NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

AUBERT

Sur une généralisation du théorème de Pascal donnant neuf points en ligne droite

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 529-535

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__529_1>

SUR UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE PASCAL DONNANT NEUF POINTS EN LIGNE DROITE;

PAR M. AUBERT,
Professeur au lycée de Rochefort.

1. THÉORÈME. — *On considère tous les cercles σ passant par deux points fixes, dont l'un c est sur la circonférence d'un cercle donné s, et l'autre d sur une droite donnée l. Chacun des cercles σ rencontre la droite l en un second point d' et la circonférence s en un second point c'. La droite $c'd'$ passe par un point fixe i de la circonférence s, quel que soit le cercle σ considéré.*

Nous pouvons, en effet, définir tous les cercles σ au moyen d'un troisième point qui décrirait la circonférence s. Or, quelle que soit la position c' de ce point, la droite indéfinie $c'd'$ forme avec cc' un angle qui, compté à partir de cc' dans un sens déterminé, celui des aiguilles d'une montre, par exemple, a toujours la même valeur : c'est l'angle cdd' si le point d est extérieur au cercle s, c'est son supplément si le point d est intérieur à ce cercle.

D'ailleurs, le sommet c' de cet angle est sur la circonférence s, et son côté cc' passe par un point fixe de cette circonférence; donc l'autre côté $c'd'$ rencontre bien la circonférence en un point fixe i.

Si l'on mène par le point g où la droite cd rencontre la circonférence s une parallèle à la droite l, elle passera manifestement par le point i, car on peut considérer la droite indéfinie cd comme la circonférence de rayon infini à laquelle correspond un point d' infiniment éloigné sur la droite l; gi est donc une position particulière de la droite mobile $c'd'$. Ceci permet de construire immédiatement le point i.

Cela posé, faisons subir à la figure une transformation projective.

Le cercle s deviendra une conique S, les cercles σ donneront le faisceau des coniques Σ passant par quatre points fixes A, B, C, D dont les trois premiers sont sur la conique S, la droite AB provenant de la droite de l'infini de la première figure.

La droite l donnera une droite L passant par le point D.

La propriété démontrée précédemment sera conservée : la droite C'D', qui joint le second point d'intersection D' de chaque conique Σ avec la droite L au quatrième point C' commun aux deux coniques S et Σ, coupera la conique S en un point fixe I.

Voyons ce que devient la construction qui donnait le point i. A la droite gi parallèle à l correspond une droite rencontrant L sur la droite AB. Il suffira donc de joindre le point d'intersection de L et de AB au point G, où la droite CD coupe la conique S, pour obtenir le point I de cette conique.

Actuellement, rien ne distingue le point C des points A et B. On pourrait, par une nouvelle transformation homographique, projeter la conique S suivant un cercle, en rejetant à l'infini soit AB, soit BC, soit CA. Si, chaque fois, on détermine la position du point i sur chaque circonférence, comme on l'a indiqué plus haut, pour qu'on fasse la transformation inverse qui reproduit la conique S, on obtiendra nécessairement le même point I de cette conique, au moyen des constructions transformées.

On est ainsi conduit au résultat suivant :

On donne trois points A, B, C *sur une conique* S, *et un point* D *sur une droite* L. *Soient* α, β, γ *les points d'intersection des droites* BC, CA, AB *avec la droite* L, *et* A′, B′, C′ *les seconds points de rencontre des droites* AD, BD *et* CD *avec la conique* S. *Les trois droites* αA′, βB′ *et* γC′ *se coupent en un même point* I *situé sur la conique* S.

Nous voyons ainsi qu'à un système de quatre points, définis comme nous l'avons fait par rapport à une conique S, et à une droite L correspond un point I parfaitement déterminé de la conique. Si donc, inversement, au lieu de se donner la droite L, on se donne le point I, la droite L sera parfaitement déterminée et passera par les quatre points α, β, γ et D.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Par un point* D *du plan d'une conique, on mène trois sécantes* AA′, BB′, CC′, *et l'on prend un point* I *sur la courbe. Si l'on prolonge chacun des côtés du triangle* ABC *jusqu'à son intersection avec la* *droite qui joint le point* I *à la deuxième extrémité de la sécante aboutissant au sommet opposé, on obtient trois points situés sur une même ligne droite qui passe par le point* D.

2. Ce théorème conduit à de nombreuses conséquences.

Construction d'une conique par points. — Tout d'abord, il donne une construction par points d'une conique définie par cinq points, avec cette particularité qu'on détermine à la fois deux nouveaux points de la courbe.

Considérons, par exemple, cinq points I, A, B, A′, B′. Joignons AA′ et BB′ qui se coupent au point D, puis menons par le point I une droite quelconque qui coupe la conique en un point inconnu C. Soit γ le point d'intersection de cette droite et de A′B′. La droite Dγ définit la droite L du théorème. Si donc nous prolongeons IA et IB jusqu'aux points α et β où ces droites rencontrent L, il suffira de joindre αB′ et βA′ pour obtenir à leur intersection le point C′. Le point C sera par suite sur C′D.

On a ainsi autant de couples de points que l'on veut.

Tangente. — Il est facile de construire la tangente à la courbe en l'un des cinq points donnés. A cet effet, imaginons que deux points de la conique sont confondus au point considéré, que nous désignerons pour cette raison par (A′B′). Associons-lui l'un des autres points donnés, où nous supposerons les deux points A et B confondus en (AB). Les droites (AB), (A′B′) et CC′ se coupent en D, I(AB) et C′(A′B′) se coupent au point ($\alpha\beta$). La droite L est ainsi déterminée. Si l'on joint le point γ où IC rencontre cette droite au point (A′B′), on a la tangente cherchée.

3. Avant de donner d'autres applications, remarquons que le théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit à une conique est une conséquence directe du théorème précédent.

Considérons en effet l'hexagone inscrit dont les sommets consécutifs sont A, C, C′, I, B′, B. Les côtés opposés se coupent aux points D, β et γ sur la droite L. L'hexagone peut être concave ou convexe.

Ici se présente une extension remarquable du théorème. Nous avons fait abstraction de la droite DAA′ qui joint le point D au sommet A de l'hexagone compris entre B et C. Mais rien ne distingue, au point de vue projectif, ce sommet du sommet I compris entre B′ et C′. Si donc on mène la droite DI qui rencontre la conique en un second point I′, les droites AI′ et B′C′ vont aussi se couper sur la droite L en δ.

Observons maintenant que le point D peut être simplement défini comme le point de rencontre de deux côtés opposés de l'hexagone inscrit à la conique. On peut donc appliquer sans modification le résultat précédent aux deux autres points β et γ, ce qui donnera quatre nouveaux points situés sur la droite L.

En résumé, nous obtenons neuf points en ligne droite, parmi lesquels se trouvent les trois points du théorème de Pascal.

4. Il suffit de particulariser les conditions du théorème pour en déduire autant d'énoncés nouveaux.

Considérons, par exemple, une hyperbole, et supposons que le point I du théorème soit à l'infini sur la courbe, le point D étant lui-même à l'infini dans une direction déterminée. Si de plus nous imaginons que le point A se confonde avec le point I, la droite IA devient une des asymptotes de la courbe; la droite AA′ est rejetée à l'infini, et l'application du théorème conduit à la propriété suivante :

Soient deux sécantes parallèles rencontrant l'hyperbole aux points B, B' et C, C'. Les cordes BC et B'C' vont couper les asymptotes de la courbe en des points situés deux à deux sur deux droites parallèles aux sécantes données.

Chacune de ces droites passe aussi par un des points d'intersection des parallèles aux asymptotes menées par les extrémités de *chacune* des cordes CB' et BC'.

Cette propriété peut servir à la construction d'une hyperbole.

La méthode de transformation par polaires réciproques permet de déduire des théorèmes précédents autant de propriétés relatives aux tangentes aux coniques.

5. Nous avons montré plus haut comment le théorème de Pascal résulte du théorème que nous venons d'établir.

Il est naturel de chercher si, réciproquement, le théorème de Pascal pourrait conduire à celui-ci.

Les travaux de Plücker, Cayley, Kirkman et autres géomètres contemporains ont établi un grand nombre de résultats relatifs aux hexagones obtenus en joignant de toutes les manières possibles six points d'une conique, et aux droites de Pascal correspondantes. Mais toutes ces recherches ont pour point de départ la figure formée par *six* points déterminés de la courbe, et *six* seulement. Nous n'y voyons pas de propositions relatives à ce septième point de la conique, dont l'introduction forme en quelque sorte le caractère du théorème précédent.

Toutefois, il est facile d'obtenir ce théorème par l'application répétée du théorème de Pascal à *différents* hexagones ayant pour sommets six des sept points considérés. Voici l'une des manières les plus simples. Considérons les trois hexagones

(1) IA'ABCC',

(2) IB'BCAA',

(3) IC'CABB'.

Ils ont un sommet commun I, et chacun des autres se déduit de ceux de l'hexagone précédent par une permutation circulaire effectuée sur les lettres.

En prenant la notation habituelle, nous avons les trois pascales correspondantes :

Pour l'hexagone (1)

$$\left\{\begin{matrix} IA' & A'A & AB \\ BC & CC' & IC' \end{matrix}\right\},$$

pour l'hexagone (2)

$$\left\{\begin{matrix} IB' & B'B & BC \\ CA & AA' & IA' \end{matrix}\right\},$$

pour l'hexagone (3)

$$\left\{\begin{matrix} IC' & C'C & CA \\ AB & BB' & IB' \end{matrix}\right\};$$

ce sont les trois droites

$$\alpha D \gamma, \qquad \beta D \alpha, \qquad \gamma D \beta.$$

Chacune d'elles a deux points communs avec chacune des deux autres. Elles coïncident donc, et les points α, β, γ, D sont bien en ligne droite.