Nouvelles annales de mathématiques

J.-B. Pomey

Calcul de la capacité électrostatique de deux fils télégraphiques parallèles

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 564-567

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__564_0>

CALCUL DE LA CAPACITÉ ÉLECTROSTATIQUE DE DEUX FILS TÉLÉGRAPHIQUES PARALLÈLES;

PAR M. J.-B. POMEY.

Nous calculerons cette capacité pour l'unité de longueur. Le problème est donc ramené à un problème de Géométrie plane, car on peut faire abstraction dans le calcul de la dimension parallèle à l'axe des fils.

Formons d'abord l'équation de Laplace en coordonnées bipolaires. Nous exprimerons que le flux de force total qui sort d'un élément de surface est nul. Cet élément de surface sera le petit parallélogramme compris entre les quatre cercles décrits des pôles O et O' respectivement avec les rayons r, $r + dr$, r', $r' + dr'$. Soient donc

O et O' les deux pôles;
a leur distance;
φ, θ, θ' les angles du triangle qui a pour côtés a, r', r, et respectivement opposés à ces côtés;
enfin V le potentiel.

L'un des côtés du parallélogramme élémentaire a pour longueur

$$r \frac{\partial \theta}{\partial r'} dr'.$$

La force normale à ce côté a pour intensité

$$\frac{dV}{dr} = \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial r'} \cos \varphi.$$

En tenant compte des relations

$$r'^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta,$$

$$\frac{r}{\sin\theta'} = \frac{r'}{\sin\theta} = \frac{a}{\sin\varphi},$$

on voit que le flux de force qui traverse ce côté a pour expression

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial r'}\cos\varphi\right)\frac{1}{\sin\varphi}\,dr'.$$

Le flux qui traverse dans le même sens le côté opposé a pour valeur l'expression précédente, augmentée de sa différentielle relative à un accroissement de r égal à dr.

Or la relation

$$a^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\varphi,$$

différentiée par rapport à r et φ, puis r' et φ, donne

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{r'\cos\varphi - r}{rr'\sin\varphi}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial r'} = \frac{r\cos\varphi - r'}{rr'\sin\varphi}.$$

En portant ces valeurs dans l'expression de la différentielle du flux précédent, et sommant les flux qui traversent les quatre côtés du parallélogramme élémentaire, on trouve, pour l'équation de Laplace, au facteur $\frac{dr\,dr'}{\sin\varphi}$ près,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial r'^2} + 2\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial r'}\,\frac{r^2 + r'^2 - a^2}{2rr'} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r'}\frac{\partial V}{\partial r'} = 0.$$

Posons $V = f(u)$.

Pour $u = r$, on a

$$V = A\log r + B.$$

Pour $u = r^2 - r'^2$, on a

$$V = A(r^2 - r'^2) + B.$$

Pour $u = r + r'$, on a

$$V = A \log(u + \sqrt{u^2 - a^2}) + B.$$

On obtient ainsi les solutions qui répondent à des cylindres circulaires concentriques, à des plans parallèles, à des cylindres homofocaux.

Nous allons employer la solution $V = A \log \frac{r}{r'} + B$.

Soient

A, B, R, R', d les centres, les rayons, la distance des centres des deux cercles de section droite par un même plan des deux fils télégraphiques parallèles;

$\frac{r}{r'} = C_1$, $\frac{r}{r'} = C_2$ les équations de ces deux cercles;

V_1, V_2 les potentiels des deux fils;

σ la densité en un point M de l'un des fils, A par exemple;

dn l'élément de normale extérieure en M;

θ l'angle MAO;

ψ, ψ' les angles de dn avec OM et MO'.

On aura

$$V = \frac{V_1 - V_2}{\log \frac{C_1}{C_2}} \log \frac{r}{r'} - V_2 \log C_1 - \log C_2,$$

et, d'après l'équation de Coulomb,

$$4\pi\sigma = -\frac{dV}{dn} = -\frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dn} - \frac{\partial V}{\partial r'}\frac{dr'}{dn}$$

ou

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{V_1 - V_2}{\log \frac{C_1}{C_2}}\left(\frac{\cos\psi}{r} - \frac{\cos\psi'}{r'}\right).$$

La quantité d'électricité répartie sur l'unité de longueur du cylindre A a pour expression

$$e = \int_0^{2\pi} \sigma R\, d\theta.$$

Or on a

$$\int_0^{2\pi} \frac{R\, d\theta \cos\psi}{r} = 2\pi, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{R\, d\theta \cos\psi'}{r'} = 0.$$

En effet, $\frac{R\, d\theta \cos\psi}{r}$ est l'angle sous lequel on voit du point O l'élément $R\, d\theta$. Comme le point O est intérieur au cercle, la somme de ces angles est 2π.

De même, $\frac{R\, d\theta \cos\psi'}{r'}$ est l'angle sous lequel on voit du point O' l'élément $R\, d\theta$. Comme les éléments du cercle se masquent l'un l'autre, O' étant extérieur, la somme de ces angles est nulle.

Donc il vient

$$e = -\frac{V_1 - V_2}{2 \log \frac{C_1}{C_2}}.$$

Or, si l'on peut supposer les diamètres des fils infiniment petits par rapport à leur distance, on voit que l'on a

$$a = d, \qquad C_1 = \frac{R}{a}, \qquad C_2 = \frac{a}{R},$$

et la capacité par unité de longueur est alors

$$\frac{1}{2 \log \frac{d^2}{RR'}}.$$