NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. AMIGUES

Équation générale des surfaces réglées dont la ligne de striction satisfait à certaines conditions

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 77-82

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__77_0>

ÉQUATION GÉNÉRALE DES SURFACES RÉGLÉES DONT LA LIGNE DE STRICTION SATISFAIT A CERTAINES CONDITIONS;

PAR M. E. AMIGUES.

I. PREMIER PROBLÈME. — *La ligne de striction est donnée.*

1. Soient

$$x_1 = f(s),$$
$$y_1 = \varphi(s),$$
$$z_1 = \psi(s),$$

les équations de la ligne donnée, dans lesquelles x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées d'un point variable P de la ligne, et s une variable auxiliaire représentant la longueur de l'arc AP de cette ligne qui est compris entre un point fixe A et le point variable P.

Soient λ, μ, ν les cosinus des angles que la génératrice du point P fait avec les trois axes des coordonnées rectangulaires. Soit u une longueur quelconque PM prise sur cette génératrice et désignons par x, y, z les coordonnées du point M. On a alors

$$x = f(s) + \lambda u,$$
$$y = \varphi(s) + \mu u,$$
$$z = \psi(s) + \nu u.$$

Ces équations, dans lesquelles s et u sont deux variables indépendantes et λ, μ, ν des fonctions arbitraires de s, représentent toutes les surfaces réglées passant par la ligne donnée.

Il est aisé de voir qu'elles représentent toutes les surfaces réglées ayant pour ligne de striction la ligne donnée, si les fonctions de s que nous appelons λ, μ, ν satisfont à l'équation différentielle suivante :

$$(1) \qquad \sum f'(s)\frac{d\lambda}{ds} = 0.$$

Si, d'autre part, on appelle α l'angle de la génératrice qui passe au point P avec la courbe donnée, on a évidemment, que cette courbe soit ou non ligne de striction,

$$(2) \qquad \cos\alpha = \Sigma\,\lambda f'(s).$$

Enfin, il est facile de calculer le paramètre de distribution ϖ de la génératrice du point P. La valeur de ce paramètre, dans le cas particulier où la ligne donnée est ligne de striction, prend la valeur simple qui suit :

$$(3) \qquad \frac{\sin^2\alpha}{\varpi^2} = \sum\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2.$$

2. Laissons α fonction arbitraire de s. Définissons les fonctions λ, μ, ν par les équations (1) et (2), auxquelles se joint l'équation

$$(4) \qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1,$$

et nous aurons ainsi toutes les surfaces réglées ayant la ligne de striction donnée. L'équation (3) nous donnera alors le paramètre de distribution pour les génératrices de la surface.

Pour intégrer le système [(1), (2), (4)], différentions (2) en tenant compte de (1). Nous aurons

$$(5) \qquad \frac{d\cos\alpha}{ds} = \sum \lambda f''(s);$$

alors (2), (4), (5) donnent λ, μ, ν. Les relations (2) et (5) donnent d'abord λ et μ. Portant ces valeurs dans (4), on a une équation en ν du second degré.

3. Supposons, comme exemple, qu'on nous donne l'hélice représentée par les équations suivantes :

$$x = a\cos\frac{s}{a},$$

$$y = a\sin\frac{s}{a},$$

$$z = bs.$$

En posant

$$R = \sqrt{b^2 + \sin^2\alpha - a^2(b^2+1)\left(\frac{d\cos\alpha}{ds}\right)^2},$$

on obtient

$$\lambda = -\sin\frac{s}{a}\,\frac{\cos\alpha - bR}{b^2+1} - a\cos\frac{s}{a}\,\frac{d\cos\alpha}{ds},$$

$$\mu = \cos\frac{s}{a}\,\frac{\cos\alpha - bR}{b^2+1} - a\sin\frac{s}{a}\,\frac{d\cos\alpha}{ds},$$

$$\nu = \frac{b\cos\alpha + R}{b^2+1}.$$

Il est facile de calculer $\frac{\sin^2\alpha}{\varpi^2}$, c'est-à-dire $\sum\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2$.

On voit aisément que cette valeur de $\frac{\sin^2\alpha}{\varpi^2}$ ne contient que l'angle α et ses dérivées. D'où le résultat suivant, qui est pour ainsi dire évident *a priori* :

Dans toute surface réglée où la ligne de striction est une hélice, si toutes les génératrices coupent cette ligne sous un même angle, toutes ont le même paramètre de distribution.

La réciproque est fausse. Si la ligne de striction est une hélice et que le paramètre de distribution soit le même pour toutes les génératrices, le cosinus de l'angle sous lequel ces génératrices coupent l'hélice, au lieu d'être constant, est une fonction de s définie par une équation différentielle du second ordre.

4. En faisant $b = 0$ dans le cas précédent, l'hélice devient un cercle de striction. On a, dans ce cas,

$$\lambda = -\cos\alpha \sin\frac{s}{a} - a\cos\frac{s}{a}\frac{d\cos\alpha}{ds},$$

$$\mu = \cos\alpha\cos\frac{s}{a} - a\sin\frac{s}{a}\frac{d\cos\alpha}{ds},$$

$$\nu = \sin\alpha\sqrt{1 - a^2\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2}.$$

Si, en particulier, α est une constante, il est facile de voir qu'on a la surface gauche de révolution. Donc :

Toute surface gauche qui a un cercle pour ligne de striction et dont les génératrices coupent ce cercle sous le même angle est une surface gauche de révolution.

II. Second problème. — *La ligne de striction est plane.*

1. Prenant le plan de cette ligne pour plan des xy, on a

$$\psi(s) = 0;$$

alors la relation

$$f'(s)^2 + \varphi'(s)^2 + \psi'(s)^2 = 1$$

devient

$$f'(s)^2 + \varphi'(s)^2 = 1.$$

Nous poserons

$$f'(s) = \cos\omega,$$
$$\varphi'(s) = \sin\omega;$$

ω sera alors une fonction arbitraire de s, puisque la ligne de striction est une ligne plane arbitraire. Prenons pour α une fonction arbitraire de s.

Nous aurons alors les équations suivantes pour déterminer les fonctions de s que nous appelons λ, μ, ν,

$$\frac{d\lambda}{ds}\cos\omega + \frac{d\mu}{ds}\sin\omega = 0, \tag{1}$$

$$\lambda\cos\omega + \mu\sin\omega = \cos\alpha, \tag{2}$$

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1. \tag{3}$$

Différentions (2) en tenant compte de (1). Nous avons ainsi

$$-\lambda\sin\omega + \mu\cos\omega = -\sin\alpha\frac{d\alpha}{d\omega}. \tag{4}$$

Les équations (2) et (4) donnent λ et μ. Puis l'équation (3) donne ν.

Le problème est donc résolu. On obtient

$$\left\{\begin{aligned} \lambda &= \cos\omega\cos\alpha + \sin\omega\sin\alpha\frac{d\alpha}{d\omega}, \\ \mu &= \sin\omega\cos\alpha - \cos\omega\sin\alpha\frac{d\alpha}{d\omega}, \\ \nu &= \sin\alpha\sqrt{1-\left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)^2}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

En particulier, si α est une constante, nous aurons pour les équations de la surface

$$\left\{\begin{aligned} x &= \int\cos\omega\,ds + u\cos\omega\cos\alpha, \\ y &= \int\sin\omega\,ds + u\sin\omega\cos\alpha, \\ z &= u\sin\alpha. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Dans ces formules (6), ω représente une fonction arbitraire de s.

2. Pour calculer le paramètre de distribution des surfaces ci-dessus, différentions la formule (4).

Nous obtenons

$$-\frac{d\lambda}{ds}\sin\omega + \frac{d\mu}{ds}\cos\omega = \cos\alpha\frac{d\omega}{ds} - \frac{d}{ds}\left(\sin\alpha\frac{d\alpha}{d\omega}\right).$$

Ajoutons le carré de cette dernière équation au carré de l'équation (1). Nous avons ainsi

$$\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2 = \left[\cos\alpha\frac{d\omega}{ds} - \frac{d}{ds}\left(\sin\alpha\frac{d\alpha}{d\omega}\right)\right]^2.$$

Cette expression ne dépend que de α, de ω et de leurs dérivées, mais ne contient pas s directement.

Il en est évidemment de même de $\frac{d\nu}{ds}$, d'après la dernière des formules (5); et, par suite, il en est de même du paramètre de distribution.