Nouvelles annales de mathématiques

Ch. Biehler

Sur les équations auxquelles conduit le problème de la division des arcs en trigonométrie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 552-563

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__552_1>

SUR LES ÉQUATIONS AUXQUELLES CONDUIT LE PROBLÈME DE LA DIVISION DES ARCS EN TRIGONOMÉTRIE;

PAR M. CH. BIEHLER.

1. Nous nous proposons de démontrer, par voie purement analytique, la réalité de toutes les racines des quatre équations dont dépendent $\cos\frac{a}{m}$ et $\sin\frac{a}{m}$ quand $\cos a$ ou $\sin a$ sont donnés.

Nous ferons usage, pour cela, de la proposition suivante :

L'équation de degré m

$$V_m = (x + \sqrt{x^2 - 1})^m + (x - \sqrt{x^2 - 1})^m = 0$$

a toutes ses racines réelles et comprises entre -1 *et* $+1$.

Cette propriété résulte immédiatement de la relation

$$V_m - 2xV_{m-1} + V_{m-2} = 0,$$

qui lie trois fonctions V; elle montre que la suite V_m, V_{m-1}, ..., V_0 constitue une suite de Sturm; pour $x = -1$, cette suite ne présente que des variations, et, pour $x = +1$, que des permanences.

Cela posé, étudions l'équation qui donne $\cos\frac{a}{m}$, quand on connaît $\cos a$.

I. — Équation qui donne $\cos\frac{a}{m}$, étant donné $\cos a$.

2. Nous partirons, pour la former, de la relation

$$2\cos a = \left(\cos\frac{a}{m} + i\sin\frac{a}{m}\right)^m + \left(\cos\frac{a}{m} - i\sin\frac{a}{m}\right)^m.$$

En posant

$$\cos a = A, \qquad \cos\frac{a}{m} = x,$$

elle devient

$$2A = (x + \sqrt{x^2 - 1})^m + (x - \sqrt{x^2 - 1})^m$$

ou bien

$$V_m - 2A = 0.$$

Soit $\Phi(x)$ le premier membre de cette équation

$$\Phi(x) = V_m - 2A,$$

d'où, en prenant les dérivées des deux membres,

$$\Phi'(x) = V'_m.$$

Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ les m racines réelles et inégales de l'équation $V_m = 0$ et par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}$ les $m-1$ racines de l'équation dérivée $V'_m = 0$; ces racines sont aussi réelles et nous les supposerons rangées dans l'ordre croissant de grandeur. Nous allons établir que ces quantités, qui sont aussi les racines de $\Phi'(x) = 0$, substituées dans $\Phi(x)$, donnent des résultats alternativement de signes contraires; d'après un théorème, conséquence du théorème de Rolle, on aura ainsi établi que toutes les racines de l'équation $\Phi(x) = 0$ sont réelles et inégales.

De l'égalité

$$V_m = (x + \sqrt{x^2 - 1})^m + (x - \sqrt{x^2 - 1})^m,$$

on tire

$$V'_m = \frac{m}{\sqrt{x^2 - 1}} \left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^m - (x - \sqrt{x^2 - 1})^m \right].$$

Si donc β est l'une quelconque des racines de $V'_m = 0$, on aura

$$0 = (\beta + \sqrt{\beta^2 - 1})^m - (\beta - \sqrt{\beta^2 - 1})^m,$$
$$V_m(\beta) = (\beta + \sqrt{\beta^2 - 1})^m + (\beta - \sqrt{\beta^2 - 1})^m$$

ou bien, en ajoutant,

$$V_m(\beta) = 2(\beta + \sqrt{\beta^2 - 1})^m.$$

Or la première égalité donne aussi

$$(\beta + \sqrt{\beta^2 - 1})^{2m} - 1 = 0,$$

à cause de la relation

$$\beta - \sqrt{\beta^2 - 1} = \frac{1}{\beta + \sqrt{\beta^2 - 1}};$$

par suite,

$$(\beta + \sqrt{\beta^2 - 1})^m = \pm 1$$

et

$$V_m(\beta) = \pm 2.$$

Or les quantités $V_m(\beta_1), V_m(\beta_2), \ldots, V_m(\beta_{m-1})$, d'après le théorème de Rolle, ne présentent que des variations; mais $V_m = 0$ a une seule racine entre -1 et β_1 : c'est la racine que nous avons désignée par α_1 ; par suite,

$$V_m(-1), \quad V_m(\beta_1), \quad V_m(\beta_2), \quad \ldots, \quad V_m(\beta_{m-1}), \quad V_m(+1)$$

ont les signes de

$$(-1)^m, \quad (-1)^{m-1}, \quad (-1)^{m-2}, \quad \ldots, \quad (-1), \quad +1.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
V_m(-1) &= 2(-1)^m,\\
V_m(\beta_1) &= 2(-1)^{m-1},\\
V_m(\beta_2) &= 2(-1)^{m-2},\\
&\dots\dots\dots\dots,\\
V_m(+1) &= 2;
\end{aligned}$$

par suite,

$$\begin{aligned}
\Phi(-1) &= 2[(-1)^m - A],\\
\Phi(\beta_1) &= 2[(-1)^{m-1} - A],\\
&\dots\dots\dots\dots\\
\Phi(\beta_{m-1}) &= 2[(-1) - A],\\
\Phi(+1) &= 2[(+1) - A].
\end{aligned}$$

A étant en valeur absolue plus petit que 1, les seconds membres n'offrent que des variations; par suite, l'équation $\Phi(x) = 0$ a toutes ses racines réelles; la première et la dernière des égalités montrent de plus que toutes ces racines sont comprises entre -1 et $+1$.

3. Cherchons maintenant à quelle condition doit satisfaire la quantité A pour que l'équation $\Phi(x) = 0$ ait une racine double. Il faut pour cela que $\Phi(x) = 0$ et $\Phi'(x) = 0$ admettent une racine commune. Soit α cette racine, on devra avoir

$$\begin{aligned}
\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}\right)^m + \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}\right)^m - 2A &= 0,\\
\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}\right)^m - \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}\right)^m &= 0;
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}
2\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}\right)^m - 2A &= 0.\\
\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}\right)^m - A &= 0.
\end{aligned}$$

Mais la seconde équation nous donne

$$\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}\right)^{2m} = 1,$$

d'où

$$\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}\right)^m = \pm 1.$$

Il faut donc que $A = \pm 1$ pour que l'équation $(x) = 0$ ait une racine double.

Cette condition est aussi suffisante, car alors

$$\Phi(x) = (x + \sqrt{x^2 - 1})^m + (x - \sqrt{x^2 - 1})^m \mp 2.$$

Si m est pair,

$$\Phi(x) = \left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^{\frac{m}{2}} \mp (x - \sqrt{x^2 - 1})^{\frac{m}{2}}\right]^2.$$

Si $A = 1$, la quantité entre parenthèses est de la forme

$$\varphi(x)\sqrt{x^2 - 1},$$

$\varphi(x)$ étant un polynôme entier en x; par suite,

$$\Phi(x) = (x^2 - 1)\varphi(x)^2;$$

toutes les racines de $\Phi(x) = 0$ sont donc doubles, excepté les racines -1 et $+1$.

Si $A = -1$, la quantité entre parenthèses est un polynôme entier de degré $\frac{m}{2}$; par suite, toutes les racines sont doubles.

Si m est impair, nous voyons que les racines β_1, β_2, ..., β_{m-1} de l'équation dérivée $\Phi'(x) = 0$, prises de deux en deux, annulent $\Phi(x)$, car nous avons trouvé les formules générales

$$\begin{aligned}
\Phi(-1) &= 2[(-1)^m - A],\\
\Phi(\beta_1) &= 2[(-1)^{m-1} - A],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Phi(\beta_{m-1}) &= 2[(-1) - A],\\
\Phi(+1) &= 2[(+1) - A].
\end{aligned}$$

Ces égalités nous montrent que, si $A = 1$,

$$\Phi(\beta_1) = 0, \quad \Phi(\beta_3) = 0, \quad \Phi(\beta_{m-2}) = 0, \quad \Phi(1) = 0;$$

les $\frac{m-1}{2}$ racines $\beta_1, \beta_3, \ldots, \beta_{m-2}$ de l'équation dérivée satisfont donc à l'équation $\Phi(x)=0$; par suite, $\Phi(x)=0$ admet les $\frac{m-1}{2}$ racines doubles $\beta_1, \beta_3, \ldots, \beta_{m-2}$ et la racine 1 qui est simple.

Si

$$A=-1, \qquad \Phi(-1)=0,$$
$$\Phi(\beta_2)=0, \qquad \Phi(\beta_4)=0, \qquad \Phi(\beta_{m-1})=0,$$

les racines $\beta_2, \beta_4, \ldots, \beta_{m-1}$ sont donc racines doubles; de plus, -1 est racine simple de l'équation $\Phi(x)=0$.

II. — Équation qui donne $\cos\frac{a}{m}$, étant donné $\sin a$.

4. Cette équation se déduit immédiatement de la formule

$$2i\sin a = \left(\cos\frac{a}{m}+i\sin\frac{a}{m}\right)^m-\left(\cos\frac{a}{m}-i\sin\frac{a}{m}\right)^m.$$

Elle devient, en posant $\sin a = B$,

$$\cos\frac{a}{m}=x,$$
$$2iB=\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^m-\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^m$$

ou

$$2iB=\frac{m}{V'_m\sqrt{x^2-1}},$$
$$V'_m\sqrt{x^2-1}-2miB=0.$$

Cette équation est irrationnelle; l'équation rendue rationnelle est donc

$$V'^2_m(1-x^2)-4m^2B^2=0.$$

Soit $\Psi(x)$ le premier membre de cette équation,

$$\Psi(x)=V'^2_m(1-x^2)-4m^2B^2.$$

Nous allons démontrer que $\Psi(x)=0$ a toutes ses racines réelles.

Formons pour cela la dérivée $\Psi'(x)$

$$\Psi'(x) = 2\mathrm{V}'_m \mathrm{V}''_m(1-x^2) - 2x\mathrm{V}'^2_m$$

ou

$$\Psi'(x) = 2\mathrm{V}'_m[\mathrm{V}''_m(1-x^2) - x\mathrm{V}'_m].$$

Or on sait que le polynôme V_m satisfait à l'équation différentielle

$$(1-x^2)\mathrm{V}''_m - x\mathrm{V}'_m + m^2\mathrm{V}_m = 0,$$

par conséquent,

$$\mathrm{V}''_m(1-x^2) - x\mathrm{V}'_m = -m^2\mathrm{V}_m$$

et, par suite,

$$\Psi'(x) = -2m^2\mathrm{V}'_m\mathrm{V}_m.$$

Les $2m-1$ racines de l'équation $\Psi'(x)=0$, rangées dans l'ordre croissant, sont donc

$$\alpha_1,\quad \beta_1,\quad \alpha_2,\quad \beta_2,\quad \ldots,\quad \beta_{m-1},\quad \alpha_m.$$

Or les quantités β substituées dans le premier membre de l'équation $\Psi(x)=0$ donnent toutes $-4m^2\mathrm{B}^2$, par conséquent un résultat négatif.

Pour établir que toutes les racines de $\Psi(x)=0$ sont réelles, il suffit de démontrer que les quantités α, racines de $\mathrm{V}_m=0$, rendent $\Psi(x)$ positif.

Soit α l'une quelconque des racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$;

$$\Phi(\alpha) = \mathrm{V}'^2_m(\alpha)(1-\alpha^2) - 4m^2\mathrm{B}^2$$

Or

$$\frac{\mathrm{V}'_m(\alpha)\sqrt{\alpha^2-1}}{m} = (\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})^m - (\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})^m,$$

$$0 = (\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})^m + (\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})^m;$$

d'où

$$\frac{\mathrm{V}'_m(\alpha)\sqrt{\alpha^2-1}}{m} = 2(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})^m;$$

par suite,

$$\mathrm{V}'^2_m(\alpha)(\alpha^2-1) = 4m^2(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})^{2m}.$$

Mais l'identité

$$(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})^m+(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})^m=0$$

nous montre que

$$(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})^{2m}+1=0;$$

d'où

$$V_m'^2(\alpha)(\alpha^2-1)=-4m^2,$$

ou enfin

$$(1-\alpha^2)V_m'^2(\alpha)=4m^2.$$

$\Psi(\alpha)$ a donc pour valeur

$$\Psi(\alpha)=4m^2-4m^2B^2=4m^2(1-B^2);$$

$\Psi(\alpha)$ est par suite positif.

Les racines de l'équation $\Psi'(x)=0$ sont donc toutes réelles et donnent, quand on les substitue par ordre de grandeur dans $\Psi(x)$, des résultats alternativement de signes contraires; on en conclut que toutes les racines de $\Psi(x)=0$ sont réelles et inégales.

5. Cherchons la condition que doit remplir B pour que l'équation $\Psi(x)=0$ ait une racine double.

Nous avons trouvé l'expression de $\Psi'(x)$,

$$\Psi'(x)=-2m^2V_mV_m'.$$

Si c'est une racine β de l'équation $\Psi'(x)=0$ qui appartient à $\Psi(x)=0$, on devra avoir $B=0$; par suite, $\Psi(x)$ se réduit à

$$V_m'^2(1-x^2);$$

toutes les racines $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}$ sont doubles et l'équation admet deux autres racines qui sont $+1$ et -1.

Si c'est, au contraire, une racine α de $V_m=0$ qui satisfait à $\Psi(x)=0$, on aura

$$0=(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})^m+(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})^m,$$
$$2iB=(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})^m-(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})^m;$$

d'où

$$2iB = 2(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})^m.$$

Mais on a aussi

$$(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})^{2m} + 1 = 0;$$

par suite,

$$B^2 = 1 \qquad \text{ou} \qquad B = \pm 1.$$

Supposons $B^2 = 1$ et formons dans ce cas la fonction $\Psi(x)$,

$$\Psi(x) = V_m'^2(1 - x^2) - 4m^2$$

ou

$$\Psi(x) = (V'_m\sqrt{1 - x^2} - 2m)(V'_m\sqrt{1 - x^2} + 2m);$$

on peut écrire cette équation

$$-\frac{1}{m^2}\Psi(x) = \left(\frac{V'_m\sqrt{x^2 - 1}}{m} - 2i\right)\left(\frac{V'_m\sqrt{x^2 - 1}}{m} + 2i\right)$$

et, si l'on remplace

$$\frac{V'_m\sqrt{x^2 - 1}}{m}$$

par sa valeur qui est

$$(x + \sqrt{x^2 - 1})^m - (x - \sqrt{x^2 - 1})^m,$$

il viendra

$$\begin{aligned} -\frac{1}{m^2}\Psi(x) = & \left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^m - (x - \sqrt{x^2 - 1})^m - 2i\right] \\ & \times\left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^m - (x - \sqrt{x^2 - 1})^m + 2i\right] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} -\frac{1}{m^2}\Psi(x) = & \frac{\left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^{2m} - 2i(x + \sqrt{x^2 - 1})^m - 1\right]}{(x + \sqrt{x^2 - 1})^m} \\ & \times\frac{\left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^{2m} + 2i(x + \sqrt{x^2 - 1})^m - 1\right]}{(x + \sqrt{x^2 - 1})^m}, \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire encore

$$-\frac{1}{m^2}\Psi(x)=\frac{[(x+\sqrt{x^2-1})^m-i]^2[(x+\sqrt{x^2-1})^m+i]^2}{(x\quad\sqrt{x^2-1})^{m2}}$$

ou

$$-\frac{1}{m^2}\Psi(x)=\left[\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^{2m}+1}{(x+\sqrt{x^2-1})^m}\right]^2$$

ou enfin

$$-\frac{1}{m^2}\Psi(x)=[(x+\sqrt{x^2-1})^m+(x-\sqrt{x^2-1})^m]^2,$$

$$\Psi(x)=-m^2 V_m^2.$$

On voit donc que, dans le cas où $B^2=1$, toutes les racines de l'équation $\Psi(x)=0$ sont doubles et égales aux racines α de l'équation $V_m=0$.

III. — Équation qui donne $\sin\frac{a}{m}$, étant donné $\cos a$.

6. L'équation qui donne $\sin\frac{a}{m}$ quand $\cos a$ est donné se déduit de la formule

$$2\cos a=\left(\cos\frac{a}{m}+i\sin\frac{a}{m}\right)^m+\left(\cos\frac{a}{m}-i\sin\frac{a}{m}\right)^m.$$

Soit, comme précédemment,

$$\cos a=A,\qquad \sin\frac{a}{m}=x;$$

l'équation précédente devient

$$2A=(\sqrt{1-x^2}+ix)^m+(\sqrt{1-x^2}-cx)^m$$

Soit

$$U_m=(\sqrt{1-x^2}+ix)^m+(\sqrt{1-x^2}-ix)^m.$$

Si m est pair,

$$U_m = (-1)^{\frac{m}{2}}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^m + (x-\sqrt{x^2-1})^m\right]$$

ou

$$U_m = (-1)^{\frac{m}{2}} V_m.$$

L'équation

$$U_m - 2A = 0$$

devient donc dans ce cas

$$(-1)^{\frac{m}{2}} V_m - 2A = 0$$

ou

$$V_m - 2(-1)^{\frac{m}{2}} A = 0.$$

C'est l'équation $\Phi(x) = 0$ traitée tout d'abord.

Si m est impair,

$$U_m = i^m\left[(x+\sqrt{x^2-1})^m - (x-\sqrt{x^2-1})^m\right],$$

ce qui donne pour l'équation cherchée

$$(x+\sqrt{x^2-1})^m - (x-\sqrt{x^2-1})^m - 2A\,i^m = 0$$

ou

$$V'_m\sqrt{x^2-1} - 2mA\,i^m = 0,$$

$$V'_m\sqrt{1-x^2} - 2m(-1)^{\frac{m-1}{2}} A = 0,$$

qui fournit l'équation rationnelle de degré $2m$

$$V'^2_m(1-x^2) - 4m^2A^2 = 0,$$

qui a été étudiée en second lieu.

IV. — Étant donné $\sin a$, trouver $\sin\frac{a}{m}$.

7. Si l'on pose

$$\sin a = B, \qquad \sin\frac{a}{m} = x,$$

l'équation dont dépend $\sin\frac{a}{m}$ est

$$2iB = (\sqrt{1-x^2}+ix)^m - (\sqrt{1-x^2}-ix)^m.$$

Si m est pair, elle devient

$$2iB = \left[(x+\sqrt{x^2-1})^m - (x-\sqrt{x^2-1})^m\right](-1)^{\frac{m}{2}}$$

ou

$$2iB = V'_m \frac{\sqrt{x^2-1}}{m}$$

ou enfin

$$V'^2_m(1-x^2) - 4m^2B^2 = 0,$$

équation qui a été étudiée.

Si m est impair,

$$2iB = \left[(x+\sqrt{x^2-1})^m + (x-\sqrt{x^2-1})^m\right] i^m$$

ou

$$2B = \left[(x+\sqrt{x^2-1})^m + (x-\sqrt{x^2-1})^m\right](-1)^{\frac{m-1}{2}}$$

ou enfin

$$V_m - 2(-1)^{\frac{m-1}{2}} B = 0.$$

qui n'est autre que la première.

Les conditions dans lesquelles ces équations admettent des racines multiples sont donc les mêmes que celles qui ont été trouvées dans les deux premiers cas.