Nouvelles annales de mathématiques

Joseph Joffroy

Nouveau théorème sur les progressions arithmétiques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 85-88

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__85_1>

NOUVEAU THÉORÈME SUR LES PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES;

PAR M. JOSEPH JOFFROY,
Professeur au lycée de Nantes.

Un de mes élèves, *Gaston Brunet* (classe de 4^e^ année d'Enseignement spécial) a le mérite d'avoir remarqué par des essais la propriété numérique suivante :

Soit les progressions

$$\div 1.3.5.7.9.11.13\ldots$$
$$\div 1\ .\ 5\ .\ 9\ .\ 13\ldots$$

Le premier terme de la dernière est le cube du premier terme de la première; la somme des trois termes suivants (5, 9, 13) est le cube du terme 3, la somme des cinq termes suivants est le cube du terme 5, etc.

Il a été conduit à cette relation par la même relation connue sur les progressions

$$\begin{array}{cccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & \ldots \\ 1, & & 3, & & 5, & & 7, & & \ldots \end{array}$$

Cette propriété et celle que Brunet a trouvée sont des cas particuliers du théorème suivant auquel elles m'ont conduit :

Soient

$$a.b.c.d.e.f\ldots k.l(l+R)\ldots$$

une progression arithmétique à termes entiers et soient

$$a.c.e.g\ldots k(l+R)\ldots$$

la progression formée par les termes de rang impair de l'autre; je décompose la seconde en groupes de a, b, c, d, ... l, $(l+R)$ *termes : la somme des termes du premier groupe vaut le cube de* a, *la somme des termes du second groupe vaut le cube de* b, ..., *la somme des termes du* $(n+1)$ *groupe vaut le cube de* $l+R$, *à la seule condition que le terme* a *soit l'unité ou à la seule condition que* $R=a$.

Démonstration. — Le premier terme du groupe qui contient $l+R$ termes de la seconde progression est précédé par

$$a+b+c+\ldots+l \quad \text{ou} \quad (a+l)\frac{n}{2} \text{ termes.}$$

Je remplace n par sa valeur tirée de la formule connue

$$l=a+(n-1)R$$

et je trouve que le nombre des termes qui précèdent ce terme est

$$\frac{(a+l)(l-a+R)}{2R}.$$

Ce terme vaut donc

$$a+(a+l)(l-a+R).$$

Le dernier terme du groupe considéré vaut

$$a+(a+l)(l-a+R)+(l+R-1)2R,$$

et la somme des termes de ce groupe

$$[a + (a + l)(l - a + R) + (l + R - 1)R](l + R).$$

expression qui peut s'écrire

$$[(l + R)^2 + (1 - a)(a - R)](l + R)$$

et qui peut se réduire à $(l + R)^3$, soit lorsque $a = 1$, soit lorsque $R = a$. C. Q. F. D.

Application I. — La somme des cubes des n premiers nombres impairs

$$1.3.5\ldots(2n - 1)$$

est égale à la somme des

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) \quad \text{ou} \quad n^2$$

premiers termes de la progression

$$1, \quad 5, \quad 9, \quad 13, \quad \ldots, \quad l,$$

ou à

$$(1 + l)\frac{n^2}{2},$$

qui s'écrit, en remplaçant l par $1 + (n^2 - 1)4$,

$$(2n^2 - 1)n^2.$$

Application II. — La somme des cubes des n premiers nombres pairs

$$2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \quad 10, \quad 12, \quad \ldots, \quad 2n$$

égale la somme des

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n \quad \text{ou} \quad n(n + 1)$$

premiers termes de la progression

$$2.6.10.14\ldots l$$

Elle vaut donc

$$(2 + l)\frac{n(n + 1)}{2}.$$

Substituant à l son expression

$$2+[n(n+1)-1]4.$$

j'obtiens, pour expression de la somme cherchée,

$$2n^2(n+1)^2.$$