CH. BIEHLER

Sur le plan asymptote et les cylindres asymptotes d'une surface

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 536-541

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__536_0>

SUR LE PLAN ASYMPTOTE ET LES CYLINDRES ASYMPTOTES D'UNE SURFACE;

PAR M. CH. BIEHLER.

1. Soit

$$\varphi(x, y, z) + \psi(x, y, z) + \chi(x, y, z) + \zeta(x, y, z) + \ldots = 0$$

l'équation d'une surface algébrique d'ordre m, ordonnée par groupes homogènes de degrés $m, m-1, m-2, \ldots$.

Coupons cette surface par la droite

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha\rho, \\ y &= y_0 + \beta\rho, \\ z &= z_0 + \gamma\rho; \end{aligned}$$

l'équation qui donne les valeurs de ρ correspondant aux points d'intersection de la droite et de la surface est

$$\begin{aligned} &\rho^m \varphi(\alpha, \beta, \gamma) + \rho^{m-1}[x_0\varphi'_\alpha + y_0\varphi'_\beta + z_0\varphi'_\gamma + \psi(\alpha, \beta, \gamma)] \\ &\quad + \frac{\rho^{m-2}}{1.2}[(x_0\varphi'_\alpha + y_0\varphi'_\beta + z_0\varphi'_\gamma)^{(2)} \\ &\qquad\qquad + 2(x_0\psi'_\alpha + y_0\psi'_\beta + z_0\psi'_\gamma) + 2\chi(\alpha, \beta, \gamma)] \\ &\quad + \frac{\rho^{m-3}}{3!}[(x_0\varphi'_\alpha + y_0\varphi'_\beta + z_0\varphi'_\gamma)^{(3)} \\ &\qquad\qquad + 3(x_0\psi'_\alpha + y_0\psi'_\beta + z_0\psi'_\gamma)^{(2)} \\ &\qquad\qquad + 3.2(x_0\chi'_\alpha + y_0\chi'_\beta + z_0\chi'_\gamma) + 3!\,\zeta(\alpha, \beta, \gamma)] \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0. \end{aligned}$$

Nous écrirons cette équation sous la forme suivante

$$\begin{aligned} &\rho^m \varphi(\alpha, \beta, \gamma) + \rho^{m-1}\,\Pi(x_0, y_0, z_0) \\ &\quad + \frac{\rho^{m-2}}{1.2}\Phi(x_0, y_0, z_0) + \frac{\rho^{m-3}}{3!}\Psi(x_0, y_0, z_0) + \ldots = 0. \end{aligned}$$

en posant, pour abréger,

$$\Pi(x_0, y_0, z_0) = x_0\varphi'_\alpha + y_0\varphi'_\beta + z_0\varphi'_\gamma + \psi(\alpha, \beta, \gamma),$$

$$\begin{aligned}\Phi(x_0, y_0, z_0) = {} & (x_0\varphi'_\alpha + y_0\varphi'_\beta + z_0\varphi'_\gamma)^{(2)} \\ & + 2(x_0\psi'_\alpha + y_0\psi'_\beta + z_0\psi'_\gamma) + 2\chi(\alpha, \beta, \gamma), \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Si la direction α, β, γ est choisie de telle sorte que

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

et si les coordonnées x_0, y_0, z_0 satisfont à la relation

$$\Pi(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

la droite rencontrera la surface en deux points à l'infini.

Le plan $\Pi(x, y, z) = 0$ est parallèle à la sécante, et comme, dans l'hypothèse de $\Pi(x_0, y_0, z_0) = 0$, le point x_0, y_0, z_0 de cette sécante se trouve dans le plan, elle y est contenue tout entière.

Le plan $\Pi(x, y, z) = 0$ est donc le lieu des droites parallèles à la direction α, β, γ qui rencontrent la surface en deux points au moins à l'infini; ce plan est dit un *plan asymptote de la surface.*

Ce plan coupe la surface suivant une courbe d'ordre m, qui a un point double à l'infini dans la direction α, β, γ, et les tangentes en ce point double sont les droites d'intersection du plan $\Pi(x, y, z) = 0$ et de la surface du second ordre $\Phi(x, y, z) = 0$.

En effet, considérons un point x_0, y_0, z_0 commun à la surface $\Phi(x, y, z) = 0$ et au plan $\Pi(x, y, z) = 0$. Menons par ce point une droite parallèle à la direction α, β, γ; nous allons démontrer que cette droite est tout entière sur la surface $\Phi(x, y, z) = 0$.

Nous allons faire voir pour cela que l'équation du second degré qui donne les valeurs de ρ correspondant aux points d'intersections de la droite en question et de la surface Φ est une identité.

Posons, pour abréger,

$$\Phi(x, y, z) = f(x, y, z) + g(x, y, z) + h,$$

$f(x, y, z)$ étant l'ensemble homogène des termes du second degré, $g(x, y, z)$ les termes du premier degré, et h le terme indépendant des variables de la fonction Φ.

L'équation en ρ sera

$$\begin{aligned}&\rho^2 f(\alpha, \beta, \gamma)\\ &\quad + \rho[x_0 f'_\alpha + y_0 f'_\beta + z_0 f'_\gamma + g(\alpha, \beta, \gamma)] + \Phi(x_0, y_0, z_0) = 0.\end{aligned}$$

Or on a

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha\varphi'_\alpha + \beta\varphi'_\beta + \gamma\varphi'_\gamma)^{(2)} = m(m-1)\varphi(\alpha, \beta, \gamma);$$

donc

$$\begin{gathered}f(\alpha, \beta, \gamma) = 0,\\ f'_\alpha = 2(\alpha\varphi''_{\alpha^2} + \beta\varphi''_{\alpha\beta} + \gamma\varphi''_{\alpha\gamma}) = 2(m-1)\varphi'_\alpha,\\ f'_\beta = 2(\alpha\varphi''_{\beta\alpha} + \beta\varphi''_{\beta^2} + \gamma\varphi''_{\beta\gamma}) = 2(m-1)\varphi'_\beta,\\ f'_\gamma = 2(\alpha\varphi''_{\gamma\alpha} + \beta\varphi''_{\gamma\beta} + \gamma\varphi''_{\gamma^2}) = 2(m-1)\varphi'_\gamma,\\ g(\alpha, \beta, \gamma) = 2(m-1)\psi(\alpha, \beta, \gamma);\end{gathered}$$

par suite,

$$\begin{aligned}&x_0 f'_\alpha + y_0 f'_\beta + z_0 f'_\gamma + g(\alpha, \beta, \gamma)\\ &\quad = 2(m-1)[x_0\varphi'_\alpha + y_0\varphi'_\beta + z_0\varphi'_\gamma + \psi(\alpha, \beta, \gamma)].\end{aligned}$$

Le coefficient de ρ et le terme indépendant dans l'équation du second degré sont aussi nuls : elle se réduit donc à une identité ; la droite fait dès lors partie de la surface. Le plan asymptote coupe donc la quadrique

$$\Phi(x, y, z) = 0$$

suivant une seconde droite, et si l'on mène par un point de cette seconde droite une sécante parallèle à la direction α, β, γ, le calcul précédent nous montre que cette sécante est tout entière sur la surface. Le plan asymptote coupe donc la surface $\Phi(x, y, z) = 0$ suivant un système de deux droites parallèles, et chacune de ces droites ne rencontre plus la surface d'ordre m qu'en $m - 3$ points à distance finie; ces deux droites sont deux asymptotes de la courbe d'intersection du plan asymptote et de la surface d'ordre m.

2. Ceci a lieu tant que les quantités $\varphi'_\alpha, \varphi'_6, \varphi'_\gamma$ ne sont pas toutes nulles. Supposons que ces quantités soient nulles à la fois et que $\psi(\alpha, 6, \gamma)$ soit aussi nul; l'équation en ρ s'abaisse au degré $m - 2$ et devient

$$\frac{\rho^{m-2}}{2!}\Phi(x_0, y_0, z_0) + \frac{\rho^{m-3}}{3!}\Psi(x_0, y_0, z_0) + \ldots = 0.$$

Nous allons démontrer que, dans cette hypothèse, la quadrique $\Phi(x, y, z) = 0$ devient un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la direction α, 6, γ.

En effet,

$$\Phi(x, y, z) = f(x, y, z) + g(x, y, z) + h.$$

On en tire

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\Phi'_x &= x\varphi''_{\alpha^2} + y\varphi''_{\alpha 6} + z\varphi''_{\alpha\gamma} + \psi'_\alpha,\\
\tfrac{1}{2}\Phi'_y &= x\varphi''_{6\alpha} + y\varphi''_{6^2} + z\varphi''_{6\gamma} + \psi'_6,\\
\tfrac{1}{2}\Phi'_z &= x\varphi''_{\gamma\alpha} + y\varphi''_{\gamma 6} + z\varphi''_{\gamma^2} + \psi'_\gamma;
\end{aligned}$$

par suite,

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}(\alpha\Phi'_x + 6\Phi'_y + \gamma\Phi'_z)\\
&\quad = (m-1)[x\varphi'_\alpha + y\varphi'_6 + z\varphi'_\gamma + \psi(\alpha, 6, \gamma)].
\end{aligned}$$

D'après les hypothèses faites, le second membre est nul, quelles que soient les valeurs de x, y, z; par suite,

$$\alpha\Phi'_x + 6\Phi'_y + \gamma\Phi'_z = 0,$$

quels que soient x, y, z; la surface est donc un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la direction α, 6, γ. Nous dirons que c'est un cylindre asymptote. Cette dénomination est justifiée par la propriété suivante de ce cylindre, *c'est le lieu des droites parallèles à la direction* α, 6, γ *qui rencontrent la surface en trois points à l'infini.*

Tout plan parallèle aux génératrices de ce cylindre coupe la surface suivant une courbe d'ordre m, et les génératrices d'intersection du cylindre et du plan sont deux asymptotes parallèles de cette courbe.

On peut montrer, de plus, que les deux surfaces

$$\Phi(x, y, z) = 0,$$
$$\Psi(x, y, z) = 0$$

se coupent suivant six droites qui rencontrent la surface en quatre points à l'infini.

Il suffit, pour le faire voir, de considérer un point commun aux deux surfaces Φ et Ψ, et de mener par ce point une parallèle à la direction α, 6, γ; cette parallèle est tout entière sur chacune des deux surfaces. Si l'on forme, en effet, l'équation en ρ correspondant aux intersections de la droite et de la surface $\Psi(x, y, z) = 0$, cette équation est une identité, en vertu des propriétés des fonctions homogènes; l'intersection des deux surfaces Φ et Ψ ne peut donc être qu'un système de droites parallèles à la direction α, 6, γ. Comme Φ est du deuxième degré et Ψ du troisième degré, cette intersection est un système de six droites.

Si l'on coupe la surface d'ordre m par un plan passant par l'une de ces six droites, la section sera une courbe d'ordre m qui admet cette droite comme asymptote d'inflexion, et la seconde droite d'intersection du cylindre Φ avec le plan sécant, comme asymptote ordinaire; deux des asymptotes parallèles de la section obtenue en coupant la surface d'ordre m par un plan passant par deux des six droites sont d'inflexion.

3. Si la fonction $\Phi(x, y, z)$ est identiquement nulle pour toute valeur des variables x, y, z, on montrerait de même que la surface $\Psi(x, y, z) = 0$ est un cylindre du troisième ordre, dont les génératrices sont parallèles à la direction α, β, γ; ce cylindre est alors le lieu des droites parallèles à la direction α, β, γ qui rencontrent la surface d'ordre m en quatre points à l'infini : c'est le cylindre asymptote du troisième ordre, ainsi de suite. On établirait pour cela la relation identique

$$\alpha\Psi'_x + \beta\Psi'_y + \gamma\Psi'_z = 0,$$

comme nous avons établi la précédente, et cette relation exprime que la surface $\Psi(x, y, z) = 0$ est un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la direction α, β, γ. Ces calculs n'offrent aucune difficulté.