newton la plus grande portée possible. Dans bien des cas, en effet, α' et α'', tout en étant inférieurs à α, pourront en différer tellement peu qu'il serait extrêmement difficile, pour ne pas dire impossible, de trouver une limite inférieure de la racine cherchée α qui fût supérieure à α''. Or en s'assujettissant en pareil cas à la règle de Fourier, on se priverait, souvent bien à tort, de l'approximation que donne alors avec certitude la méthode de Newton. La même observation s'applique à l'exemple suivant.

13. *Troisième exemple.* — Soit à résoudre l'équa-

(¹) Cette racine positive α' existe, si $\psi'(x)$ ne se réduit pas identiquement à zéro. Une observation analogue s'applique plus loin à α''.

tion

$$(12) \qquad e^{\alpha x} - k e^{-\beta x} = 0,$$

α, β et k étant des nombres positifs.

Posons

$$f(x) = e^{\alpha x} - k e^{-\beta x}.$$

On en déduit

$$f'(x) = \alpha\, e^{\alpha x} + k\beta\, e^{-\beta x},$$
$$f''(x) = \alpha^2 e^{\alpha x} - k\beta^2 e^{-\beta x}.$$

L'équation (12) a une racine réelle et une seule. En effet $f(-\infty)$ est négatif, $f(+\infty)$ est positif, et, $f'(x)$ étant constamment positif, $f(x)$ croît constamment, quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

L'équation

$$(13) \qquad \alpha^2 e^{\alpha x} - k\beta^2 e^{-\beta x} = 0,$$

étant de même forme que l'équation (12), a comme elle une racine réelle et une seule. Or il peut arriver que les racines des équations (12) et (13) diffèrent très peu. On pourrait même choisir α et β, de manière que ces deux racines diffèrent aussi peu qu'on le voudrait : la racine de l'équation (13) se rapproche en effet indéfiniment de celle de l'équation (12), lorsque le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ tend vers l'unité. Il sera donc impraticable, dans bien des cas, de trouver deux nombres qui comprennent la racine de l'équation (12) sans comprendre celle de l'équation (13) ; et cependant, contrairement à la stricte interprétation de la règle de Fourier, il sera possible de faire subir la correction de Newton à l'un de ces nombres, et il sera toujours facile, comme on va le voir, de reconnaître celui de ces nombres auquel il conviendra de l'appliquer.

Soient a et $b > a$ deux nombres comprenant la racine p de l'équation (12) et la racine q de l'équation (13), de telle sorte que l'on ait

$$f(a) < 0, \qquad f''(a) < 0, \qquad f(b) > 0, \qquad f''(b) > 0.$$

De l'identité

$$e^{\alpha p} - ke^{-\beta p} = 0$$

tirons la valeur de $e^{-\beta p}$ et portons-la dans $f''(p)$. On obtient

$$f''(p) \equiv (\alpha^2 - \beta^2) e^{\alpha p}.$$

Dans le cas où α est inférieur à β, $f''(p)$ est négatif, q est par suite compris entre p et b, et la correction de Newton s'applique à la limite a.

On voit de même que, quand α est supérieur à β, la méthode de Newton est applicable à la limite b.

14. *Quatrième exemple.* — Considérons l'équation

$$(14) \qquad x + \sin x + \operatorname{tang} x = 0,$$

qui a une racine nulle, et dont toutes les autres sont deux à deux égales et de signes contraires. Occupons-nous exclusivement des racines positives et posons

$$f(x) \equiv x + \sin x + \operatorname{tang} x.$$

On déduit de là

$$f'(x) \equiv 1 + \cos x + \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$f''(x) \equiv \frac{\operatorname{tang} x (2 - \cos^3 x)}{\cos^2 x}.$$

La première dérivée $f'(x)$ est toujours positive, car $1 + \frac{1}{\cos^2 x}$ étant toujours supérieur à l'unité est, à plus forte raison, supérieur en valeur absolue à $\cos x$. La fonction $f(x)$ est par suite constamment croissante. D'ailleurs, en désignant par h un entier quelconque et par

η un nombre positif suffisamment petit, on voit que, pour $x=(2h-1)\frac{\pi}{2}+\eta$, $f(x)$ aura le signe de $\tang x$ et sera négatif, tandis que pour $x=(2h+1)\frac{\pi}{2}-\eta$, $f(x)$, ayant encore le signe de $\tang x$, sera positif. On conclut de là que l'équation (14) a une racine réelle et une seule dans chacun des intervalles limités par $(2h-1)\frac{\pi}{2}$ et $(2h+1)\frac{\pi}{2}$, que l'on obtient en remplaçant successivement h par tous les nombres entiers positifs.

On voit de plus que la racine α, correspondant à une valeur déterminée et positive de h, est comprise entre $(2h-1)\frac{\pi}{2}$ et $h\pi$, car $f(h\pi)$ est égal à $h\pi$ et par conséquent positif, alors que $f(x)$, pour $x=(2h-1)\frac{\pi}{2}+\eta$, est négatif.

D'autre part $f''(x)$ ne s'annule, dans l'intervalle considéré, que pour $x=h\pi$, et est négative comme $\tang x$, quand x varie de $(2h-1)\frac{\pi}{2}+\eta$ à $h\pi$. Par conséquent (§ 6), c'est à une limite inférieure de chacune des racines cherchées qu'il conviendra d'appliquer la correction de Newton. On voit aisément d'ailleurs que la racine cherchée, pour chaque valeur de h, diffère peu de $(2h-1)\frac{\pi}{2}$ et en diffère d'autant moins que h est plus grand. La limite inférieure, à laquelle on appliquera la correction de Newton, devra donc être prise peu supérieure à $(2h-1)\frac{\pi}{2}$.

CONTACT DE DEUX QUADRIQUES;

PAR M. E. CARVALLO,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique ([1]).

I. — CONDITIONS DE SIMPLE CONTACT.

Je considère deux quadriques dont les équations homogènes sont

$$(1)\quad \begin{cases} 0 = f(x, y, z, t) \\ \quad = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ \qquad + 2Cxt + 2C'yt + 2C''zt + Dt^2, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} 0 = \varphi(x, y, z, t) \\ \quad = \alpha x^2 + \alpha' y^2 + \alpha'' z^2 + 2\beta yz + 2\beta' zx + 2\beta'' xy \\ \qquad + 2\gamma xt + 2\gamma' yt + 2\gamma'' zt + \delta t^2. \end{cases}$$

Pour qu'elles soient tangentes au point (x, y, z, t), il faut et il suffit que ce point appartienne aux deux surfaces et qu'en ce point les plans tangents coïncident, c'est-à-dire que les variables x, y, z, t satisfassent aux équations (1), (2) et aux équations

$$(3)\qquad \frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_y}{\varphi'_y} = \frac{f'_z}{\varphi'_z} = \frac{f'_t}{\varphi'_t} = -\lambda.$$

Je puis supprimer l'équation (1) qui est une conséquence des équations (2) et (3) et chasser les dénominateurs des équations (3). Ainsi, pour que les quadriques soient tangentes en un point, il faut et il suffit que, pour une valeur convenable de λ, les coordonnées de ce point sa-

([1]) La méthode suivie est inspirée par la très intéressante discussion de l'intersection des coniques par M. Darboux.

tisfassent aux équations

$$\varphi(x, y, z, t) = 0, \tag{2}$$

$$\left\{\begin{aligned} f'_x + \lambda\varphi'_x &= 0,\\ f'_y + \lambda\varphi'_y &= 0,\\ f'_z + \lambda\varphi'_z &= 0,\\ f'_t + \lambda\varphi'_t &= 0. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Les équations (3) sont linéaires homogènes en x, y, z, t. Pour qu'elles admettent une solution unique pour les rapports de ces variables, il faut que λ soit racine de l'équation

$$0 = \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} A + \alpha\lambda & B'' + \beta''\lambda & B' + B'\lambda & C + \gamma\lambda \\ \dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots \end{vmatrix} = 0, \tag{4}$$

et que les déterminants mineurs de Δ ne soient pas tous nuls. Dès lors, des équations (3) on tire pour x, y, z, t des valeurs proportionnelles à ces déterminants mineurs, savoir

$$\left\{\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \frac{y}{b''} = \frac{z}{b'} = \frac{t}{c},\\ \frac{x}{b''} &= \frac{y}{a'} = \frac{z}{b} = \frac{t}{c'},\\ \frac{x}{b'} &= \frac{y}{b} = \frac{z}{a''} = \frac{t}{c''},\\ \frac{x}{c} &= \frac{y}{c'} = \frac{z}{c''} = \frac{t}{d}, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

d'où l'on déduit, en multipliant les quatre lignes respectivement par x, y, z, t,

$$\frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{a'} = \frac{z^2}{a''} = \frac{yz}{b} = \frac{zx}{b'} = \frac{xy}{b''} = \frac{xt}{c} = \frac{yt}{c'} = \frac{zt}{c''} = \frac{t^2}{d}.$$

Portant ces valeurs dans l'équation (2), il vient

$$\left\{\begin{aligned} 0 = \alpha a + \alpha' a' + \alpha'' a'' + 2\beta b + 2\beta' b' + 2\beta'' b''&\\ + 2\gamma c + 2\gamma' c' + 2\gamma'' c'' + \delta d = \frac{d\Delta}{d\lambda}&. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Ainsi, *pour que les deux quadriques soient tangentes, il faut que l'équation* (4) *ait une racine double; on portera cette racine dans les équations* (3), *d'où l'on tirera les coordonnées du point de contact.*

Interprétation géométrique. — Les équations (3) déterminent le sommet du cône dont l'équation est

$$f + \lambda\varphi = 0, \tag{7}$$

et qui par suite passe par l'intersection des quadriques f et φ. Il y a quatre solutions fournies par l'équation (4). Le point de contact est forcément l'un de ces sommets; mais, à cause de l'équation (5), il faut de plus que ce sommet soit celui de deux cônes confondus. Comme le système (3), (5) est équivalent au système (3), (2), il revient au même de dire que ce sommet est sur la surface φ; il est dès lors sur la surface f et, par suite, sur l'intersection des deux quadriques.

Ces résultats sont assez évidents *a priori* : en effet, le point de contact est un point double de l'intersection; si l'on prend ce point pour sommet d'un cône ayant pour directrice l'intersection, ce cône sera du second degré.

Ces considérations géométriques ont l'avantage de rendre intuitifs certains résultats de la discussion suivante.

II. — Conditions de double contact.

Les équations (2) et (3) doivent admettre deux solutions pour les rapports des variables x, y, z, t. Deux cas peuvent se présenter, suivant que ces solutions répondent à deux valeurs différentes ou à la même valeur de λ.

Premier cas. — Soient S et S_1 les sommets des deux cônes répondant aux racines doubles λ et λ_1 de l'équation $\Delta(\lambda) = 0$. Je dis que SS_1 *est une génératrice commune aux deux surfaces f et φ*. En effet, S_1 est sur les surfaces f et φ et par suite sur le cône S; SS_1 est donc une génératrice de ce cône ; c'est de même une génératrice du cône S_1. Ainsi, un point quelconque de cette génératrice satisfait aux équations des deux cônes

$$f + \lambda\varphi = 0, \qquad f + \lambda_1\varphi = 0,$$

et par suite aux équations des deux quadriques

$$f = 0, \qquad \varphi = 0.$$

La *droite SS_1 est donc une génératrice commune aux deux quadriques f et φ*. C. Q. F. D.

Deuxième cas. — Les deux solutions communes à (2) et (3) répondent à la même valeur de λ. Je dis que *les deux quadriques se coupent suivant deux courbes planes*. En effet, comme les équations (3) sont du premier degré et admettent plus d'une solution, il faut que les déterminants mineurs de Δ soient nuls, c'est-à-dire que le cône $f + \lambda\varphi = 0$ se réduise à un système de deux plans PQ. En d'autres termes, les deux quadriques f et φ se coupent suivant deux courbes planes. C. Q. F. D.

Remarquons que les points où la droite d'intersection (P, Q) des deux plans coupe la quadrique φ donneront les solutions du système (2), (3).

Il est clair que, dans le cas actuel, cette droite (P, Q) ne saurait être sur la surface φ, car les équations (2) et (3) auraient une infinité de solutions [tous les points de la droite (P, Q)]. Les deux plans ne peuvent pas non plus se réduire à un plan double P^2, car les équations (2), (3) auraient une infinité de solutions (tous les points communs à P et à φ). Il y aurait une infinité de points de contact, et non pas deux.

III. — Conditions de triple contact.

On ne peut pas supposer que les trois points de contact répondent à trois valeurs différentes de λ, car l'équation (4), qui est du quatrième degré, ne saurait avoir trois racines doubles. On ne peut pas non plus supposer que les trois points de contact répondent à une même valeur de λ; car, d'après une remarque précédente, il ne peut pas y en avoir plus de deux sans qu'il y en ait une infinité. La seule hypothèse possible est celle-ci : deux points S et S′ répondent à une valeur de λ, et le troisième sommet S_1 répond à une autre valeur λ_1. Alors, d'après ce qui précède, on a

$$f + \lambda\varphi = P.Q.$$

Les deux quadriques se coupent suivant deux courbes planes; de plus S_1S et S_1S' sont deux génératrices communes aux deux surfaces. *L'intersection se compose de ce couple de génératrices et d'une deuxième courbe plane passant par S et S′.*

IV. — Conditions de quadruple contact.

La seule hypothèse possible est celle-ci : deux points S et S′ répondent à une valeur λ et les deux autres S_1 et S'_1 à une autre valeur λ_1. On voit, comme à l'article III, que les deux quadriques ont quatre génératrices communes SS_1, SS'_1 et $S'S_1$, $S'S'_1$, formant deux couples de plans

$$\left.\begin{matrix} SS_1S' \\ SS'_1S' \end{matrix}\right\} \text{ se coupant suivant } SS', \text{ et répondant à } \lambda,$$

$$\left.\begin{matrix} S_1SS'_1 \\ S_1S'S'_1 \end{matrix}\right\} \text{ se coupant suivant } S_1S'_1, \text{ et répondant à } \lambda_1.$$

V. — Contacts en nombre supérieur a quatre.

Il ne peut pas y avoir plus de quatre points de contact sans qu'il y en ait une infinité : car il ne peut pas y avoir plus de deux contacts répondant à la racine double λ sans qu'il y en ait une infinité, et l'équation (4) ne peut pas admettre plus de deux racines doubles à moins d'être une identité. D'après ce qui précède, il peut y avoir une infinité de points de contact de trois manières différentes :

1° Un des cônes passant par l'intersection des deux quadriques est un plan double;

2° Il se réduit à un système de deux plans dont l'intersection est commune aux deux quadriques ;

3° L'équation en λ est une identité.

Nous allons examiner successivement ces trois cas.

Premier cas. — La quadrique φ étant donnée, la quadrique f qui la coupe suivant la section par le plan double P^2 et toutes celles qui passent par leur intersection sont comprises dans la formule

$$\varphi + \lambda P^2 = 0.$$

On pourra choisir les variables coordonnées de façon que l'on ait $P = x$. Les équations (3) s'écrivent alors

$$(3') \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\varphi'_x + \lambda x = 0, \\ \frac{1}{2}\varphi'_y = 0, \\ \frac{1}{2}\varphi'_z = 0, \\ \frac{1}{2}\varphi'_t = 0. \end{cases}$$

D'après cela, si je désigne par δ le discriminant de la fonction φ, l'équation (4) devient

$$(4') \qquad \delta + \lambda \frac{d\delta}{dx} = 0.$$

Cette équation en λ a une racine simple finie à laquelle répond le cône qui a pour sommet le pôle du plan $x = 0$, et une racine triple infinie à laquelle répond le plan double $x^2 = 0$.

Deuxième cas. — L'arête du dièdre formé par le couple de plans PQ passant par l'intersection de f et φ est supposée sur la quadrique φ. L'équation de celle-ci est donc de la forme

$$0 = \varphi = PQ + PR + QS.$$

Toutes les quadriques passant par l'intersection de φ et de PQ sont comprises dans la formule

$$\lambda PQ + PR + QS = 0.$$

Si les formes linéaires P, Q, R, S ne sont pas indépendantes, toutes les quadriques représentées par cette équation sont des cônes de même sommet. J'exclus ce cas qui rentre dans l'étude des coniques. Je pose alors

$$P = x, \qquad Q = y, \qquad R = z, \qquad S = t.$$

L'équation générale des quadriques considérées

$$\lambda xy + xz + yt = 0$$

donne pour l'équation en λ

$$(4'') \qquad 0 = \Delta = 1.$$

Cette équation a une racine quadruple infinie à laquelle répond, pour le cône, le couple de plans $xy = 0$. Les quadriques sont tangentes le long de la génératrice

$$x = 0, \qquad y = 0,$$

qui est par suite une génératrice double; elles ont de plus en commun les deux génératrices

$$\begin{cases} x = 0, \\ t = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Ces génératrices forment donc l'intersection complète.

Troisième cas. — Le premier membre de l'équation (4) en λ est identiquement nul. Alors les deux quadriques f et φ sont des cônes, car le premier et le dernier coefficient de l'équation sont les discriminants des deux formes f et φ. J'exclus, comme plus haut, le cas où ces deux cônes ont le même sommet.

D'après l'hypothèse, à tout nombre λ répond un cône dont l'équation est

$$(7') \qquad f + \lambda\varphi = 0.$$

Si on substitue les coordonnées de son sommet dans φ, on obtient, comme on a vu, $\frac{d\Delta}{d\lambda}$. Cette quantité est nulle, puisque Δ est identiquement nul. Ainsi le sommet de tout cône (7') est sur la quadrique φ, en particulier le sommet S du cône f; de même, le sommet σ du cône φ et sur f. Donc $S\sigma$ est une génératrice commune aux deux cônes f et φ. Je considère maintenant le sommet T de l'un quelconque des cônes (7'). TS est une génératrice commune à ce cône T et au cône φ. TS appartient donc aussi à φ. De même $T\sigma$ est commune à f et à φ. Si donc T est extérieur à $S\sigma$, les cônes f et φ contiennent trois génératrices formant un triangle $TS\sigma$; ils ont dès lors un plan commun $TS\sigma$ et se décomposent.

Ainsi, pour qu'on ait affaire à des cônes proprement dits, il faut que T soit sur $S\sigma$; et comme, par hypothèse, il y a une infinité de points T, il existe sur la droite $S\sigma$, et en dehors des points S et σ, des points où les deux cônes sont tangents. Ils sont alors tangents tout le long de la génératrice $S\sigma$; celle-ci est une génératrice double. Les deux cônes se coupent suivant cette génératrice double et suivant une conique.

SUR LA SOMME DES PUISSANCES SEMBLABLES DES n PREMIERS NOMBRES;

PAR M. ERNEST DUPORCQ,
Élève de l'École Monge.

En supprimant, dans chacune des $(n+1)^{\text{ièmes}}$ premières lignes du triangle de Pascal, le chiffre qui la termine, puis en la complétant par des 0, on obtient le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & n & C_n^2 & \ldots & n & 0 \\ 1 & \overline{n+1} & \ldots & \ldots & C_{n+1}^{n-1} & \overline{n+1} \end{vmatrix},$$

dont la valeur est évidemment $\overline{n+1}!$.

Si l'on y remplace chaque élément de la dernière colonne par la somme des éléments de la rangée correspondante, multipliés, le premier par 1, le deuxième par x, le troisième par x^2, ..., le $p^{\text{ième}}$ par x^{p-1}, ..., enfin le dernier par x^n, on a le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 1+2x \\ . & \ldots & . & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & n & . & \ldots & n & 1+nx+\ldots+nx^{n-1} \\ 1 & \overline{n+1} & . & \ldots & C_{n+1}^2 & 1+\overline{n+1}\,x+\ldots+\overline{n+1}\,x^n \end{vmatrix},$$

dont la valeur est $\overline{n+1}!\,x^n$. On peut donc écrire l'identité

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x+1 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & \overline{x+1}^2 \\ . & \dots & . & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n & . & \dots & n & \overline{x+1}^n \\ 1 & \overline{n+1} & . & \dots & C^2_{n+1} & \overline{x+1}^{n+1} \end{vmatrix}}{\overline{n+1}!} - \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x \\ 1 & 2 & \dots & . & x^2 \\ . & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n & \dots & n & x^n \\ 1 & n+1 & \dots & C^2_{n+1} & x^{n+1} \end{vmatrix}}{\overline{n+1}!} = x^n.$$

En désignant par $f(x)$ le second terme du premier membre, on a donc successivement

$$\begin{aligned} &f(x+1)-f(x) = x^n, \\ &f(x)-f(x-1) = (x-1)^n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &f(2)-f(1) = 1^n. \end{aligned}$$

D'ailleurs

$$f(1) = 0.$$

On a, par suite,

$$f(x+1) = 1^n + 2^n + \dots + x^n.$$

Ainsi la somme des $n^{\text{ièmes}}$ puissanees des x premiers nombres est donnée par l'expression $f(x+1)$, qu'il est plus avantageux d'écrire

$$x^n + (-1)^n \frac{\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x^2 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & . & \dots & \dots & \dots \\ x^n & 1 & n & \dots & n \\ x^{n+1} & 1 & n+1 & \dots & C^2_{n+1} \end{vmatrix}}{\overline{n+1}!}.$$

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES D'APRÈS LEUR DÉFINITION (1);

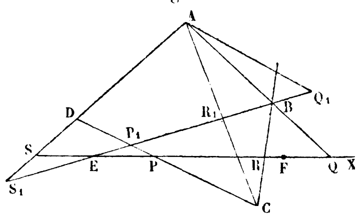
PAR M. L. MALEYX.

Construction d'une conique dont on donne cinq points.

XII. *On donne cinq points, appartenant à une même conique, et l'on se propose d'en construire autant qu'on voudra, ainsi que les tangentes en ces points. On se propose encore de construire le centre de la courbe si elle en a un, de déterminer son genre, deux diamètres conjugués faisant un angle donné, les axes, les sommets, les asymptotes; de lui mener deux tangentes par un point donné de son plan.*

Soient A, B, C, D, E cinq points donnés appartenant à une même conique et supposés à distance finie (*fig.* 30); considérons le quadrilatère inscrit ABCD, et

Fig. 30.



par le point E menons une droite EX dans une direction quelconque; d'après le théorème de Desargues, son second point commun avec la conique sera le point F conjugué de E, dans l'involution déterminée par les deux couples de points P et Q, R et S, où la sécante ren-

(1) Voir même Tome, p. 481.

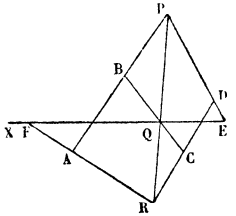
contre les couples de côtés opposés du quadrilatère inscrit, à savoir DC et AB, BC et AD; on le construira en faisant passer deux cercles, le premier par les points P et Q, le second par les points R et S, et enfin un troisième cercle passant par E et ayant avec les précédents même axe radical; le troisième cercle passera par le point F qu'il déterminera.

Si nous voulons actuellement construire la tangente en un de ces points, soit A, nous pouvons considérer le triangle ADC et la tangente en A comme constituant un quadrilatère inscrit dont les côtés opposés sont AD et AC, DC et la tangente AQ_1 en A. Traçons la droite indéfinie EB, qui rencontre la courbe en E et B : elle rencontrera la tangente en A au point Q_1 conjugué de P_1, dans l'involution déterminée par les points E et B, où elle coupe la courbe, et les points R_1 et S_1, où elle coupe les deux autres côtés opposés du quadrilatère (THÉORÈME DE DESARGUES); on pourra donc construire le point Q_1 et, en conséquence, la tangente AQ_1 en A.

Les mêmes questions peuvent être résolues au moyen du THÉORÈME DE PASCAL.

Soient, en effet, A, B, C, D, E cinq points appartenant à une conique (*fig.* 31) : unissons-les successive-

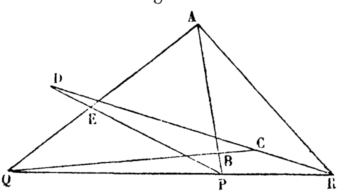
Fig. 31.



ment par des lignes droites, et menons, par le point E, la droite EX indéfinie dont nous voulons trouver le second point commun F avec la courbe. ABCDEF est un hexagone inscrit dans la conique, les points P et Q où se coupent les couples de côtés opposés AB et DE, BC et EFX, appartiennent à la droite de Pascal et la déterminent; le point R, où elle est rencontrée par DC, appartient aussi au côté FA; donc, si l'on unit RA, cette droite va rencontrer EX au point F cherché.

Supposons actuellement qu'on veuille construire la tangente en un des points donnés, A (*fig.* 32); considérons la figure ABCDE jointe à la tangente en A comme

Fig. 32.



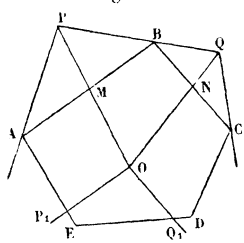
un hexagone inscrit, DC étant opposé à la tangente en A. Les points P et Q où se rencontrent les couples de côtés opposés AB et DE, AE et BC, déterminent la droite de Pascal qui va concourir avec le côté DC au même point R que la tangente en A; le point R où se coupent PQ et DC étant connu, en l'unissant au point A, on a la tangente cherchée.

Quel que soit le mode de construction adopté, on pourra toujours, A, B, C, D, E étant les cinq points donnés (*fig.* 33), construire les tangentes en trois de ces points, A, B, C; soient P et Q les points où se rencontrent ces tangentes en A et B, B et C, respectivement.

D'après le raisonnement fait pour établir une des propositions du n° IV, Chap. II, PM qui unit le point P où se coupent deux tangentes au milieu M de la corde des contacts AB est le diamètre de la courbe conjuguée de la direction AB; PM va donc passer par le centre, et il en est de même de QN, N étant le milieu de BC.

Si les deux droites PM, QN sont parallèles la courbe sera une parabole; dans le cas contraire, leur point commun O définira le centre de la courbe, et en menant par le point O, OP_1 parallèle à AB, et OQ_1 parallèle à BC, on aura deux systèmes de diamètres conju-

Fig. 33.



gués, en direction; ces deux couples de rayons associés déterminent l'involution du système des diamètres conjugués dont on cherchera les rayons doubles.

Si les rayons doubles sont réels, la courbe sera une hyperbole dont ces rayons seront les asymptotes; on pourra alors construire deux diamètres conjugués faisant un angle donné et en conséquence les axes, d'après ce qui a été dit au n° XIV, Chap. I; quant aux sommets, ce sont les intersections de la courbe et de l'un des axes qu'on peut construire d'après le n^{os} XV, Chap. I.

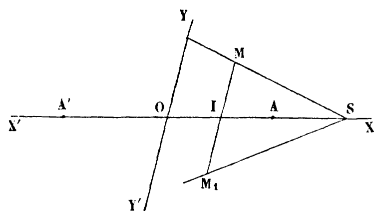
Si les rayons doubles n'existent pas, la courbe est une ellipse; on pourra construire les directions des axes, ou de deux diamètres conjugués faisant un angle donné, en conséquence des n^{os} V et VI, Chap. I.

Connaissant le centre, deux diamètres conjugués en direction, un point de la courbe, ainsi que la tangente en ce point, on peut déterminer les longueurs de ces diamètres au moyen de la proposition suivante :

Soient OX, OY deux diamètres conjugués, M un point de la courbe, et MS la tangente en M rencontrant

OX en S (*fig.* 34); si nous menons MI parallèle à OY, que nous la prolongions de la longueur IM_1 égale à IM, et que nous tracions la droite M_1S, cette droite sera la tangente à la courbe en M_1, et S sera le pôle de MM_1 par rapport à la conique. Dès lors, si A et A′ sont les extrémités du diamètre dirigé suivant OX, les quatre points A, A′, S, I forment une division harmonique; il

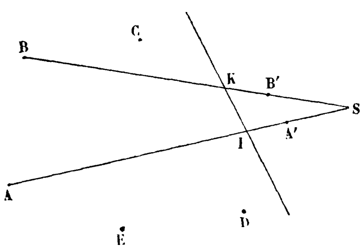
Fig. 34.



en résulte que : $\overline{OA}^2 = \overline{OA'}^2 = OI \times OS$; on aura donc les points A et A′ en construisant une moyenne proportionnelle entre OI et OS.

Supposons actuellement qu'on veuille mener deux tangentes à la conique dont on donne cinq points, A, B, C, D, E, par un point S de son plan (*fig.* 35).

Fig. 35.

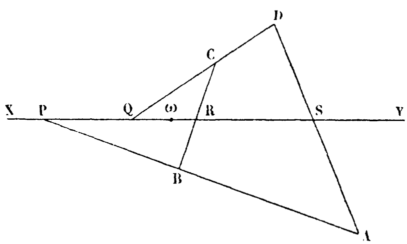


Nous construirons les droites SA, SB, et nous déterminerons leurs seconds points communs A′, B′, avec la courbe; puis nous construirons les points I et K conjugués harmoniques de S par rapport à A et A′, B et B′, respectivement; la droite IK sera la polaire de S par rapport à la conique et la coupera aux points de contact des tangentes cherchées. On déterminera ces points d'après la construction déduite du théorème établi au n° VI, Chap. II, et la question sera résolue.

Nous avons supposé les cinq points situés à distance finie; examinons les cas particuliers où un ou deux de ces points passent à l'infini dans des directions données :

1° *Un seul des points, soit* E, *passe à l'infini dans la direction* XY (*fig.* 36).

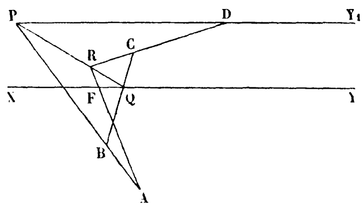
Fig. 36.



Desargues. — Si nous considérons le quadrilatère inscrit ABCD, le point conjugué de E, qu'on peut considérer comme situé à l'infini sur XY, dans l'involution déterminée par les couples de points P et Q, R et S, où les côtés opposés du quadrilatère rencontrent XY, est le point central ω de cette involution; on peut déterminer ω et l'on rentre dans la première hypothèse.

Pascal. — Supposons les cinq points donnés : A, B, C, D, E; E à l'infini sur DY′ (*fig.* 37). Menons arbitrairement AR par le point A, et proposons-nous de construire son second point commun avec la courbe, soit F. Dans l'hexagone inscrit ABCDEF, les couples de côtés opposés AB et DE (ou DY_1), AR et DC, déterminent la droite de Pascal, par leurs points communs P et R; l'intersection de PR avec BC donne le point Q; le point F est déterminé par l'intersection de XY (ou EF), menée par Q parallèle à DY_1 avec AR. Comme dans la con-

Fig. 37.

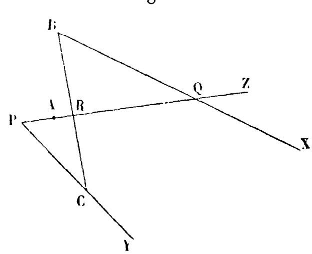


struction précédente, on rentre dans la première hypothèse. Dans ce cas, la courbe peut être une parabole ou une hyperbole.

2° *Deux des points passent à l'infini dans des directions différentes* BX, CY (*fig.* 38).

Desargues. — Soient A, B, C, D, E les cinq points donnés, D et E étant situés à l'infini dans les directions BX, CY respectivement (*fig.* 38). Considérons le quadri-

Fig. 38.

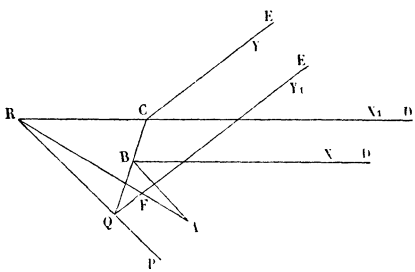


latère inscrit dont les côtés sont BC, BX, CY, et la droite DE située à l'infini. Menons par le point A une sécante quelconque AZ : son second point commun avec la courbe sera conjugué de A dans l'involution déterminée par les points P et Q et dont R est le centre, puisque son conjugué S est à l'infini sur DE.

Ce second point est facile à déterminer et situé à distance finie; en menant une seconde sécante dans une direction différente, on déterminera un cinquième point à distance finie et l'on rentrera dans la première hypothèse.

Pascal. — Soient les cinq points donnés A, B, C, D, E; D et E à l'infini dans les directions BX, CY (*fig.* 39); menons arbitrairement AR par le point A, et construisons son second point commun, F, avec la courbe. Dans

Fig. 39.



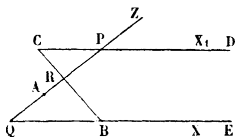
l'hexagone inscrit ABCDEF, les côtés opposés AB et DE, qui est à l'infini, se coupent au point P situé à l'infini sur AB; les côtés opposés AR et DC (ou CX_1, menée par C parallèle à BX), se coupent en R; la droite de Pascal sera donc la parallèle à AB menée par le point R qui est connu. L'intersection, Q, de cette droite avec BC est un point de EF; menant par ce point, Q, une parallèle à CY, soit QY_1, l'intersection de cette droite avec AR fait connaître le point F. On aura ainsi déterminé un quatrième point F à distance finie; on en construira un cinquième d'une manière analogue, et l'on rentrera dans la première hypothèse.

La courbe ne peut, dans ce cas, être qu'une hyperbole.

3° *Deux points passent à l'infini dans une même direction donnée.*

Desargues. — Soient A, B, C les trois points à distance finie, D et E à l'infini dans les directions CX_1, BX, qui sont parallèles (*fig.* 40).

Fig. 40.

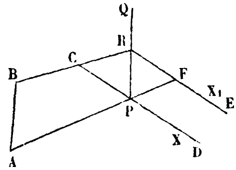


Considérons le quadrilatère inscrit BCDE, et menons par le point A une transversale quelconque AZ; son second point de rencontre avec la courbe sera le conjugué de A, dans l'involution déterminée par le couple de points P, Q, et le point R qui en est le centre, puisque son conjugué est à l'infini sur DE. On pourra facilement construire ce point situé à distance finie, et en construire de même un cinquième; on rentrera ainsi dans la première hypothèse. Dans ce cas, la conique ne peut être qu'une parabole.

Pascal. — Supposons les points A, B, C, D, E, F, A, où F est inconnu, D et E à l'infini dans les directions CX, FX_1, qui sont parallèles (*fig.* 41), unis deux à deux par des droites dans l'ordre où ils sont écrits. Menons par A la droite AF dans une direction arbitraire et cherchons son second point de rencontre F avec la courbe; les côtés opposés AF, CD se coupent en P; les côtés opposés consécutifs AB, DE se coupent à l'infini sur AB; la droite de Pascal est donc la parallèle PQ à AB menée par le point P, ce qui permet de la construire; les côtés opposés BC, FE vont concourir sur PQ en R, déterminé par la rencontre de PQ avec BC.

Menons par R la parallèle RX_1 à CX; son intersection avec AP détermine le point F. On trouverait, en me-

Fig. 41.



nant par A une droite dans une direction différente, un cinquième point, situé comme F à distance finie, et l'on rentrerait dans la première hypothèse.

Conséquences importantes. — 1° Quand on connaît cinq points d'une conique, tous les autres points peuvent être construits au moyen de l'un des théorèmes de Desargues ou de Pascal. Une droite passant par un des points donnés ne pouvant rencontrer la conique qu'en un autre point, cette courbe est absolument déterminée par cinq de ses points. En d'autres termes, *si deux coniques ont cinq points communs, elles se confondent.*

2° Une conique étant définie par cinq points, la même conique le sera par quatre de ces points et par un sixième point fourni par l'un des théorèmes de Desargues ou de Pascal; ou par quatre de ces points et la tangente en un de ces points, ou encore par trois de ces points et les tangentes en deux de ces points.

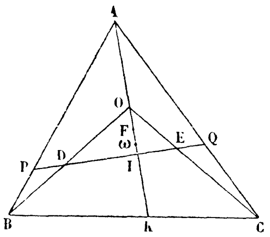
Cette substitution d'un élément point à un autre pouvant être réitérée un nombre de fois quelconque, il en résulte que : *si l'on donne cinq points, qu'on détermine consécutivement de nouveaux points par l'application de l'un des théorèmes de Desargues ou de Pascal, comme si les cinq premiers appartenaient à une conique; si en plus on peut trouver une conique* *passant par les cinq derniers, distincts ou confondus par couples, cette conique passera également par les cinq premiers.*

XIII. *Par cinq points situés dans un plan, et tels qu'il n'y en ait pas plus de deux en ligne droite, on peut toujours faire passer une conique.*

Remarquons d'abord que, si les cinq points donnés ne sont pas les sommets d'un pentagone convexe, on peut toujours par l'application, réitérée si cela est nécessaire, du théorème de Desargues, trouver cinq points sommets d'un pentagone convexe, et tels que, si l'on peut faire passer une conique par ces cinq points, elle passera par les cinq premiers.

Si les cinq points ne sont pas sommets d'un pentagone convexe, il ne peut se présenter que deux cas : ou deux d'entre eux sont intérieurs au triangle dont les trois autres sont les sommets, ou un seul d'entre eux est situé à l'intérieur d'un quadrilatère convexe dont les quatre autres sont sommets.

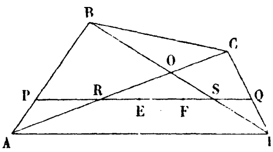
Fig. 42.



Examinons le premier cas. Soient A, B, C, D, E les cinq points donnés (*fig.* 42), D et E étant à l'intérieur du triangle dont A, B, C sont les trois sommets. La droite DE ne peut passer par aucun des trois sommets et doit, en conséquence, rencontrer le périmètre en deux points P et Q; les côtés opposés BD, CE du quadrilatère convexe BDEC vont se couper en O, à l'intérieur du triangle. Dès lors la droite AO rencontre le côté BC en K, situé entre B et C, et DE en I, situé entre D et E. Le point O est un des points doubles de l'involution déterminée sur AK par ses points de rencontre avec les côtés opposés du quadrilatère BDEC; il en résulte que le centre ω de cette involution est extérieur au segment IK; de plus, il est situé entre O et I, car, s'il était sur OA ou sur son prolongement, $\overline{\omega O}^2$ serait inférieur à $\omega I \times \omega K$, et, s'il était situé sur le prolongement de AK, $\overline{\omega O}^2$ serait, au contraire, supérieur au même produit. Le centre ω de l'involution dont on vient de parler, étant situé entre I et O, le point A et son conjugué F sont situés d'un même côté de ω, et le segment dont ils sont extrémités comprend le point double O. Le point F étant situé entre O et ω, le pentagone BDFEC est convexe, et une conique passant par ses sommets passera également par le point A.

Occupons-nous maintenant du deuxième cas. Soient A, B, C, D, E les cinq points donnés, E étant situé à l'intérieur du quadrilatère convexe ABCD (*fig.* 43).

Fig. 43.



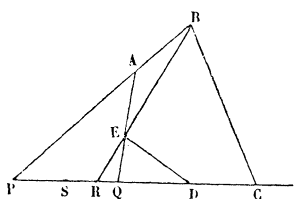
Construisons les diagonales AC, BD : le point E tombera à l'intérieur d'un des triangles AOD, BOC, DOC, AOB, soit du triangle AOD; considérons le quadrilatère

ACDB, et menons la transversale PEQ, parallèle à AD, rencontrant les couples de côtés opposés AB et CD, AC et BD, en P et Q, R et S, respectivement. Le segment RS étant intérieur au segment PQ, dans l'involution que déterminent les extrémités de ces segments, la puissance de cette involution est positive, et, comme le point E est intérieur au segment RS, il en est de même de son conjugué. Dès lors, les cinq points A, B, D, E, F, qu'on peut substituer aux cinq points A, B, C, D, E, rentrent dans le cas précédent.

Établissons actuellement la proposition suivante : *Si l'on considère un pentagone convexe, et qu'on applique à un de ses sommets la construction de la tangente définie par le théorème de Desargues, cette droite laissera les quatre autres sommets d'un même côté.*

Soit le pentagone convexe ABCDE (*fig.* 44), appliquons la construction de la tangente au sommet A.

Fig. 44.



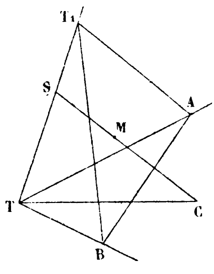
Dans ce but, imaginons le quadrilatère ayant pour côtés opposés AB et AE, BE et la tangente inconnue en A; coupons la figure par la droite DC, rencontrant AB et AE en P et Q, BE et la tangente inconnue en A, en R et S. Le pentagone étant convexe, les points P et Q sont extérieurs au segment DC, d'un même côté ou de part et d'autre; il en résulte que la puissance de l'involution déterminée par les deux couples de points D et C, P et Q, est positive. Dans le premier cas, qui est celui de la figure, le point R est compris entre les points P et Q; donc il en est de même de son conjugué S, et la tangente ne pouvant se mouvoir que dans l'intérieur de l'angle PAQ laisse les quatre points B, E, D, C d'un même côté; dans le second les points R et S sont extérieurs au segment PQ, et la conséquence est la même.

D'après cela, pour montrer qu'on peut faire passer une conique par cinq points quelconques, dont trois ne sont pas en ligne droite, il suffit d'établir la proposition pour cinq points sommets d'un pentagone convexe, et, d'après la dernière proposition établie, en construisant les tangentes en deux des sommets de ce pentagone convexe, l'angle de ces tangentes qui renferme la corde unissant les points de contact renfermera aussi les trois autres sommets.

Il suffit donc de montrer qu'on peut *construire une conique tangente à deux droites données en deux points donnés sur ces droites et passant par un troisième point situé dans l'angle de ces tangentes qui renferme le segment de droite unissant les points de contact.*

Pour résoudre la question, soient AT, BT les deux tangentes données, A et B étant les points de contact,

Fig. 45.



C le troisième point situé dans l'angle des tangentes renfermant AB (*fig.* 45). Par les points A et B, et dans un plan autre que le plan ABC, faisons passer un cercle quelconque et menons en A et B les tangentes AT_1, BT_1 à ce cercle. Le plan CTT_1 rencontre AB entre A et B; dès lors il rencontre le cercle en deux points : soit M un de ces points; joignons CM par une ligne droite et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre avec TT_1 en S. Si nous prenons S pour sommet d'un cône ayant pour directrice le cercle, le cône sera tangent aux deux plans TAT_1, TBT_1, et il sera coupé par le plan TAB suivant une conique tangente à AT et BT en A et B, et passant par le point C qui est la trace de la génératrice SM sur le plan ABC; cette conique répond à la question. Comme il y a deux points M sur le cercle, le même cercle donne deux solutions.

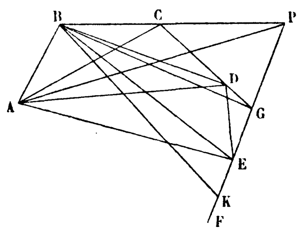
Construction de coniques définies par cinq données, points ou tangentes réels, situés à distance finie, d'après les théorèmes précédents.

XIV. Le premier de ces problèmes, construire une conique, connaissant cinq de ses points, a été résolu avec détail dans le numéro qui précède de deux rangs, et nous avons montré dans le précédent que par cinq points, tels qu'il n'y en ait pas plus de deux en ligne droite, on peut toujours faire passer une conique. Nous allons nous occuper actuellement de la construction d'une conique dont on donne cinq autres éléments, points ou tangentes :

1° *Construire une conique, connaissant cinq de ses tangentes.*

Théorème corrélatif de celui de Desargues. — Soient AB, BC, CD, DE, EF les cinq tangentes données (*fig.* 46); considérons les quatre dernières comme formant un quadrilatère circonscrit dont les quatre sommets sont C, D, E et P, où se rencontrent BC et EF. Prenons un point quelconque A sur la première et unissons-le par des lignes droites aux sommets D, P, C, E du quadrilatère; la seconde tangente, issue du point A, est le rayon conjugué de AB dans le faisceau en involution

Fig. 46.

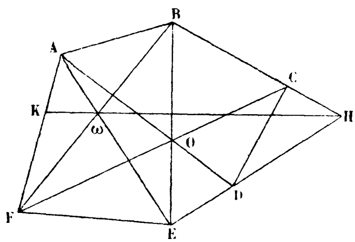


défini par les couples des rayons AC et AE, AD et AP; en construisant ce rayon, on aura une sixième tangente et l'on pourra ainsi s'en procurer autant qu'on voudra.

Considérons une des cinq tangentes données EF, et proposons-nous de trouver son point de contact, soit K; CD, DE, EK, KF peuvent être considérées comme formant un quadrilatère circonscrit dont les sommets sont D, E, K et G, intersection de CD et FK; si nous unissons le point B à ces sommets par des lignes droites, BK sera le rayon conjugué de BD dans le faisceau en involution déterminé par le couple des rayons BA, BC qui sont tangents, et par le couple BE, BG qui unissent le point B à deux sommets opposés du quadrilatère circonscrit; on construira le rayon BK dont l'intersection avec EF donnera le point de contact K.

Brianchon. — Soient AB, BC, CD, DE, EF les cinq tangentes données (*fig.* 47); prenons arbitrairement le point A sur la tangente AB; A, B, C, D, E peuvent être considérés comme cinq sommets d'un hexagone circonscrit, dont F serait le sixième; les droites AD, BE, qui sont deux diagonales unissant deux sommets opposés, déterminent le point O par leur intersection; la troisième diagonale passe par C et O et détermine le sommet F et la tangente AF par sa rencontre avec EF.

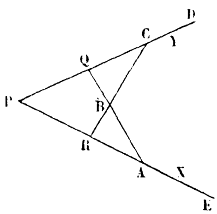
Fig. 47.



Considérons une tangente, soit AF qu'on vient de construire, et cherchons son point de contact K. Les six points A, B, H, E, F, et K, qui est inconnu, peuvent être pris pour six sommets d'un hexagone circonscrit; construisons les diagonales AE, BF unissant deux sommets opposés, leur intersection détermine le point ω; la troisième diagonale passe par H et ω et va couper AF au point cherché K.

L'une des cinq tangentes est donnée à l'infini. (La courbe, dans ce cas, ne peut être qu'une parabole.)

Fig. 48.

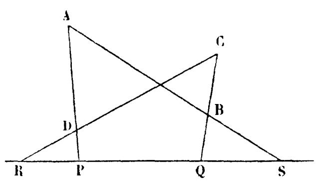


Les constructions précédentes continuent à s'appliquer en considérant deux des sommets du pentagone formé par les cinq tangentes données; soient D et E comme situés à l'infini sur les côtés extérieurs PX, PY du quadrilatère complet, dont les quatre côtés sont les tangentes, restant à distance finie (*fig.* 48).

2° *Construire une conique, connaissant quatre de ses points et une de ses tangentes.*

Desargues. — Considérons le quadrilatère inscrit ABCD, dont les quatre sommets sont les quatre points donnés, et soit RS la tangente donnée (*fig.* 49). Les couples de points P et Q, R et S, où la tangente est rencontrée par les couples des côtés opposés du quadrilatère, déterminent une involution dont font partie les points de

Fig. 49.



rencontre de la tangente et de la conique, et, comme ces points se réduisent à un, puisque la droite est tangente, le point de contact est l'un des points doubles de cette involution. On pourra, d'après cela, déterminer le point de contact et l'on est ramené au cas où l'on donne cinq points; comme l'involution a deux points doubles, il y a deux solutions.

La tangente peut être donnée à l'infini. (La courbe est alors une parabole.)

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1890;

PAR M. S. RAVIER [1],
Élève du lycée Condorcet.

I. — SOLUTION ANALYTIQUE.

1° Le problème n'a pas de sens si le point A est dans le plan P. Nous pouvons donc prendre pour tétraèdre de référence un tétraèdre ayant pour sommet le point A et pour face opposée le plan P.

Soit alors

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B y z \\ \qquad + 2 B' z x + 2 B'' x y + 2 C x t + 2 C' y t + 2 C'' z t = 0 \end{array}\right.$$

l'équation de la surface, et soient

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} t = 0, \\ a x^2 + a' y^2 + a'' z^2 + 2 b y z + 2 b' z x + 2 b'' x y = 0 \end{array}\right.$$

les équations ponctuelles de la conique.

Son équation tangentielle à l'intérieur du plan P sera

$$(3)\quad \alpha u^2 + \alpha' v^2 + \alpha'' w^2 + 2 \beta v w + 2 \beta' w u + 2 \beta'' u v = 0,$$

$\alpha, \alpha', \alpha''$ et β, β', β'' étant égaux à [si l'on désigne par Δ le discriminant de l'équation (2)]

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a}, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial a'}, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial a''}$$

et

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Delta}{\partial b}, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta}{\partial b'}, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta}{\partial b''}.$$

[1] Cet élève a obtenu le prix d'honneur.

Cela étant, soit

$$(4) \qquad ux + vy + wz = t$$

l'équation du plan des points a_1, a_2, a_3.

L'équation du cône, ayant pour sommet A et pour base l'intersection de ce plan avec la quadrique, s'obtient en éliminant t entre les équations (1) et (4), ce qui donne

$$(5) \left\{ \begin{aligned} & Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ & \qquad + (ux + vy + wz)(2Cx + 2C'y + 2C''z) = 0. \end{aligned} \right.$$

Son intersection avec le plan P aura précisément la même équation.

Cette intersection est une conique telle qu'il existe un triangle conjugué par rapport à la conique C qui lui soit inscrit.

On sait que la condition nécessaire et suffisante, pour qu'il en soit ainsi, est que le second coefficient de l'équation en λ des coniques représentées par les équations (2) et (5) soit nul (¹).

Écrivons cette condition; elle est

$$\begin{aligned} & \alpha(A + 2Cu) + \alpha'(A' + 2C'v) + \alpha''(A'' + 2C''w) \\ & \qquad + 2\beta(B + C''v + C'w) + 2\beta'(B' + Cw + C'u) \\ & \qquad\qquad + 2\beta''(B'' + C'u + Cv) = 0. \end{aligned}$$

Cette équation en u, v, w est l'équation tangentielle de l'enveloppe du plan a_1, a_2, a_3.

Comme elle est du premier degré, le plan a_1, a_2, a_3 passe par un point fixe.

Les coordonnées de ce point sont les coefficients de u, v, w, et le terme connu de son équation tangentielle, ce dernier changé de signe, puisqu'on a pris pour le

(¹) *Voir* SALMON, *Sections coniques.*

plan la forme d'équation

$$ux + vy + wz = t.$$

Ce sont

$$\begin{aligned}
x &= 2(\alpha C + \beta' C'' + \beta'' C'),\\
y &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
z &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
t &= -(\alpha A + \alpha' A' + \alpha'' A'' + 2\beta B + 2\beta' B' + 2\beta'' B'').
\end{aligned}$$

Il est à remarquer que t est nul et que le point M est dans le plan P, précisément quand

$$\alpha A + \alpha' A' + \ldots = 0;$$

c'est-à-dire quand il existe un triangle conjugué par rapport à la conique C, qui soit inscrit dans la section de la surface S par le plan P.

Cela peut servir de *vérification*.

Remarque. — Le plan polaire de M, par rapport au cône d'équation (2), a pour équation

$$\text{(A)} \qquad ax(\alpha C + \beta' C'' + \beta'' C') + \ldots = 0.$$

Le coefficient de x, dans le premier membre de cette équation, est égal à

$$\begin{aligned}
C(a\alpha + b'\beta' + b''\beta'') + C'(a\beta' + b'\beta + b''\alpha')&\\
+ C''(a\beta' + b'\alpha'' + b''\beta)&.
\end{aligned}$$

Si l'on se reporte à ce qui a été dit plus haut, on voit que

$$\begin{aligned}
a\alpha + b'\beta' + b''\beta'' &= \Delta,\\
a\beta' + b'\beta + b''\alpha' &= 0,\\
a\beta' + b'\alpha'' + b''\beta &= 0;
\end{aligned}$$

ce coefficient se réduit donc à $C\Delta$.

Δ étant $\neq 0$, sans quoi la conique C serait un système de deux droites, ce qui n'est pas supposé, on peut diviser tous les coefficients du premier membre de l'équation (A) par Δ et elle devient alors

$$Cx + C'y + C''z = 0.$$

On déduit de là que M est le pôle, par rapport au cône d'équation (2), du plan tangent à S en A.

2° Soient $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ les équations tangentielles de deux coniques circonscrites au quadrilatère.

L'équation de C sera de la forme

$$C_1 + \lambda C_2 = 0.$$

Les coordonnées du point M seront

$$\begin{aligned}
x &= 2\left[C\,\frac{\partial\Delta(C_1+\lambda C_2)}{\partial(a_1+\lambda a_2)} + C''\ldots + C'\ldots\right],\\
y &= 2(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots),\\
z &= 2(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots),\\
t &= -\left[A\,\frac{\partial\Delta(C_1+\lambda C_2)}{\partial(a_1+\lambda a_2)} + \ldots\right].
\end{aligned}$$

Les dérivées de Δ sont du second degré par rapport à λ, puisque ce sont des fonctions du second degré des coefficients de l'équation ponctuelle de C; donc les valeurs trouvées pour x, y, z, t sont fonctions du second degré d'un même paramètre variable λ; donc le lieu est une conique.

3° Soient

$$\Gamma_1 = 0, \qquad \Gamma_2 = 0$$

les équations tangentielles de deux coniques inscrites au quadrilatère; Γ sera de la forme

$$\Gamma_1 + \lambda\Gamma_2 = 0.$$

Les coordonnées du point M seront

$$\begin{aligned}
x &= 2[C(\alpha_1+\lambda\alpha_2) + C''\ldots + C'\ldots),\\
y &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
z &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
t &= -[A(\alpha_1+\lambda\alpha_2) + \ldots].
\end{aligned}$$

λ entrant au premier degré dans les quatre équations, le lieu est une droite.

II. — Solution géométrique.

1° La première partie peut se déduire du théorème de Frégier, étendu à l'espace.

Il suffit pour cela de faire une transformation homographique de la figure donnée, telle que la conique C devienne le cercle de l'infini, ce qui est toujours possible.

Dans la figure obtenue, le trièdre $A(A_1 A_2 A_3)$ sera assujetti à être trirectangle, et par suite, d'après le théorème de Frégier, le plan $a_1 a_2 a_3$ passera par un point fixe de la normale en A à la surface S.

Mais cette normale est la droite qui joint A au pôle, par rapport au cercle de l'infini, de l'intersection du plan tangent en A avec le plan de l'infini.

On en déduit homographiquement que, dans le problème proposé :

Le point M *est sur la droite qui joint* A *au pôle, par rapport à la conique, de l'intersection* D *du plan tangent en* A *avec le plan* P.

Autrement dit (en désignant par K le cône qui a pour sommet A et pour base la conique) :

Le point M *est sur la polaire du plan tangent en* A *à la surface* S, *par rapport au cône* K.

2° Supposons maintenant que la conique C varie en passant par quatre points fixes a, b, c, d.

On sait que, dans ces conditions, le pôle par rapport à elle d'une droite fixe de son plan décrit une conique.

Le pôle de la droite D, en particulier, en décrira une, et la droite qui le joint au point A engendrera un cône du second ordre.

Donc le lieu cherché est déjà sur un cône.

Considérons, d'autre part, le triangle diagonal A'_1, A'_2, A'_3 du quadrilatère *abcd*. Il est fixe et fait partie, quelle que soit la conique C, des trièdres $A(A_1A_2A_3)$ assujettis aux conditions de l'énoncé. Le point M est donc constamment dans le plan $a'_1 a'_2 a'_3$ correspondant.

On déduit de là que le point M se déplace sur une conique.

3° La marche de la démonstration est identique à celle de 2°, mais, au lieu d'une conique et d'un cône, on a une droite et un plan.

Remarques. — Les propriétés des coniques relatives aux polaires étant projectives, les résultats de la première partie de la question ne sont pas changés si l'on remplace la base C du cône K par une autre.

On déduit de là qu'on aurait pu modifier l'énoncé de la manière suivante :

Si l'on considère une surface du second ordre et un cône ayant pour sommet un point A *de cette surface :*

1° *Les plans coupant la quadrique* S *suivant des coniques circonscrites à des triangles conjugués par rapport au cône* K *passent par un point fixe* M.

2° *Quand le cône* K *se déforme en conservant quatre génératrices fixes,* M *décrit une conique.*

3° *Quand le cône* K *se déforme en restant inscrit dans un angle polyèdre de quatre faces fixes,* M *décrit une droite.*

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

(TOME IX, 3e SÉRIE).

Algèbre.

Géométrie pure.

Géométrie analytique à deux et à trois dimensions.

Calcul différentiel et intégral.

Mécanique.

Questions proposées.

Sujets de composition donnés à divers concours.

Mélanges.

Questions résolues.

TABLE DES AUTEURS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE

(TOME IX, 3e SÉRIE).

(On a mis à la droite de chaque nom d'auteur les numéros de la Table précédente auxquels il faut se reporter pour trouver les titres des Mémoires et l'indication des pages correspondantes.)

15851 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.