NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LUCIEN LÉVY

Note sur l'équation d'Euler et de Poisson

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 545-552

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__545_0>

NOTE SUR L'ÉQUATION D'EULER ET DE POISSON;

PAR M. LUCIEN LÉVY.

M. Darboux a démontré (*Comptes rendus*, t. XCV, p. 69) pour les équations de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{m(1-m)z}{(x-y)^2} \tag{1}$$

et M. Appell a étendu (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. VI, p. 314) aux équations

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} - \frac{\beta'}{x-y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\beta}{x-y}\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

un théorème dont voici l'énoncé :

Si l'on a obtenu une solution quelconque

$$\varphi(x, y)$$

de l'équation (2), *on pourra en déduire la solution plus générale*

$$(ax+b)^{-\beta}(ay+b)^{-\beta'}\varphi\left(\frac{cx+d}{ax+b}, \frac{cy+d}{ay+b}\right) = \varphi_1(x, y).$$

a, b, c, d désignant des constantes quelconques.

Je dis que cette propriété est caractéristique des équations aux dérivées partielles du deuxième ordre qui peuvent se ramener à la forme (2). En d'autres termes, *si l'on a constaté qu'une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre admet en même temps que la solution* $\varphi(x, y)$ *la solution*

$$(ax+b)^{-\beta}(ay+b)^{-\beta'}\varphi\left(\frac{cx+d}{ax+b}, \frac{cy+d}{ay+b}\right),$$

où a, b, c, d désignent des constantes quelconques, cette équation a nécessairement la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - \frac{\beta'}{x-y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\beta}{x-y}\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Soit, en effet, l'équation

$$(3)\quad \begin{cases} A\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + C\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ + D\dfrac{\partial z}{\partial x} + E\dfrac{\partial z}{\partial y} + Fz + G = 0. \end{cases}$$

1° Je vais exprimer qu'elle admet, en même temps que la solution

$$z = \varphi(x, y),$$

toutes les solutions comprises dans la formule

$$z_1 = \varphi(x'.\, y'),$$

où $x' = x - \lambda$ et $y' = y - \lambda$, λ étant une constante quelconque. Remarquons pour cela que

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} z_1}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta} = \frac{\partial^{\alpha+\beta} z_1}{\partial x'^\alpha\,\partial y'^\beta}.$$

Je puis donc, pour exprimer que z_1 est solution de l'équation (3), me borner à remplacer dans cette équation x par $\lambda + x'$, y par $\lambda + y'$, effacer les accents donnés aux variables et l'indice de z_1, et exprimer que l'équation ainsi obtenue admet les mêmes solutions que l'équation (3). Désignons par A', B', C', ... ce que deviennent les coefficients A, B, C, ... quand on y remplace x par $\lambda + x$ et y par $\lambda + y$. La nouvelle équation sera

$$(4)\quad \begin{cases} A'\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B'\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + C'\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ + D'\dfrac{\partial z}{\partial x} + E'\dfrac{\partial z}{\partial y} + F'z + G' = 0. \end{cases}$$

Pour que cette équation ait les mêmes solutions que l'équation (3), il faut et il suffit que leurs coefficients soient proportionnels; nous laissons de côté le cas où la solution d'où l'on part serait fonction de $x-y$ seulement, ce qui peut arriver pour un groupe de solutions, mais non pour toutes les solutions de l'équation (3). On aura donc

$$\frac{B'}{A'}=\frac{B}{A},\qquad \frac{C'}{A'}=\frac{C}{A},\qquad \frac{D'}{A'}=\frac{D}{A},\qquad \cdots.$$

Je dis qu'il en résulte que tous les quotients $\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \cdots$ sont des fonctions de $x-y$. Posons en effet

$$\frac{B}{A}=f(x,y),$$

on devra avoir

$$f(x-\lambda, y+\lambda)=f(x,y)$$

ou, en supposant que la fonction $f(x,y)$ soit développable par la formule de Taylor,

$$f(x,y)+\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\frac{\lambda^2}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(2)}+\ldots=f(x,y).$$

Cette égalité devant avoir lieu quelle que soit la valeur de λ, il en résulte

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

et, par suite,

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx-\frac{\partial f}{\partial y}dy=\frac{\partial f}{\partial x}(dx-dy)=\frac{\partial f}{\partial x}d(x-y);$$

$f(x.y)$ est donc bien une fonction de $x-y$.

2° Nous pouvons donc supposer que les coefficients A, B, C, ... de l'équation (3) sont tous des fonctions de $x-y$. Je vais exprimer que cette équation admet, en même temps que la solution

$$z=\varphi(x,y).$$

toutes les solutions contenues dans la formule

$$z_1 = \varphi(ax, ay),$$

où a désigne une constante arbitraire. Nous poserons encore

$$x' = ax,$$
$$y' = ay.$$

Nous aurons ici

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} z_1}{\partial x^\alpha \, \partial y^\beta} = a^{\alpha+\beta} \frac{\partial^{\alpha+\beta} z_1}{\partial x'^\alpha \, \partial y'^\beta}.$$

On en conclut, par un raisonnement analogue au précédent, que les deux équations suivantes devront être vérifiées en même temps

$$\mathrm{A}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \mathrm{B}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \mathrm{C}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \mathrm{D}\frac{\partial z}{\partial x} + \mathrm{E}\frac{\partial z}{\partial y} + \mathrm{F}z + \mathrm{G} = 0,$$

$$a^2\mathrm{A}'\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a^2\mathrm{B}'\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + a^2\mathrm{C}'\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$
$$+ a\mathrm{D}'\frac{\partial z}{\partial x} + a\mathrm{E}'\frac{\partial z}{\partial y} + \mathrm{F}'z + \mathrm{G}' = 0,$$

en désignant par A′, B′, C′, ... les valeurs prises par les fonctions A, B, C, ... quand on y remplace x et y par $\frac{x}{a}$ et $\frac{y}{a}$.

On déduit de là

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}'} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{B}'} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{C}'},$$
$$\frac{\mathrm{A}}{a\,\mathrm{A}'} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}'} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}'},$$
$$\frac{\mathrm{A}}{a^2\,\mathrm{A}'} = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{F}'} = \frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}.$$

Posons

$$\psi(x-y) = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$$

et, par suite,

$$\psi\left(\frac{x-y}{a}\right) = \frac{\mathrm{B}'}{\mathrm{A}'}.$$

Nous devons avoir, quelle que soit la valeur donnée à a,

$$\psi\left(\frac{x-y}{a}\right)=\psi(x-y).$$

Il faut donc que $\psi\left(\frac{x-y}{a}\right)$ soit indépendante de a, c'est-à-dire constante.

Soit de même

$$\psi_1(x-y)=\frac{D}{A},$$

on devra avoir

$$\psi_1(x-y)=\frac{1}{a}\psi_1\left(\frac{x-y}{a}\right).$$

Faisons

$$a=x-y,$$

il vient

$$\psi_1(x-y)=\frac{1}{x-y},\qquad \psi_1(1)=\frac{k}{x-y}.$$

De même,

$$\frac{E}{A}=\frac{k'}{x-y}.$$

Un raisonnement analogue montre que $\frac{F}{A}$ et $\frac{G}{A}$ sont des fonctions de la forme $\frac{\alpha}{(x-y)^2}$: l'équation proposée devient donc

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{D}{x-y}\frac{\partial z}{\partial x}\\ & +\frac{E}{x-y}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{F}{(x-y)^2}z+\frac{G}{(x-y)^2}=0;\end{aligned}\right.$$

les lettres A, B, C, ... désignent maintenant des quantités constantes.

3° Je vais enfin exprimer que l'équation ci-dessus admet, avec la solution

$$z=\varphi(x,y),$$

la solution

$$z_1=x^k y^{k'}\varphi_1\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right).$$

Posons encore

$$\frac{1}{x} = x', \qquad \frac{1}{y} = y',$$

nous aurons

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = k x^{k-1} y^{k'} \varphi_1(x', y') - x^{k-2} y^{k'} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x'},$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial y} = k' x^k y^{k'-1} \varphi_1(x', y') - x^k y^{k'-2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y'},$$

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} = x^{k-4} y^{k'} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x'^2}$$
$$+ (2 - 2k) x^{k-3} y^{k'} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x'} + k(k-1) x^{k-2} y^{k'} \varphi_1(x', y'),$$

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\, \partial y} = x^{k-2} y^{k'-2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x'\, \partial y'}$$
$$- k' x^{k-2} y^{k'-1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x'} - k x^{k-1} y^{k'-2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y'} + k k' x^{k-1} y^{k'-1} \varphi_1,$$

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} = x^k y^{k'-4} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y'^2}$$
$$+ (2 - 2k') x^k y^{k'-3} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y'} + k'(k'-1) x^k y^{k'-2} \varphi_1(x', y').$$

Portons ces valeurs dans l'équation proposée, écrivons $\frac{1}{x'}$ et $\frac{1}{y'}$ au lieu de x et de y, effaçons les accents et écrivons z au lieu de φ_1 ; nous obtenons la nouvelle équation

$$A x^{4-k} y^{-k'} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B x^{2-k} y^{2-k'} \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$$
$$+ C x^{-k} y^{4-k'} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \ldots + G \frac{x^2 y^2}{(x-y)^2} = 0.$$

Cette équation doit admettre les mêmes solutions que la proposée : il faut donc que

$$\frac{A x^{4-k} y^{-k'}}{A} = \frac{B x^{2-k} y^{2-k'}}{B} = \frac{C x^{-k} y^{4-k'}}{C} = \ldots = \frac{G x^2 y^2}{G}.$$

Ces quatre rapports ne peuvent être égaux sans que trois des quatre coefficients soient nuls : d'où deux hypothèses possibles, puisqu'on ne peut évidemment annuler en même temps A, B et C.

1° $B = C = G = 0$, $A = 1$.

L'équation transformée ne peut dans ce cas être identifiée avec l'équation proposée.

2° $A = C = G = 0$, $B = 1$.

L'équation transformée devient

$$
\begin{aligned}
x^{2-k} y^{2-k'} \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} &+ \left(\frac{D\, x^{-k+3} y^{-k'+1}}{x - y} - k' x^{2-k} y^{1-k'} \right) \frac{\partial z}{\partial x} \\
&+ \left(\frac{E\, x^{1-k} y^{3-k'}}{x - y} - k\, x^{1-k} y^{2-k'} \right) \frac{\partial z}{\partial y} \\
&+ \frac{F x^2 y^2}{(x-y)^2} - \frac{D\, k x^{2-k} y^{1-k'}}{x - y} \\
&- \frac{E\, k' x^{1-k} y^{2-k'}}{x - y} + k k' x^{1-k} y^{1-k'} = 0.
\end{aligned}
$$

En l'identifiant avec l'équation (5), nous obtenons les trois identités suivantes :

$$
\begin{aligned}
\frac{D}{x - y} &= \frac{D x}{y(x - y)} - k' y^{-1}, \\
\frac{E}{x - y} &= \frac{E y}{x(x - y)} - k\, x^{-1}, \\
\frac{F}{(x - y)^2} &= \frac{F x^k y^{k'}}{(x - y)^2} - \frac{k D}{y(x - y)} - \frac{k' E}{x(x - y)} + k k' x^{-1} y^{-1}.
\end{aligned}
$$

On déduit de là

$$
\left\{
\begin{aligned}
D &= k', \\
E &= -k, \\
F &= 0,
\end{aligned}
\right.
$$

ou

$$
\begin{gathered}
k' = D = 0, \\
-k = E = 0, \\
F \text{ indéterminé}.
\end{gathered}
$$

d'où les deux équations

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + \frac{k'}{x-y}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{k}{x-y}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

ou

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + \frac{F}{(x-y)^2}z = 0.$$

La dernière équation se déduit de la précédente si l'on y suppose $k = k'$ (*voir* DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II, p. 56). On trouve donc dans tous les cas une équation d'Euler et de Poisson. C. Q. F. D.