NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉMILE PICARD

Sur le nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 5-13

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__5_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

SUR LE NOMBRE DES RACINES COMMUNES A PLUSIEURS ÉQUATIONS SIMULTANÉES;

PAR M. ÉMILE PICARD.

La recherche du nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées a fait autrefois l'objet des travaux de Cauchy, et de Liouville et Sturm. Plus récemment M. Kronecker a rencontré aussi cette question dans ses profondes recherches sur les caractéristiques des systèmes de fonctions de plusieurs variables (*Monatsberichte*, 1869). Je viens de traiter ce problème dans mon Cours à la Faculté des Sciences; un résumé de la Leçon que j'ai faite à ce sujet pourra peut-être intéresser les lecteurs de ce Recueil. Nous allons nous borner aux cas de deux et de trois équations simultanées; l'extension de la méthode à un nombre quelconque d'équations ne présenterait aucune difficulté.

1. Soient d'abord les deux équations

$$F_1(x,y) = 0,$$
$$F_2(x,y) = 0,$$

F_1 et F_2 étant des fonctions continues de x et y ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre dans une certaine région du plan. Soit dans cette région une courbe fermée C; je suppose qu'il n'y ait pas sur cette courbe de point correspondant à une solution commune aux deux équations précédentes.

Je considère l'intégrale curviligne

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_C P\,dx + Q\,dy,$$

prise le long du contour C et dans le sens direct, c'est-à-dire en ayant à sa gauche l'aire enveloppée. On a posé

$$P = \frac{\begin{vmatrix} F_1 & \dfrac{\partial F_1}{\partial x} \\ F_2 & \dfrac{\partial F_2}{\partial x} \end{vmatrix}}{F_1^2 + F_2^2}, \qquad Q = \frac{\begin{vmatrix} F_1 & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \\ F_2 & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix}}{F_1^2 + F_2^2}.$$

Un calcul immédiat montre que l'on a

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

On en conclut de suite, d'après un théorème bien connu, que l'intégrale sera nulle si P et Q sont continues à l'intérieur de C, c'est-à-dire s'il n'y a pas de racine commune aux deux équations à l'intérieur de ce contour.

Supposons maintenant qu'il y ait à l'intérieur de C *un* point A correspondant à une racine commune aux deux équations. Au lieu de calculer I en intégrant le long de C, nous pouvons intégrer le long d'une courbe quelconque entourant le point A. Or prenons ce point pour origine, et développons F_1 et F_2 d'après la formule de Taylor

$$F_1(x, y) = a_1 x + b_1 y + \ldots.$$
$$F_2(x, y) = a_2 x + b_2 y + \ldots;$$

je dis que l'intégrale ne changera pas de valeur, si nous réduisons F_1 et F_2 à ses termes du premier degré. En effet, concevons qu'on intègre le long d'un cercle de rayon ρ ayant A pour centre; nous aurons dans l'intégrale I un terme indépendant de ρ, et une partie devenant infiniment petite avec ρ. Le terme indépendant de ρ n'est autre que l'intégrale I où F_1 et F_2 sont remplacées par

$$a_1 x + b_1 y \quad \text{et} \quad a_2 x + b_2 y;$$

la seconde partie doit disparaître, puisque l'intégrale ne dépend pas de ρ.

Nous avons donc

$$I = \frac{D}{2\pi} \int_C \frac{x\,dx - y\,dx}{[(a_1 x + b_1 y)^2 + (a_2 x + b_2 y)^2]},$$

où

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Nous devons par suite calculer la valeur de l'intégrale précédente le long d'une courbe, d'ailleurs quelconque, enveloppant une fois l'origine. Pour faire rapidement le calcul, intégrons le long de l'ellipse

$$\text{(E)} \qquad (a_1 x + b_1 y)^2 + (a_2 x + b_2 y)^2 = 1.$$

En désignant par α et β les angles faits par la normale extérieure à la courbe avec les axes Ox et Oy, nous avons d'ailleurs d'une manière générale, en désignant par ds l'élément d'arc essentiellement positif,

$$dx = -\,ds\cos\beta, \qquad dy = ds\cos\alpha;$$

l'intégrale devient donc

$$I = \frac{D}{2\pi} \int (x\cos\alpha + y\cos\beta)\,ds,$$

ou, en appelant r le rayon vecteur allant du centre de l'ellipse à l'élément ds et φ l'angle aigu fait par ce rayon vecteur avec la normale

$$I = \frac{D}{2\pi} \int r\cos\varphi\,ds.$$

Mais il est manifeste que l'intégrale qui figure dans le second membre représente le double de l'aire de l'ellipse. Or on trouve de suite que l'aire de l'ellipse représentée par l'équation (E) est égale à

$$\frac{\pi}{|D|},$$

en désignant par $|D|$ la valeur absolue de D. On a donc

$$I = \frac{D}{|D|}$$

et, par suite, $I = \pm 1$, suivant que D est positif ou négatif.

Quant à D, ce n'est autre chose que la valeur du déterminant fonctionnel

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix},$$

au point A. Dans le cas donc où il y a à l'intérieur de C une seule racine, la valeur de l'intégrale I sera ± 1, suivant que le déterminant fonctionnel de F_1 et F_2 au point A est positif ou négatif.

S'il y a à l'intérieur de C un nombre quelconque de racines, on conclut immédiatement de ce qui précède le théorème suivant :

La valeur de I *est égale à la différence entre le nombre des racines contenues dans* C, *pour lesquelles le déterminant fonctionnel est positif, et celles pour lesquelles le déterminant fonctionnel est négatif.*

Il est clair que nous avons exclu de notre analyse le cas où pour une racine le déterminant fonctionnel serait nul, c'est-à-dire le cas des solutions multiples.

Remarquons encore que le théorème précédent aurait pu être établi plus rapidement, puisque l'on peut écrire

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_C d\left(\text{arc tang}\,\frac{F_2}{F_1}\right),$$

mais j'ai voulu suivre une marche entièrement analogue à celle dont je vais faire usage pour le cas de trois équations.

2. Soient maintenant les trois équations

$$F_1(x, y, z) = 0,$$
$$F_2(x, y, z) = 0,$$
$$F_3(x, y, z) = 0,$$

et S une surface fermée limitant un certain volume. Je considère l'intégrale suivante étendue à la surface F

$$I = \frac{1}{4\pi}\iint A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy,$$

où

$$A = \frac{\begin{vmatrix} F_1 & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ F_2 & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \\ F_3 & \dfrac{\partial F_3}{\partial y} & \dfrac{\partial F_3}{\partial z} \end{vmatrix}}{(F_1^2 + F_2^2 + F_3^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} F_1 & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ F_2 & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \\ F_3 & \dfrac{\partial F_3}{\partial y} & \dfrac{\partial F_3}{\partial z} \end{vmatrix}}{(F_1^2 + F_2^2 + F_3^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$C = \frac{\begin{vmatrix} F_1 & \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ F_2 & \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \\ F_3 & \frac{\partial F_3}{dx} & \frac{\partial F_3}{\partial y} \end{vmatrix}}{(F_1^2 + F_2^2 + F_3^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

On vérifie facilement que, quelles que soient les trois fonctions F_1, F_2 et F_3, on a l'identité

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Par conséquent, d'après une proposition bien connue, l'intégrale I ne change pas quand on déforme la surface d'intégration S sans rencontrer de points où A, B et C cessent d'être continus. Il en résulte que l'intégrale I sera nulle, s'il n'y a pas de racines communes aux trois équations à l'intérieur de S.

Supposons maintenant qu'il y ait à l'intérieur de S *un* point A correspondant à une racine commune aux trois équations. Au lieu de calculer I en intégrant le long de S, nous pouvons intégrer le long d'une surface quelconque entourant le point A. Or prenons ce point pour origine, et développons F_1, F_2, F_3 d'après la formule de Taylor

$$F_1(x, y, z) = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots,$$
$$F_2(x, y, z) = a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots,$$
$$F_3(x, y, z) = a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots.$$

Nous montrerions ici, comme plus haut, que l'intégrale ne change pas de valeur, si nous réduisons F_1, F_2 et F_3 à ses termes du premier degré. L'intégrale I devient alors

$$I = \frac{D}{4\pi}\int\int\frac{x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy}{\left\{\begin{array}{l}[(a_1x+b_1y+c_1z)^2 \\ \quad +(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)^2]^{\frac{3}{2}}\end{array}\right\}},$$

en posant

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

qui est supposé essentiellement différent de zéro.

En désignant par α, β, γ les cosinus des angles faits par la normale extérieure à la surface d'intégration avec les axes de coordonnées et en appelant $d\sigma$ l'élément essentiellement positif de la surface, nous devons poser

$$dy\,dz = \cos\alpha\,d\sigma, \qquad dz\,dx = \cos\beta\,d\sigma, \qquad dx\,dy = \cos\gamma\,d\sigma.$$

Si donc nous intégrons le long de l'ellipsoïde E

$$(\mathrm{E}) \quad \left\{\begin{array}{l}(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2 \\ \qquad\qquad +(a_3x+b_3y+c_3z)^2 = 1,\end{array}\right.$$

l'intégrale deviendra

$$I = \frac{D}{4\pi}\int\int(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,d\sigma,$$

ou, en appelant r le rayon vecteur allant du centre de l'ellipsoïde à l'élément $d\sigma$, et φ l'angle aigu fait par le rayon vecteur avec la normale,

$$I = \frac{D}{4\pi}\int\int r\cos\varphi\,d\sigma.$$

Mais l'intégrale double, qui figure dans le second membre, est égale à trois fois la somme des pyramides élémentaires de sommet A et de base $d\sigma$, et par conséquent égale à trois fois le volume de l'ellipsoïde E. Or on trouve sans peine que le volume de (E) est égal à

$$\frac{\frac{4}{3}\pi}{|D|};$$

par suite, on a encore l'égalité

$$I = \frac{D}{|D|}$$

et nous arrivons finalement au même énoncé que pour le cas de deux équations :

L'intégrale I *est égale à la différence entre le nombre des racines contenues dans* S, *pour lesquelles le déterminant fonctionnel*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{vmatrix}$$

est positif, et celles pour lesquelles ce déterminant est négatif.

On voit le rôle important joué par le signe du déterminant fonctionnel; c'est seulement quand ce déterminant aura un signe invariable à l'intérieur de S que les considérations précédentes donneront le nombre exact des racines. Ainsi, par exemple, pour le cas de deux équations

$$F_1(x, y) = 0,$$
$$F_2(x, y) = 0,$$

si $F_1 + iF_2$ est une fonction analytique de $x + iy$, le déterminant fonctionnel sera une somme de carrés; on aura donc exactement par l'intégrale I le nombre des racines situées dans un contour, et l'on retombera ainsi sur le théorème de Cauchy.

Pareillement, étant données les deux équations

$$P(x, y) = 0,$$
$$Q(x, y) = 0,$$

où P et Q désignent cette fois des fonctions analytiques, uniformes et continues des deux variables complexes x et y (nous posons $x = x' + ix''$, $y = y' + iy''$), ces deux équations reviennent aux quatre équations réelles

$$P_1(x', x'', y', y'') = 0,$$
$$P_2(x', x'', y', y'') = 0,$$
$$Q_1(x', x'', y', y'') = 0,$$
$$Q_2(x', x'', y', y'') = 0,$$

et l'on pourra représenter par une intégrale définie le nombre des racines communes à ces quatre équations, correspondant à des points situés à l'intérieur d'une surface S de l'espace à quatre dimensions (x', x'', y', y''); le déterminant fonctionnel des quatre fonctions P et Q a en effet un signe invariable.