NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

M. D'OCAGNE

Une application des coordonnées parallèles

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 568-573

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__568_0>

UNE APPLICATION DES COORDONNÉES PARALLÈLES;

PAR M. M. D'OCAGNE.

Au cours de ses intéressantes recherches géométriques sur les figures imaginaires, M. Tarry a rencontré le théorème suivant :

Si les sommets M *et* N *d'un triangle* MNP *de similitude constante, dont le côté* MN *enveloppe une courbe de classe* m, *décrivent deux droites parallèles, le sommet* P *décrit une courbe d'ordre* m.

M. Tarry, en nous communiquant ce théorème qu'il a obtenu par voie synthétique, ajoutait que sa démonstration analytique devait sans doute se prêter à l'emploi de nos coordonnées parallèles.

Nous allons faire voir, en effet, que cette démonstration s'obtient très simplement par l'emploi combiné des coordonnées parallèlei de droites et des coordonnées parallèles de points pour la définition et les propriétés desquelles nous renvoyons le lecteur aux Mémoires que nous leur avons consacrés [1].

D'ailleurs la solution analytique a cet avantage sur la solution géométrique que non seulement elle fait con-

[1] Pour les *coordonnées parallèles de droites*, voir : *Étude de deux systèmes simples de coordonnées tangentielles* (*Nouvelles Annales*, 1884 et 1885) ou la brochure *Coordonnées parallèles et axiales* (Gauthier-Villars, 1885), dont ce Mémoire a fourni la majeure partie.

Pour les *coordonnées parallèles de points* : *Nouvelles Annales*, 1887, p. 493.

naître l'ordre de la transformée, mais qu'elle détermine complètement celle-ci.

Le problème que nous nous proposons de résoudre ici est le suivant :

Les sommets M *et* N *d'un triangle* MNP *de similitude constante décrivent deux droites parallèles. Connaissant l'enveloppe du côté* MN, *trouver le lieu décrit par le sommet* P.

Appelons Au et Bv les droites parallèles décrites par les sommets M et N. Nous les prendrons pour axes de coordonnées en supposant l'axe AB des origines perpendiculaire à leur direction commune.

Soient alors u et v les coordonnées parallèles de la droite MN, p et q celles du point P. Celles du côté MP étant u et v', celles du côté NP, u' et v, on a, puisque le point P est à la rencontre de ces droites,

$$pu + qv' = 1,$$
$$pu' + qv = 1,$$

d'où

$$v' = \frac{1 - pu}{q},$$
$$u' = \frac{1 - qv}{p}.$$

Dès lors, si h est la tangente de l'angle constant NMP, on a, d'après la formule (2) de notre premier Mémoire ([1]), en posant $AB = d$,

$$h = \frac{d\left[v - u - \left(\frac{1 - pu}{q} - u\right)\right]}{d^2 + (v - u)\left(\frac{1 - pu}{q} - u\right)}$$

([1]) *Nouvelles Annales*, 1884 ; p. 413.

ou

$$(1) \qquad h = \frac{d(pu + qv - 1)}{d^2 q + (v - u)[1 - (p + q)u]}.$$

De même, k étant la tangente de l'angle constant MNP,

$$(2) \qquad k = \frac{d(-pu - qv + 1)}{d^2 p + (v - u)[-1 + (p + q)v]}.$$

De (1) et (2) il faut tirer u et v en fonction de p et q. A cet effet, posons

$$(3) \qquad pu + qv - 1 = \varepsilon,$$

$$(4) \qquad v - u = \eta,$$

ce qui donne

$$(5) \qquad (p + q)u - 1 = \varepsilon - q\eta,$$

$$(6) \qquad (p + q)v - 1 = \varepsilon + p\eta.$$

Les équations (1) et (2) deviennent alors

$$(7) \qquad hq\eta^2 - h\varepsilon\eta - d\varepsilon + h\,d^2 q = 0,$$

$$(8) \qquad kp\eta^2 + k\varepsilon\eta + d\varepsilon + k\,d^2 p = 0.$$

Multiplions la première par $-kp$, la seconde par hq, et faisons la somme; il vient, après réduction et suppression du facteur commun ε,

$$hk(p + q)\eta + (kp + hq)\,d = 0,$$

d'où

$$(9) \qquad \eta = -\frac{d(kp + hq)}{hk(p + q)}.$$

Les équations (7) et (8) additionnées membre à membre donnent

$$(kp + hq)\eta^2 - (h - k)\eta\varepsilon + d^2(kp + hq) = 0.$$

Substituons à η, dans cette équation, sa valeur (9);

nous avons, après réduction,

$$d(kp + hq)^2 + hk(h - k)(p + q)\varepsilon + dh^2k^2(p + q)^2 = 0,$$

d'où

$$(10) \qquad \varepsilon = d\,\frac{(kp + hq)^2 + h^2k^2(p + q)^2}{hk(k - h)(p + q)}.$$

Portant les valeurs (9) et (10) de η et ε dans (5), on a

$$u = \frac{\left\{\begin{array}{l} hk(k-h)(p+q) + d(kp+hq)^2 \\ \quad + dh^2k^2(p+q)^2 + dq(k-h)(kp+hq) \end{array}\right\}}{hk(k-h)(p+q)^2}.$$

Rapprochons, au numérateur, le quatrième terme du second et remarquons que

$$(kp + hq)^2 + q(k - h)(kp + hq) = (kp + hq)k(p + q).$$

Nous avons alors

$$u = \frac{h(k - h) + d(kp + hq) + dh^2k(p + q)}{h(k - h)(p + q)}$$

ou

$$(11) \qquad u = \frac{dk(h^2 + 1)p + dh(hk + 1)q + h(k - h)}{h(k - h)(p + q)}.$$

De même, on tire de (6)

$$(12) \qquad v = \frac{dk(hk + 1)p + dh(k^2 + 1)q + k(k - h)}{k(k - h)(p + q)}.$$

Les formules (11) et (12) résolvent le problème que nous avions en vue. On voit que ces substitutions faites dans une équation algébrique de degré m, en u et v, donnent une équation de degré m, en p et q. Donc :

L'ordre du lieu décrit par le sommet P *est égal à la classe de la courbe enveloppée par le côté* MN.

En particulier : si le côté MN pivote autour d'un point fixe, le sommet P décrit une droite; si le côté MN reste tangent à une conique, le sommet P décrit une conique; etc.

On peut particulariser le problème : par exemple, en supposant les angles en M et en N tous deux égaux à $\frac{\pi}{4}$. Alors $h = -1$, $k = 1$, et les formules (11) et (12) deviennent

$$u = \frac{1 - dp}{p + q}, \qquad v = \frac{1 - dq}{p + q}.$$

Par suite, si le côté MN reste tangent à la conique

$$(13) \qquad A u^2 + 2 B uv + C v^2 + 2 D u + 2 E v + F = 0,$$

le sommet P décrit la conique

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} (A d^2 - 2 D d + F) p^2 + 2 [B d^2 - (D + E) d + F] pq \\ \quad + (C d^2 - 2 E d + F) q^2 + 2 [(A + B) d - (D + E)] p \\ \quad\quad - 2 [(B + C) d - (D + E)] q + A + 2 B + C = 0. \end{array} \right.$$

Quelle est la condition pour que cette conique soit un cercle? Si nous écrivons l'équation (14)

$$A' p^2 + 2 B' pq + C' q^2 + 2 D' p + 2 E' q + F' = 0,$$

nous savons (¹) que cette condition se traduit par les relations

$$A' - 2 B' + C' = d^2 F',$$
$$D' - E' = 0.$$

Mais ici

$$A' + 2 B' + C' = d^2 (A - 2 B + C),$$
$$D' - E' = C - A,$$
$$F' = A + 2 B + C.$$

(¹) *Nouvelles Annales*, 1887; p. 498. Il faut remarquer que, dans la Note que nous citons ici, nous avons pris pour unité de longueur la demi-distance des origines, ce qui modifie légèrement la forme des résultats.

On doit donc avoir

$$A = C \qquad \text{et} \qquad B = 0,$$

c'est-à-dire que l'équation (13) doit avoir la même forme que l'équation générale du cercle en coordonnées rectangulaires. Nous avons fait voir ([1]) qu'une telle équation represente l'hyperbole complémentaire d'une hyperbole tangente aux axes Au et Bv.

Donc, *lorsque les angles* M *et* N *sont tous deux égaux à* $\frac{\pi}{4}$, *la condition pour que le lieu du sommet* P *soit un cercle est que l'enveloppe du côté* MN *soit une hyperbole dont la complémentaire soit tangente aux droites parallèles décrites par les sommets* M *et* N.

Nous pourrions signaler encore bien d'autres cas particuliers dignes d'intérêt; nous nous bornerons au précédent qui fait bien ressortir l'avantage, pour la question qui nous occupe, de l'emploi des coordonnées parallèles.