NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. LEMAIRE

Concours d'admission à l'École polytechnique en 1889

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 503-508

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__503_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1889;

PAR M. J. LEMAIRE,
Professeur au lycée de Lorient.

I. Si nous désignons par b l'ordonnée de l'axe d'une parabole P, par a l'abscisse de l'axe d'une parabole Q, les paraboles P auront pour équation générale

$$(P)\qquad (y-b)^2-2px=0$$

et les paraboles Q

$$(Q)\qquad (x-a)^2-2qy=0.$$

Les paraboles P et Q ayant leurs axes perpendiculaires, toute conique (C) passant par les points de rencontre d'une des paraboles P et d'une des paraboles Q aura ses axes parallèles aux axes de ces paraboles, c'est-à-dire à Ox et Oy.

Si donc (x_0, y_0) est le centre de C, l'équation de cette conique sera de la forme

$$A(x - x_0)^2 + B(y - y_0)^2 - 1 = 0.$$

Il s'agit de trouver le lieu du centre de cette conique à la condition qu'elle passe constamment par les points communs à l'une des paraboles P et à l'une des paraboles Q.

L'équation générale des coniques passant par les points d'intersection des deux paraboles P et Q correspondant à deux valeurs déterminées de a et b est

$$(1) \qquad [(y - b)^2 - 2px] + \lambda[(x - a)^2 - 2qy] = 0,$$

qui représentera la conique C si l'on a

$$\frac{A}{\lambda} = \frac{B}{1} = \frac{Ax_0}{p + \lambda a} = \frac{By_0}{b + \lambda q} = \frac{Ax_0^2 + By_0^2 - 1}{b^2 + \lambda a^2}.$$

Éliminant λ, a, b entre ces relations, nous aurons le lieu du centre. On tire sans difficulté

$$\lambda = \frac{A}{B},$$

$$a = \frac{Ax_0 - Bp}{A},$$

$$b = \frac{By_0 - Aq}{B},$$

d'où le lieu cherché

$$B\left[\frac{(By_0 - Aq)^2}{B^2} + \frac{A}{B}\,\frac{(Ax_0 - Bp)^2}{A^2}\right] = Ax_0^2 + By_0^2 - 1$$

ou

$$2Bpx + 2Aqy = \frac{A^2q^2}{B} + \frac{B^2p^2}{A} + 1.$$

Cette équation représente une droite.

Si l'on fait tourner la conique C de 90° autour de son centre, son équation devient

$$B(x - x_0)^2 + A(y - y_0)^2 - 1 = 0.$$

A cette position de la conique correspondra une autre droite dont nous aurons l'équation en permutant A et B dans la précédente. Le lieu des centres demandé se compose donc de deux droites.

II. L'équation aux x des points communs à une parabole P et à une droite

$$(D) \qquad y = mx + n$$

est

$$(mx + n - b)^2 - 2px = 0;$$

d'où, pour la condition de contact de cette courbe et de cette droite,

$$[m(n - b) - p]^2 - m^2(n - b)^2 = 0.$$

On tire de là

$$n = b + \frac{p}{2m}.$$

La tangente à P de coefficient angulaire m est donc

$$y = mx + b + \frac{p}{2m}.$$

On trouve de même pour la tangente à Q de coefficient angulaire m l'équation

$$y = mx - \frac{m}{2}(2a + qm).$$

m sera le coefficient angulaire d'une tangente commune si l'on a

$$b + \frac{p}{2m} = -\frac{m}{2}(2a + qm)$$

ou

$$qm^3 + 2am^2 + 2bm + p = 0.$$

Telle est l'équation aux coefficients angulaires des tangentes communes à P et Q : il y a trois pareilles tangentes. Soient α_1, α_2, α_3 leurs angles avec Ox; $\operatorname{tang}\alpha_1$, $\operatorname{tang}\alpha_2$, $\operatorname{tang}\alpha_3$ sont les racines de l'équation ci-dessus, et l'on a

$$\operatorname{tang}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \frac{\Sigma \operatorname{tang}\alpha_1 - \operatorname{tang}\alpha_1 \operatorname{tang}\alpha_2 \operatorname{tang}\alpha_3}{1 - \Sigma \operatorname{tang}\alpha_1 \operatorname{tang}\alpha_2}$$

$$= \frac{-\frac{2a}{q} + \frac{p}{q}}{1 - \frac{2b}{q}} = \frac{p - 2a}{q - 2b}.$$

Soit, d'autre part, α l'angle que fait avec Ox la droite joignant les foyers de P et Q; on a

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{b - \frac{q}{2}}{\frac{p}{2} - a} = \frac{2b - q}{p - 2a}.$$

Par conséquent,

$$\operatorname{tang}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = -\cot\alpha,$$

d'où

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = +\alpha + n\pi - \frac{\pi}{2},$$

n étant un nombre entier, ce qui démontre la seconde partie de la question.

Les axes de P et Q ont pour équations

$$y = b,$$

$$x = a.$$

Le lieu de leur point commun est donc la droite

$$2y - q = (p - 2x)\tang\alpha.$$

III. Proposons-nous de déterminer a et b de manière que les paraboles P et Q aient trois de leurs points communs confondus en un seul.

L'équation en λ du système des coniques

$$(y-b)^2 - 2px = 0,$$
$$(x-a)^2 - 2qy = 0$$

est

$$q^2\lambda^3 + 2bq\lambda^2 + 2pa\lambda + p^2 = 0,$$

qu'on obtient sans difficulté en annulant le discriminant du premier membre de l'équation (1).

Les paraboles P et Q auront trois points confondus en un seul si cette équation a une racine triple. λ désignant cette racine, on a

$$\left\{\begin{aligned} 3\lambda &= -\frac{2b}{q},\\ 3\lambda^2 &= \frac{2pa}{q^2},\\ \lambda^3 &= -\frac{p^2}{q^2},\end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire

$$\left\{\begin{aligned} a &= \frac{3}{2}\sqrt[3]{pq^2},\\ b &= \frac{3}{2}\sqrt[3]{p^2 q},\\ \lambda &= -\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{2}{3}}.\end{aligned}\right.$$

Pour cette valeur de λ, (1) représente un système de deux droites dont le centre est précisément le point de contact de P et Q. Les coordonnées de ce point sont

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= a + \frac{p}{\lambda},\\ y_1 &= b + q\lambda\end{aligned}\right.$$

ou, en remplaçant a, b, λ par leurs valeurs et simplifiant,

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{pq^2}, \\ y_1 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{p^2 q}. \end{cases}$$

Quant au coefficient angulaire de la tangente commune en ce point, il a pour valeur

$$-\frac{-2p}{2(y_1 - b)} = -\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

IV. Soit (x, y) un ombilic des paraboles P et Q. L'équation aux coefficients angulaires des tangentes à P issues de ce point est

$$y = mx + b + \frac{p}{2m}$$

ou

$$2x.m^2 + 2(b - y)m + p = 0.$$

De même, l'équation aux coefficients angulaires des tangentes issues du même point à Q est

$$q m^2 + 2(a - x)m + 2y = 0;$$

les équations devant avoir les mêmes racines, on a

$$\frac{2x}{q} = \frac{b - y}{a - x} = \frac{p}{2y},$$

d'où

$$xy = \frac{pq}{4}.$$

Ce qui montre que les points de rencontre des tangentes communes à une parabole P et une parabole Q se trouvent tous sur l'hyperbole équilatère représentée par l'équation ci-dessus.