NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉMILE BOREL

Généralisation de la question proposée pour l'admission à l'École polytechnique en 1874

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 495-500

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__495_0>

GÉNÉRALISATION DE LA QUESTION PROPOSÉE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1874;

PAR M. ÉMILE BOREL,
Élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Niewenglowski).

On donne un triangle ABC. *On sait que, par un point* M *de son plan, passent, en général, deux coniques d'excentricité donnée e circonscrites au triangle.*

Cela posé, trouver le lieu du point M *tel que les axes homologues des deux coniques correspondantes fassent entre eux un angle donné* V.

Pour résoudre ce problème, nous ferons usage de la transformation du second ordre qui, en prenant pour triangle de référence le triangle ABC et supposant les coordonnées trilinéaires normales, est définie par les formules

$$Xx = Yy = Zz.$$

Rappelons-en sommairement les principales propriétés.

A un point correspond un point; les droites qui joignent deux points correspondants au sommet d'un même angle du triangle sont antiparallèles par rapport aux côtés de cet angle. Exception unique : aux sommets du triangle correspondent tous les points des côtés opposés.

Aux droites menées par le sommet d'un angle du triangle de référence correspondent les droites antiparallèles par rapport à cet angle; aux autres droites, des coniques circonscrites au triangle de référence; à la droite de l'infini correspond le cercle circonscrit.

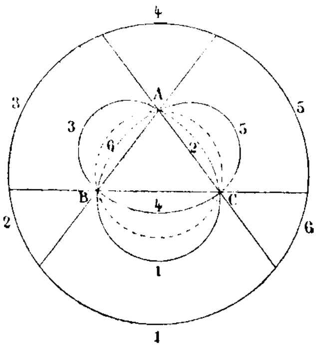
A une conique correspond, en général, une courbe du quatrième ordre ayant pour points doubles les trois sommets. Si la conique passe par un, deux ou trois sommets du triangle, la transformée est une cubique, une conique ou une droite.

Aux coniques considérées dans l'énoncé correspondent donc des droites qui rencontrent le cercle circonscrit en des points qui correspondent aux points à l'infini de la conique. Les droites qui joignent ces points d'intersection à l'un des sommets du triangle de référence font donc un angle égal à celui des asymptotes de la conique. Si l'on désigne cet angle par 2θ, ces droites envelopperont un cercle concentrique au cercle circonscrit et de rayon $R\cos 2\theta$. On a d'ailleurs $\cos\theta = \frac{1}{e}$; ce rayon est donc égal à $\frac{R(2-e^2)}{e^2}$, même lorsque θ est imaginaire.

Aux deux coniques d'excentricité e qui passent par un point du plan correspondent les deux tangentes à ce cercle menées par le point correspondant. L'angle de ces deux tangentes est d'ailleurs égal à $2V$. En effet, les parallèles à ces tangentes menées par le point A correspondent aux droites qui joignent le point A aux quatrièmes points d'intersection des coniques avec le cercle circonscrit et, en vertu du théorème de Joachimstahl, l'angle de ces deux droites est double de celui des axes des deux coniques. De plus, dans le cas où les coniques sont des hyperboles, on voit, par de simples considérations de mesures d'angle, en regardant les points d'intersection des droites avec le cercle circonscrit comme transformés des points à l'infini des deux coniques, que, si V est l'angle des axes *homologues* des coniques, c'est l'angle des deux tangentes, dans lequel n'est pas compris le cercle, qui est égal à $2V$. Le lieu du point de concours des tangentes est donc un cercle concentrique au cercle circonscrit et de rayon $\frac{R\cos 2\theta}{\cos V}$ ou $\frac{R(2-e^2)}{e^2\cos V}$ dans le cas où l'angle des asymptotes est imaginaire. Le lieu demandé est donc une courbe du quatrième ordre ayant pour points doubles les trois sommets du triangle et tangente à la droite de l'infini aux points cycliques. C'est donc une courbe unicursale et fermée. Sa forme dépend de la grandeur du rayon du cercle dont elle est la transformée.

Si les coniques sont des ellipses ou des paraboles, ou

Fig. 1.



si l'on a $2\theta < V$, les coniques étant des hyperboles, le cercle est extérieur au cercle circonscrit. La courbe est alors complètement extérieure au triangle. On la construit très aisément en déterminant dans quelle région par rapport au triangle et au cercle circonscrit se trouvent les points correspondant à un arc déterminé du cercle. On a marqué d'un même numéro les arcs correspondants de la courbe et du cercle. On peut obtenir les tangentes au point A, par exemple, en prenant les droites antiparallèles par rapport à l'angle A de celles qui joignent le point A aux points d'intersection du cercle avec BC.

Si l'on avait $\cos V = 0$, c'est-à-dire $V = \frac{\pi}{2}$, le cercle deviendrait la droite de l'infini, et la courbe se réduirait au cercle circonscrit, ce qui est d'ailleurs évident.

Supposons maintenant que les coniques soient des hyperboles, et soit d'abord $V = 2\theta$. Ce cercle se confond alors avec le cercle circonscrit, et le lieu se réduit aux trois côtés du triangle et à la droite de l'infini, ce qu'on pouvait prévoir géométriquement.

Soit maintenant $V > 2\theta$, mais

$$\frac{\cos 2\theta}{\cos V} > \cos A > \cos B > \cos C.$$

On suppose, pour fixer les idées, $A < B < C$. Le cercle est alors intérieur au cercle circonscrit, mais coupe les trois côtés du triangle. Les points doubles sont encore réels, et, en étudiant point par point la correspondance des deux courbes, on a la forme ci-contre.

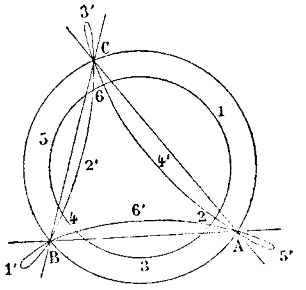
Si $\frac{\cos 2\theta}{\cos V} = \cos A$, un des points doubles devient un point de rebroussement, et, si $\frac{\cos 2\theta}{\cos V} < \cos A$, il devient un point double isolé. On peut avoir ainsi successivement diverses formes intermédiaires. Si $\frac{\cos 2\theta}{\cos V} < \cos C$, on a un anneau fermé avec trois points doubles isolés. Dans le cas où le triangle est équilatéral et où

$$\frac{\cos 2\theta}{\cos V} = \frac{1}{2},$$

le lieu est une hypocycloïde à trois rebroussements. Enfin, si $\cos 2\theta = 0$, le lieu se réduit au point de concours des hauteurs, quel que soit $\cos V$. Les coniques sont, en effet, alors des hyperboles équilatères, et il n'en passe qu'une par chaque point du plan, sauf par le point de concours des hauteurs.

Pour avoir l'équation du lieu, formons l'équation du cercle concentrique au cercle circonscrit et de rayon ρ.

Fig. 2.



Les équations de ces deux cercles rapportés à deux diamètres rectangulaires sont de la forme

$$R^2 - x^2 - y^2 = 0,$$
$$\rho^2 - x^2 - y^2 = 0.$$

En coordonnées trilinéaires, ces équations deviennent

$$aYZ + bZX + cXY = 0,$$
$$aYZ + bZX + cXY + K(aX + bY + cZ)^2 = 0,$$

a, b, c étant les longueurs des côtés du triangle de référence; il s'agit de déterminer la constante K.

Pour cela, remarquons que les formules par lesquelles on passe des secondes équations aux premières sont de la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} X = p - x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ Y = q - x\cos\beta - y\sin\beta, \\ Z = r - x\cos\gamma - y\sin\gamma. \end{cases}$$

On a identiquement

$$aYZ + bZX + cXY = \lambda(R^2 - x^2 - y^2).$$

Pour déterminer λ, il suffit de remarquer que, le carré du module de la substitution (1) étant égal à $\frac{S^2}{R^2}$, on a, le discriminant d'une forme quadratique étant un invariant,

$$\lambda^3 R^2 = \frac{abc}{4}\,\frac{S^2}{R^2} = \frac{S^3}{R},$$

d'où

$$\lambda = \frac{S}{R}.$$

On a donc identiquement

$$R^2 - x^2 - y^2 = \frac{R}{S}(aYZ + bZX + cXY)$$

et

$$\rho^2 - x^2 - y^2 = \frac{R}{S}(aYZ + bZX + cXY) + (\rho^2 - R^2)\frac{(aX + bY + cZ)^2}{4S^2}.$$

L'équation du cercle est donc

$$abc(aYZ + bZX + cXY) + (\rho^2 - R^2)(aX + bY + cZ)^2 = 0,$$

et l'équation du lieu

$$abcXYZ(aX + bY + cZ) + (\rho^2 - R^2)(aYZ + bZX + cXY)^2 = 0,$$

car il suffit de remplacer X, Y, Z par $\frac{1}{X}$, $\frac{1}{Y}$, $\frac{1}{Z}$.

On peut remarquer qu'il résulte de la solution précédente que l'enveloppe de la famille de coniques considérée dans l'énoncé est une courbe de même forme.