NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CHARLES FABRY

Étude géométrique d'une famille de coniques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 56-76

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__56_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1889, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

ETUDE GEOMETRIQUE D'UNE FAMILLE DE CONIQUES;

PAR M. CHARLES FABRY,
Ancien Elève de l'Ecole Polytechnique

On sait que la perspective d'une cubique gauche sur un plan quelconque, en prenant pour point de vue un point de la courbe, est une conique. Si l'on prend pour point de vue successivement tous les points de la courbe, le plan restant fixe, on aura une famille de co-

niques; c'est cette famille de coniques que je me propose d'étudier.

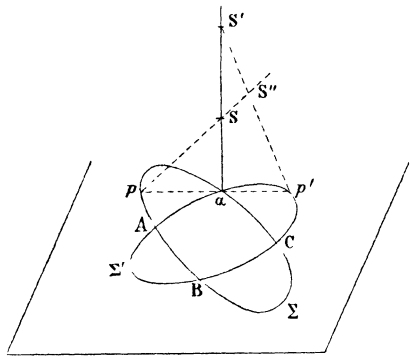
I.

1. Soient

P le plan fixe;
Σ, Σ' deux coniques quelconques données dans ce plan;
A, B, C trois de leurs points d'intersection;
α le quatrième.

Menons par α une droite non située dans le plan P, et prenons sur cette droite deux points S et S'. Les cônes, ayant respectivement pour sommets S et S' et pour directrices Σ et Σ', ont une génératrice commune SS'; la courbe commune à ces deux cônes se compose donc de cette droite et d'une cubique gauche qui passe par les points A, B, C, ainsi que par les points S et S'. Les deux coniques Σ et Σ' sont donc deux perspectives de cette cubique gauche. Nous allons chercher à définir

Fig. 1.



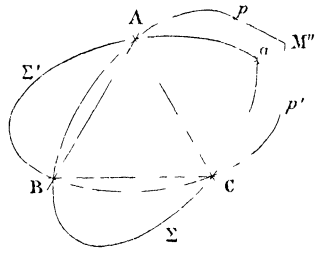
toutes les autres perspectives de la courbe. Cherchons un autre point de la cubique. Pour cela, je coupe par un plan passant par SS' (*fig.* 1). Ce plan coupe Σ

en p et Σ' en p'. Les droites pS, $p'S'$ se coupent en un point S'' qui est sur la cubique. La perspective de la cubique par rapport à ce point est une conique Σ'' passant par les cinq points A, B, C, p et p'.

Donc notre famille de coniques peut être définie de la manière suivante :

On donne un triangle ABC (*fig.* 2) *et deux coniques*

Fig. 2.



Σ *et* Σ' *circonscrites à ce triangle. Ces deux coniques se coupent en un quatrième point* α. *Par ce point on mène une sécante variable* $pp'\alpha$, *et l'on fait passer par les cinq points* A, B, C, p, p' *une conique.*

Deux coniques de la famille n'auront qu'un point commun autre que A, B, C.

Les coniques Σ et Σ' sont deux coniques quelconques de la famille. Donc :

Théorème I. — *Si l'on prend trois quelconques des coniques définies comme ci-dessus, les trois points d'intersection* (*autres que* A, B, C) *de ces coniques, prises deux à deux, sont en ligne droite.*

2. La conique Σ' doit passer par le point où la tangente à la cubique en S'' rencontre le plan P, et ce point est celui où la conique Σ'' touche l'enveloppe de nos co-

niques. Or ce point est à l'intersection de la tangente à Σ en p et de la tangente à Σ' en p'. Donc :

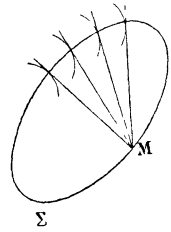
THÉORÈME II. — *Si* M″ *est l'intersection des tangentes à* Σ *et* Σ' *en* p *et* p', *la conique passant par* A, B, C, p, p' *passe en* M″, *et ce dernier point est celui où cette conique rencontre la conique infiniment voisine de la famille.*

La conique Σ passe au point où la tangente en S à la cubique perce le plan. Or ce point est à l'intersection de la conique Σ avec la tangente à Σ' au point α. On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME III. — Σ *étant une des coniques de la famille, les tangentes aux autres coniques de la famille au point où elles rencontrent la conique* Σ *passent par un même point* M, *qui est le point où la conique* Σ *touche l'enveloppe.*

De ce théorème résulte que, par aucun point du plan

Fig. 3.



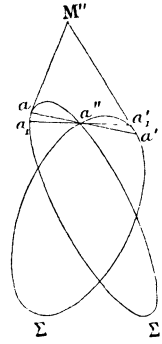
on ne peut faire passer plus de deux coniques de la famille.

3. Les théorèmes II et III sont des conséquences immédiates du théorème I.

Soient en effet Σ, Σ', Σ'' trois coniques de la famille : Σ' et Σ'' se coupent en a, Σ et Σ'' en a', Σ et Σ' en a''. On

sait que les points a, a', a'' sont en ligne droite. Soit Σ''_1 la conique infiniment voisine de Σ''; elle rencontre Σ en a'_1, Σ' en a_1 et Σ'' en M''. Les droites aa_1 et $a'a'_1$ sont

Fig. 4.



les tangentes en a et a' aux coniques Σ' et Σ. Or les points $M''aa_1$ et les points $M''a'a'_1$ sont en ligne droite, ce qui démontre le théorème II.

Le théorème III n'est qu'une autre manière d'énoncer le théorème II.

Ces deux théorèmes peuvent s'énoncer de la manière suivante :

Si deux coniques de la famille Σ et Σ' se coupent en α, la tangente à l'une d'elles en α passe par le point où l'autre touche l'enveloppe.

4. *Enveloppe de ces coniques.* — L'enveloppe de nos coniques est le lieu des traces des tangentes à leur cubique gauche sur le plan P, c'est-à-dire l'intersection du plan P et de la surface développable qui a la cubique gauche pour arête de rebroussement. L'enveloppe de nos coniques est donc une courbe du quatrième degré qui a trois points de rebroussement en A, B, C. Les tangentes

en ces points sont les traces sur le plan P des plans osculateurs à la cubique en A, B, C. Or ces plans osculateurs se coupent en un point du plan P. Donc :

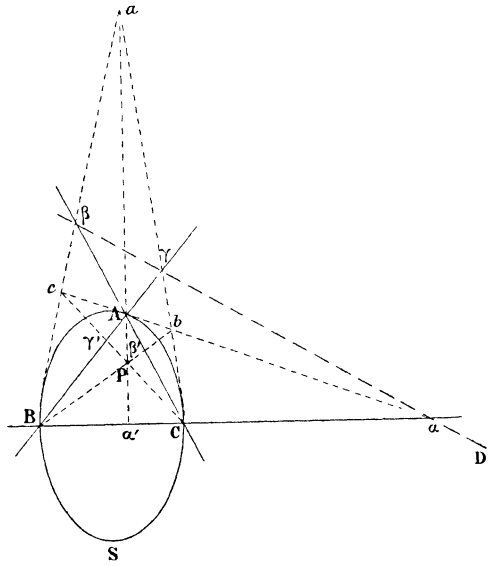
THÉORÈME IV. — *L'enveloppe de nos coniques (ou lieu des points tels que* M″) *est une courbe du quatrième degré, qui a pour points de rebroussement les points* A, B, C, *et les tangentes en ces points sont concourantes.*

II.

ÉTUDE DES CONIQUES, DROITES ET POINTS CORRESPONDANTS PAR RAPPORT A UN TRIANGLE.

5. Soient A, B, C un triangle, S une conique circon-

Fig. 5.



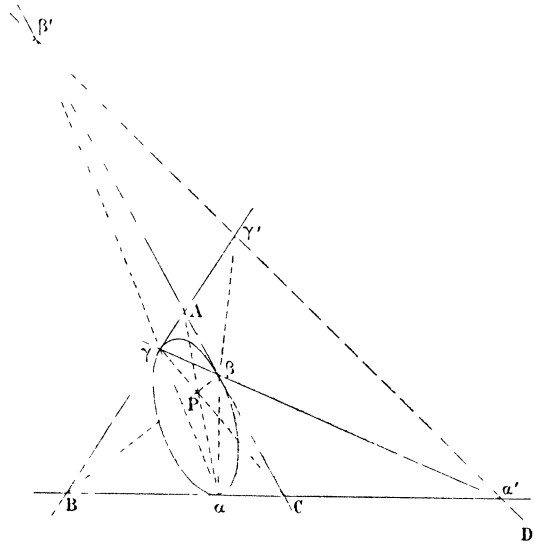
scrite. Nous allons définir cette conique d'une manière

symétrique par rapport aux éléments du triangle, au moyen d'une droite ou d'un point :

1° Soient $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ les tangentes en A, B, C à la conique S. Les points α, β, γ sont sur une droite D. A chaque conique S correspond une droite telle que D, et à chaque droite correspond une conique. La droite D peut donc servir à *définir* la conique.

2° Les tangentes $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ forment un triangle *abc*, et les droites Aa, Bb, Cc concourent en un point P.

Fig. 6.



A chaque conique correspond un point P. Réciproquement, si P est donné, on en déduira les points α', β', γ'. Or les points α, β, γ sont les conjugués harmoniques des premiers par rapport à BC, AC, AB, et les points α, β, γ ainsi construits seront en ligne droite. On aura alors les tangentes à la conique en A, B, C, et par suite

la conique. Le point P peut donc aussi servir à définir la conique.

De même, si T est une conique inscrite au triangle, on pourra la définir par un point ou par une droite; la *fig.* 6 fait suffisamment comprendre de quelle manière.

6. Prenons le triangle ABC pour triangle de référence. On démontrera sans difficulté les résultats suivants :

Si un point P a pour coordonnées x, y, z, la droite correspondante D aura pour équation

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} + \frac{Z}{z} = 0,$$

la conique correspondante S

$$\frac{x}{X} + \frac{y}{Y} + \frac{z}{Z} = 0,$$

la conique inscrite correspondante T

$$\sqrt{\frac{X}{x}} + \sqrt{\frac{Y}{y}} + \sqrt{\frac{Z}{z}} = 0.$$

Si l'on se donne une courbe que décrit le point P, il est facile de trouver l'enveloppe de la droite et des deux coniques correspondantes ou réciproquement.

Le Tableau suivant donne quelques-uns des résultats que l'on obtient ainsi :

Courbe decrite par un point P.	Enveloppe de la droite correspondante D	Enveloppe de la conique circonscr
Droite Δ : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0.$	Conique inscrite correspondante de Δ : $\sqrt{\frac{X}{a}}+\sqrt{\frac{Y}{b}}+\sqrt{\frac{Z}{c}}=0.$	Point correspondant $\frac{X}{a}=\frac{Y}{b}=\frac{Z}{c}.$
Conique circonscrite Σ : $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0.$	Point correspondant de Σ : $\frac{X}{a}=\frac{Y}{b}=\frac{Z}{c}.$	Courbe du quatrièm ayant pour points broussement les tr mets du triangle, gentes en ces points rant au point conjug et pour tangente d droite conjuguée de $\sqrt{\frac{a}{X}}+\sqrt{\frac{b}{Y}}+\sqrt{}$
Conique inscrite Θ : $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}=0.$	Cubique, etc. : $\sqrt[3]{\frac{X}{a}}+\sqrt[3]{\frac{Y}{b}}+\sqrt[3]{\frac{Z}{c}}=0.$	Droite correspondant $\frac{X}{a}+\frac{Y}{b}+\frac{Z}{c}=$

Toutes les réciproques de ces théorèmes sont vraies; par exemple, si une conique circonscrite au triangle ABC passe par un point fixe, le point correspondant de cette conique décrit la droite correspondante du point fixe.

7. Nous avons rencontré dans ce qui précède une courbe du quatrième degré ayant trois rebroussements. Il est facile de démontrer que cette courbe est la plus générale de cette espèce, c'est-à-dire que toute courbe du quatrième degré, qui a pour points de rebroussement les trois sommets du triangle de référence, est représentée par une équation de la forme

$$\sqrt{\frac{a}{X}} + \sqrt{\frac{b}{Y}} + \sqrt{\frac{c}{Z}} = 0.$$

Il suffit, pour le démontrer, de partir de l'équation la plus générale des courbes du quatrième degré et d'exprimer qu'elle a les trois sommets du triangle pour points de rebroussement. On en conclut ce théorème :

Théorème V. — *Si une courbe du quatrième degré a trois points de rebroussement* A, B, C :

1° *Les tangentes en ces points concourent en un point* P;

2° *La courbe a une tangente double qui est la droite correspondant au point* P *par rapport au triangle* ABC.

On verra de même que toute courbe du troisième degré, qui a un point double (coordonnées a, b, c) et trois points d'inflexion situés respectivement sur les côtés du triangle, avec les côtés de ce triangle pour tangentes d'inflexion, a pour équation

$$\sqrt[3]{\frac{X}{a}} + \sqrt[3]{\frac{Y}{b}} + \sqrt[3]{\frac{Z}{c}} = 0$$

ou

$$\left(\frac{X}{a}+\frac{Y}{b}+\frac{Z}{c}\right)^3-27\frac{XYZ}{abc}=0.$$

On en conclut ce théorème :

Théorème VI. — *Si une courbe du troisième degré a un point double et trois points d'inflexion :*

1° *Les trois points d'inflexion sont en ligne droite ;*

2° *La droite qui joint ces points est la droite conjuguée du point double par rapport au triangle formé par les tangentes d'inflexion.*

Les théorèmes V et VI se déduisent l'un de l'autre par les polaires réciproques.

Théorème VII. — *Si deux coniques* S *et* S′ *circonscrites au triangle* ABC *ont pour points correspondants* P *et* P′, *le point d'intersection de ces deux coniques est le point correspondant à la droite* PP′.

Car toutes les coniques dont les points correspondants sont sur PP′ passent par un même point, qui est le point correspondant à PP′.

On démontrera de même :

Théorème VIII. — *Si deux coniques* T *et* T′ *inscrites au triangle* ABC *ont pour droites correspondantes* D *et* D′, *la tangente commune à ces coniques est la droite correspondant au point commun à* D *et* D′.

Supposons qu'un point décrive une courbe P. La conique circonscrite correspondant à ce point enveloppera une courbe C. Le point où chacune de ces coniques rencontre la conique infiniment voisine est le point conjugué d'une tangente à la courbe P. De là ce théorème :

Théorème IX. — *Supposons qu'un point décrive une*

courbe P, *la conique circonscrite correspondante de ce point enveloppera une courbe* C. *Si une droite reste tangente à la courbe* P, *son point conjugué décrira* C.

On démontrera de même le théorème suivant :

Théorème X. — *Supposons qu'une droite reste tangente à une courbe* D. *La conique inscrite correspondante enveloppera une courbe* T. *Si un point décrit* T, *sa droite correspondante décrira* D.

Les réciproques sont aussi vraies.

Par exemple, si une conique inscrite reste tangente à la conique circonscrite $\frac{a}{X} + \frac{b}{Y} + \frac{c}{Z} = 0$, sa droite conjuguée enveloppera la quartique $\sqrt{\frac{a}{X}} + \sqrt{\frac{b}{Y}} + \sqrt{\frac{c}{Z}} = 0$.

Une conique circonscrite au triangle ABC et la conique inscrite correspondante sont bitangentes, et la corde des contacts est la droite correspondant à ces coniques. En effet, les équations des deux coniques sont :

$$aYZ + bZX + cXY = 0$$

et

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 2\frac{YZ}{bc} - 2\frac{ZX}{ac} - 2\frac{XY}{ab} = 0,$$

et cette dernière équation peut s'écrire

$$\left(\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} + \frac{Z}{c}\right)^2 - \frac{4}{abc}(aYZ + bZX + cXY) = 0,$$

ce qui démontre le théorème. Les points de contact des deux coniques sont imaginaires. On démontre sans difficulté que, inversement, si deux coniques, l'une inscrite, l'autre circonscrite au triangle ABC, sont bitangentes, elles sont correspondantes et la corde des contacts est la droite correspondante des deux coniques.

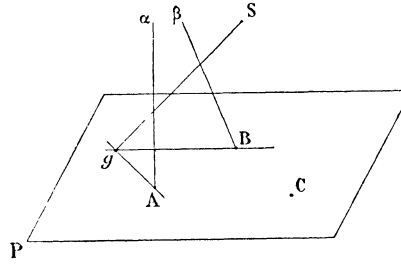
III.

9. Revenons à la famille de coniques obtenue en prenant les perspectives d'une même courbe gauche du troisième degré par rapport aux différents points de la courbe.

Toutes ces coniques sont, comme nous l'avons vu, circonscrites à un même triangle ABC. Cherchons le lieu du pôle de l'un des côtés du triangle par rapport à ces coniques.

Soient A, B, C les trois points où la cubique rencontre le plan P; $A\alpha$, $B\beta$ les tangentes en A et B à la cubique. Soit S un autre point de la cubique. La perspective de la courbe par rapport à ce point sera une conique passant en A, B, C, et dont les tangentes en A

Fig. 7.



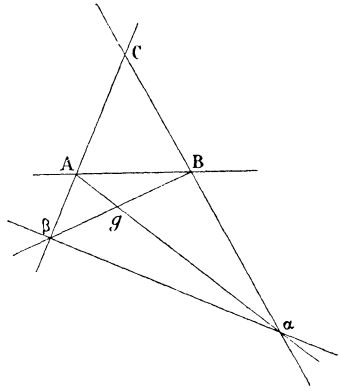
et B seront les perspectives des droites $A\alpha$, $B\beta$. Le pôle g de AB par rapport à cette conique sera donc la trace sur le plan P de la droite passant par S et rencontrant les deux droites $A\alpha$, $B\beta$. Or, si une droite rencontre une cubique gauche et deux de ses tangentes, elle engendre un hyperboloïde; car, si l'on considère trois droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ et que sur ces trois droites on construise un hyperboloïde, il aura sept points communs

avec la cubique et la contiendra tout entière; donc toute droite rencontrant $A\alpha$, $B\beta$ et la cubique sera située sur cet hyperboloïde, car elle aura trois points communs avec lui. Donc :

Théorème XI. — *Le lieu des pôles de l'un des côtés du triangle* ABC *par rapport aux coniques de la famille est une conique circonscrite à ce triangle.*

Réciproquement, si l'on a une famille de coniques circonscrites à un triangle ABC et telles que le lieu des pôles du côté AB soit une conique S circonscrite

Fig. 8.



à ABC, on peut les considérer comme les perspectives d'une même cubique gauche, que l'on obtiendra en faisant passer un hyperboloïde par S et en traçant une cubique placée sur cet hyperboloïde et tangente à deux génératrices de même système en A et B.

Si g est le pôle de la droite AB par rapport à une de nos coniques, la droite correspondant à cette conique sera $\alpha\beta$. Si x, y, z sont les coordonnées du point g, la droite $\alpha\beta$ aura pour équation $\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} - \frac{Z}{z} = 0$.

Or le lieu du point g est une conique circonscrite au triangle ABC. On a donc $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$. Donc :

Théorème XII. — *Les droites correspondant aux coniques de notre famille passent par un point fixe.*

Les points correspondants de ces mêmes coniques décrivent une conique circonscrite au triangle ABC.

On en conclut que l'enveloppe est une courbe du quatrième degré ayant quatre points de rebroussement. On voit de plus que les tangentes de rebroussement de l'enveloppe concourent en un point, qui est le point autour duquel tournent les droites correspondantes des coniques de la famille. Cette courbe du quatrième degré peut aussi être engendrée par les points correspondants des tangentes à une conique circonscrite au triangle ABC.

Il résulte aussi du théorème XII que par tout point du plan passent deux coniques de la famille, car l'enveloppe des droites correspondant aux coniques circonscrites passant par un même point est une conique.

Les réciproques sont vraies, c'est-à-dire que si des coniques circonscrites à un triangle ABC sont tangentes à une courbe du quatrième degré ayant A, B, C pour points de rebroussement, ou si leurs droites correspondantes passent par un point fixe, ou si leurs points correspondants décrivent une conique passant par A, B, C, on peut considérer ces coniques comme les perspectives d'une même cubique gauche. En se reportant au théorème I, on aura le théorème suivant :

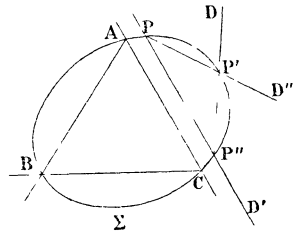
Théorème XIII. — *Si les droites correspondantes de trois coniques circonscrites à un triangle* ABC *sont concourantes, les trois points d'intersection (autres*

que A, B, C) *de ces coniques prises deux à deux sont en ligne droite, et réciproquement.*

Si les points correspondants des trois coniques circonscrites au triangle ABC *sont sur une même conique circonscrite à ce même triangle, les points d'intersection (autres que* A, B, C) *de ces coniques, prises deux à deux, sont en ligne droite, et réciproquement.*

10. Soient Σ une conique circonscrite au triangle ABC et P, P′, P″ trois points de cette conique. Considérons les trois coniques circonscrites S, S′, S″ correspondant aux points P, P′, P″. Nous venons de voir que les

Fig. 9.



points d'intersection de ces coniques prises deux à deux sont en ligne droite. Or ces points d'intersection sont les points conjugués des droites PP′, P′P″, PP″. Puisqu'ils sont en ligne droite, ces trois droites sont tangentes à une même conique inscrite au triangle. De là ce théorème :

Théorème XIV. — *Si deux triangles sont inscrits à une conique, leurs six côtés sont tangents à une même conique.*

On démontrera d'une manière analogue :

Théorème XV. — *Si deux triangles sont circon-*

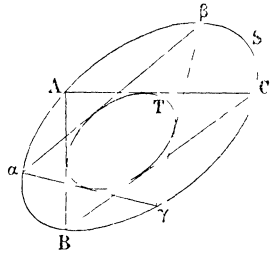
scrits à une même conique, leurs six sommets sont sur une même conique.

10. De ces théorèmes on peut déduire le théorème de Poncelet :

Étant données deux coniques S *et* T, *s'il existe un triangle* ABC *inscrit à* S *et circonscrit à* T, *il en existe une infinité.*

Prenons en effet un point β sur S, et de ce point menons les tangentes $\beta\alpha$, $\beta\gamma$ à T, et joignons $\alpha\gamma$. D'après le théorème XIV, il existe une conique tangente aux six

Fig. 10.



côtés des deux triangles ABC, $\alpha\beta\gamma$; or cette conique se confond avec T, car elles sont tangentes aux cinq mêmes droites; donc, etc.

Inversement, du théorème de Poncelet on déduira facilement tous les théorèmes que nous avons démontrés, sans avoir recours à la courbe gauche qui nous a servi de base.

IV.

Nous allons examiner quelques cas particuliers des théorèmes que nous avons démontrés.

11. Nous avons vu que l'on pouvait définir la famille

des coniques au moyen de deux coniques Σ et Σ' (n° 1). Deux des points A, B, C pourraient être imaginaires sans que les théorèmes que nous avons démontrés cessent d'être vrais.

Supposons, en particulier, que ces deux coniques soient des cercles, le théorème XI devient alors le suivant :

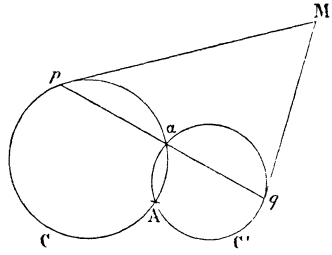
Si trois cercles ont un point commun A *et si les trois autres points communs à ces cercles pris deux à deux sont en ligne droite, leurs trois centres et le point* A *sont sur un même cercle, et réciproquement.*

Ce théorème est facile à démontrer par la Géométrie élémentaire ; c'est une conséquence immédiate du théorème de Simpson.

On en conclura facilement les théorèmes suivants, qui sont toujours des cas particuliers de théorèmes déjà démontrés :

Soient C *et* C' *deux cercles,* A *et* α *leurs points d'intersection. Par* α *on mène une sécante variable* αpq,

Fig. 11.



et l'on trace le cercle circonscrit au triangle Apq. *On a ainsi une famille de cercles :*

1° *Le lieu de leurs centres est un cercle passant en* A ;

2° *Les points d'intersection (autres que* A) *de trois quelconques de ces cercles pris deux à deux sont en ligne droite;*

3° *Le cercle passant par* A, p, q *passe en* M, *et le point* M *est le point où ce cercle touche l'enveloppe des cercles analogues;*

4° *Cette enveloppe (ou lieu des points* M) *est un limaçon de Pascal qui a un point de rebroussement en* A.

12. Nous ne ferons que signaler le cas où le plan de la figure serait tangent à la cubique gauche. On aurait alors une famille de coniques passant par un point A et tangentes à une droite D en un point donné B. L'enveloppe serait alors une courbe du troisième degré ayant un point de rebroussement en A, un point d'inflexion en B avec D pour tangente en ce point.

Comme cas particulier, B pourrait être à l'infini; les coniques auraient alors une asymptote commune.

Enfin, si la droite D allait elle-même à l'infini, on aurait une famille de paraboles ayant un point commun A, et ayant même direction d'axe. Leur enveloppe serait une cubique de la forme $y^2 = x^3$, ayant le point A pour point de rebroussement. De là ce théorème :

On donne la courbe $y^2 = x^3$, *et l'on considère des paraboles ayant leurs axes parallèles à* Oy, *passant à l'origine et tangentes à la courbe donnée. Si l'on prend trois quelconques de ces paraboles, les points d'intersection des paraboles prises deux à deux sont en ligne droite.*

13. Le plan de la figure peut aussi être osculateur à la cubique gauche. On a alors une famille de coniques osculatrices en un même point A. Les points d'inter-

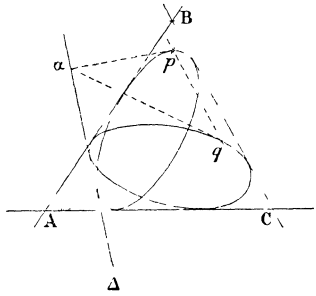
section de trois quelconques de ces coniques prises deux à deux sont encore en ligne droite. Dans ce cas, l'enveloppe est une conique, tangente en A à toutes les coniques de la famille.

V.

14. En transformant par polaires réciproques les propriétés que nous avons démontrées jusqu'ici, nous allons obtenir une nouvelle série de propriétés. Nous ferons observer d'abord que, si une conique est circonscrite à un triangle ABC, sa conjuguée sera une conique inscrite au triangle conjugué du premier, A′B′C′, et que la droite et le point correspondant à la première conique par rapport au triangle ABC auront pour conjugués le point et la droite correspondant à la deuxième conique par rapport à A′B′C′.

Ceci posé, soient ABC un triangle, T et T′ deux coniques inscrites à ce triangle, Δ leur quatrième tangente

Fig. 12.



commune. Prenons sur cette droite un point α, et menons de α les tangentes αp, αq aux coniques T et T′, puis construisons la conique T″ inscrite au triangle ABC et tangente aux droites αp, αq. Lorsque le point α se

déplace sur Δ, nous aurons une famille de coniques qui jouiront des propriétés suivantes :

1° Si l'on prend trois quelconques de ces coniques, les tangentes communes de ces coniques prises deux à deux sont concourantes.

2° La conique T″ tangente à AB, BC, AC, αp, αq est tangente à pq, et pq est la tangente à l'enveloppe de ces coniques au point où elle est touchée par T″.

Ou, ce qui revient au même, si Δ est la tangente commune à deux coniques T et T′ de la famille, le point de contact de Δ et de T est sur la tangente à T′ au point où elle touche l'enveloppe.

3° L'enveloppe de ces coniques (ou enveloppe des droites pq) est une courbe du troisième degré, qui a pour tangentes de rebroussement les trois côtés du triangle ABC, et qui a un point double.

4° La polaire de l'un des sommets du triangle ABC enveloppe une conique inscrite à ce triangle.

5° Les points correspondant à ces coniques par rapport au triangle ABC sont en ligne droite.

6° Si les points correspondants de trois coniques inscrites à un triangle sont en ligne droite, les tangentes communes à ces coniques prises deux à deux sont en ligne droite, et réciproquement.

Citons comme cas particulier du quatrième théorème :

Si trois paraboles ayant un foyer commun ont leurs sommets en ligne droite, les tangentes communes à ces paraboles prises deux à deux sont concourantes, et réciproquement.

La démonstration élémentaire de cette proposition n'offre aucune difficulté.