NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CESÀRO

Remarques sur les surfaces gauches

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 445-458

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__445_1>

Nova definizione della curvatura delle superficie e su confronta con quella di Gauss; par M. F. Casorati. Milano; 1889.

REMARQUES SUR LES SURFACES GAUCHES;

Par M. E. CESARO.

M. E. Amigues s'est tout récemment occupé [1] de l'étude des surfaces gauches, dont la ligne de striction est donnée. Nous nous proposons de faire voir qu'on peut aisément établir les propriétés signalées par M. Amigues, et une foule d'autres propriétés des surfaces gauches, au moyen des méthodes intrinsèques, que nous avons développées à plusieurs reprises dans ce Recueil. Il suffit d'employer, dans ce but, un système d'axes mobiles le long de la ligne de striction, et coïncidant à chaque instant avec la tangente, la binormale et la normale principale à cette courbe. Si G et G' sont les génératrices de la surface, issues de deux points consécutifs M et M' de la ligne de striction, il est clair que le trièdre formé par la tangente en M, par G et par la parallèle à G', menée par M, est rectangle le long de la troisième arête, et, par suite, si a, b, c sont les cosinus directeurs de G, et $a+\delta a$, $b+\delta b$, $c+\delta c$ ceux de G' par rapport aux axes d'origine M, on a $\delta a = 0$. On sait d'ailleurs que, pour une direction quelconque,

$$(1)\quad \frac{\delta a}{ds} = a' - \frac{c}{\rho},\qquad \frac{\delta b}{ds} = b' - \frac{c}{r},\qquad \frac{\delta c}{ds} = c' + \frac{a}{\rho} + \frac{b}{r},$$

les accents servant à désigner les dérivées par rapport à l'arc s. Conséquemment, pour que G soit la génératrice

---

[1] Même Tome, p. 77.

d'une surface gauche, dont la courbe fondamentale (M) serait la ligne de striction, il faut et il suffit que l'on ait

$$(2)\qquad a' = \frac{c}{\rho}.$$

On voit par là que la ligne de striction a la propriété de ne pouvoir être géodésique sans rencontrer les génératrices sous un angle constant, et réciproquement; car, en vertu de (2), c ne peut être nul sans que a soit constant, et réciproquement. En outre, il n'y a pas sur la surface d'autres lignes jouissant de la même propriété : les hypothèses $a =$ const., $c = 0$ entraînent, en effet, $\delta a = 0$, ce qui caractérise la ligne de striction. Les propositions qui précèdent sont dues à M. Ossian Bonnet.

Cela étant, si l'on observe que la plus courte distance de G et G' est $\sqrt{b^2 + c^2}\, ds$, et si l'on appelle $d\theta$ l'angle de ces droites, on voit que le paramètre de distribution des plans tangents est

$$(3)\qquad \frac{1}{\varpi} = \frac{\theta'}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

D'autre part, les relations

$$b\,\delta b + c\,\delta c = 0, \qquad d\theta^2 = \delta b^2 + \delta c^2$$

donnent

$$-\frac{\delta b}{c} = \frac{\delta c}{b} = \frac{d\theta}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{ds}{\varpi}.$$

On a donc, en observant (1) et (2),

$$(4)\quad a' = \frac{c}{\rho}, \qquad b' = \frac{c}{r} - \frac{c}{\varpi}, \qquad c' = -\frac{a}{\rho} - \frac{b}{r} + \frac{b}{\varpi}.$$

Ce sont là les formules fondamentales pour l'étude intrinsèque des surfaces gauches. On en trouve sans peine une interprétation géométrique en observant que, si l'on diminue de $\frac{1}{\varpi}$ la torsion de (M), elles coïncident avec les conditions nécessaires et suffisantes pour que la direction considérée soit invariable dans l'espace.

Pour que la ligne de striction soit une *géodésique* de la surface, il faut et il suffit que la droite G soit située dans le plan rectifiant de la courbe. On doit donc avoir $c = 0$; puis les formules (4) montrent que a et b sont constants et que l'on a

$$\frac{a}{\rho} + \frac{b}{r} = \frac{b}{\varpi}. \tag{5}$$

En particulier, si la courbe est une hélice tracée sur un cylindre de révolution, ϖ est constant. On arrive aux mêmes conclusions en partant de l'hypothèse $a =$ const., et l'on retrouve ainsi un théorème énoncé par M. Amigues (¹). La relation (5) fournit aisément le moyen de construire les surfaces gauches, qui admettent pour ligne de striction une géodésique. Cette construction a été indiquée par M. Pirondini dans ses *Studii geometrici relativi specialmente alle superficie gobbe* (²).

Pour que la ligne de striction soit *asymptotique,* il faut et il suffit que G soit dans le plan osculateur, et, par suite, que l'on ait $b = 0$; puis, d'après (4), $\varpi = r$, et

$$a' = \frac{c}{\rho}, \qquad c' = -\frac{a}{\rho}.$$

Ces égalités fournissent la construction, signalée par M. Catalan (¹), des surfaces gauches admettant pour ligne de striction une de leurs lignes asymptotiques.

(¹) *Loc. cit.,* p. 79.

(²) *Journal de Battaglini,* 1885, p. 304.

(¹) *Bulletin de la Société philomathique,* 1848.

Pour que la ligne de striction soit une *ligne de courbure,* il faut et il suffit que la normale à la surface, au point M, engendre une surface développable. Les équations de la normale sont

$$x = 0, \qquad by + cz = 0,$$

et leur dérivation donne

$$z = \rho, \qquad bz - cy = a\varpi.$$

En éliminant x, y, z, on obtient la condition cherchée

$$(6) \qquad \frac{\varpi}{\rho} = \frac{b^2 + c^2}{ab}.$$

De plus, le rayon de courbure de la section normale, tangente à (M), est

$$R_1 = \frac{\rho}{b}\sqrt{b^2 + c^2},$$

et il est clair que les courbures principales de la surface sont liées par l'égalité

$$\frac{a^2}{R_1} + \frac{b^2 + c^2}{R_2} = 0,$$

d'où l'on tire

$$R_2 = -\frac{\varpi}{a}\sqrt{b^2 + c^2},$$

puis $R_1 R_2 = -\varpi^2$. Lors donc que la ligne de striction est ligne de courbure de la surface, la courbure de celle-ci, le long de la ligne en question, est mesurée, en valeur absolue, par le carré du paramètre de distribution des plans tangents.

L'équation du plan tangent à la surface est

$$cy - bz = 0,$$

et sa dérivation donne

$$\frac{bx - ay}{\rho} + \frac{by + cz}{\varpi} = 0.$$

Il en résulte que les cosinus directeurs de la génératrice Γ de la surface développable, circonscrite à la surface donnée suivant la ligne de striction, sont proportionnels à

$$(7) \qquad ab - (b^2 + c^2)\frac{\rho}{\varpi}, \quad b^2, \quad bc.$$

Si la ligne est géodésique, les égalités $c = 0$ et (5) nous disent que ces cosinus sont proportionnels à $-\rho$, r, 0. La développable circonscrite est donc la surface rectifiante de (M) : cela devait être. Si la ligne de striction est asymptotique, on a $b = 0$, et les cosinus cherchés sont 1, 0, 0. Dans ce cas, (M), ligne asymptotique de striction sur la surface gauche, est arête de rebroussement de la développable circonscrite. Enfin, si (M) est ligne de courbure, l'égalité (6) est vérifiée, et l'on voit que les cosinus de Γ sont proportionnels à 0, b, c : les génératrices de la développable circonscrite suivant la ligne de striction rencontrent cette ligne à angle droit. Ces résultats sont fort connus, et l'on sait qu'ils subsistent pour une surface quelconque. Il en est de même du résultat qu'on obtient en observant que, si (M) est ligne plane de courbure, les conditions (4) et (6) exigent que $\frac{b}{c}$ soit constant, d'où il suit que le plan de (M) coupe la surface partout sous le même angle. Remarquons enfin que toute ligne de striction et de courbure ne saurait être géodésique sans être plane. En effet, les conditions (5) et (6) ne peuvent coexister, pour $c = 0$, si r a une valeur finie. Dans ce cas la développable circonscrite suivant la ligne de striction est un cylindre, admettant pour section droite la ligne considérée, dont la courbure varie proportionnellement au paramètre de distribution.

Puisque les cosinus l, m, n de Γ sont proportionnels aux quantités (7), on trouve facilement que l'angle $\varphi = \Gamma G$ est donné par la formule

$$\tag{8} \operatorname{tang}\varphi = \frac{(b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\varpi}{\rho} b - a(b^2+c^2)}.$$

Dès lors, si l'on pose, pour abréger,

$$\cos\psi = a\cos\varphi - \sqrt{b^2+c^2}\sin\varphi,$$
$$\sin\psi = a\sin\varphi + \sqrt{b^2+c^2}\cos\varphi,$$

on peut écrire

$$l = \cos\psi, \qquad m = \frac{b\sin\psi}{\sqrt{b^2+c^2}}, \qquad n = \frac{c\sin\psi}{\sqrt{b^2+c^2}}.$$

On trouve ensuite

$$\frac{\partial l}{ds} = -\varphi'\sin\psi, \qquad \frac{\partial m}{ds} = \frac{b\varphi'\cos\psi}{\sqrt{b^2+c^2}}, \qquad \frac{\partial n}{ds} = \frac{c\varphi'\cos\psi}{\sqrt{b^2+c^2}},$$

et l'on voit que $\varphi =$ const. est la condition nécessaire et suffisante pour que la direction de Γ soit invariable dans l'espace. On en déduit sans peine que les surfaces à cône directeur de révolution sont caractérisées par la propriété de toucher un cylindre suivant leur ligne de striction. Lorsque (M) est ligne de courbure, l'égalité (6) est vérifiée, et la formule (8) fait dépendre φ de a seulement. Pour que φ soit constant il faut donc et il suffit que a le soit, et, par suite, que (M) soit une géodésique. Il en résulte que les surfaces gauches, dont la ligne de striction est géodésique et ligne de courbure, sont caractérisées par un cône directeur de révolution [1].

Que faut-il pour que les génératrices de la surface donnée soient les *normales principales* d'une courbe? Soit N le point où la génératrice issue de M rencontre la courbe inconnue, et désignons par l, m, n les cosinus directeurs de la tangente à (N), en N, et par k le rapport des vitesses des points N et M. Si pa, pb, pc sont les coordonnées de N, on a, en appliquant les formules fondamentales de la Géométrie intrinsèque des courbes et en ayant égard aux relations (4),

$$kl = p'a + 1, \qquad km = p'b - \frac{pc}{\varpi}, \qquad kn = p'c + \frac{pb}{\varpi}.$$

Si l'on exprime que les directions (a, b, c) et (l, m, n) sont orthogonales, on trouve $p' = -a$, de sorte que

$$kl = b^2 + c^2, \qquad km = -ab - \frac{pc}{\varpi}, \qquad kn = -ac + \frac{pb}{\varpi}.$$

On en déduit

$$k^2 = (b^2 + c^2)\left(1 + \frac{p^2}{\varpi^2}\right).$$

Par dérivation des avant-dernières formules, on obtient

$$k\frac{\delta l}{ds} = -\frac{pb}{\varpi\rho} - (b^2 + c^2)\frac{p}{\varpi}\frac{d}{ds}\operatorname{arc\,tang}\frac{p}{\varpi},$$

$$k\frac{\delta m}{ds} = -\frac{c}{b^2 + c^2}\left(\frac{b}{\rho} - a\frac{b^2 + c^2}{\varpi}\right)$$
$$+ \frac{pb}{\varpi(b^2 + c^2)}\left(\frac{ab}{\rho} - \frac{b^2 + c^2}{\varpi}\right) - \left(c - ab\frac{p}{\varpi}\right)\frac{d}{ds}\operatorname{arc\,tang}\frac{p}{\varpi},$$

$$k\frac{\delta n}{ds} = \frac{b}{b^2 + c^2}\left(\frac{b}{\rho} - a\frac{b^2 + c^2}{\varpi}\right)$$
$$+ \frac{pc}{\varpi(b^2 + c^2)}\left(\frac{ab}{\rho} - \frac{b^2 + c^2}{\varpi}\right) + \left(b + ac\frac{p}{\varpi}\right)\frac{d}{ds}\operatorname{arc\,tang}\frac{p}{\varpi}.$$

---

[1] Pirondini, *loc. cit.*, p. 309.

En élevant au carré ces égalités, et en les ajoutant, on trouve que le rayon de courbure ρ_0 de (N) est donné par la formule

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{k^2}{\rho_0^2} &= \left(\frac{b}{b^2+c^2}\,\frac{1}{\rho} - \frac{a}{\varpi} + \frac{d}{ds}\,\text{arc tang}\,\frac{p}{\varpi}\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{p}{\varpi}\sqrt{\frac{b^2+c^2}{p^2+\varpi^2}}\right)^2. \end{aligned}\right.$$

Soit ψ l'angle sous lequel la normale principale de (N) rencontre la génératrice. On a

$$a\,\frac{\partial l}{ds} + b\,\frac{\partial m}{ds} + c\,\frac{\partial n}{ds} = -\frac{k}{\rho_0}\cos\psi\,;$$

puis, par l'emploi des formules précédentes,

$$(10)\qquad \rho_0 = \left(p + \frac{\varpi^2}{p}\right)\cos\psi.$$

Nous avons ainsi l'expression de la courbure des trajectoires orthogonales des génératrices des surfaces gauches, en fonction de p, ϖ et de l'angle ψ. Lorsque cet angle est donné, on obtient la condition que doivent vérifier a, b, c, en portant dans (9) le résultat (10). Il vient

$$\frac{b}{b^2+c^2}\,\frac{1}{\rho} - \frac{a}{\varpi} + \frac{d}{ds}\,\text{arc tang}\,\frac{p}{\varpi} = \frac{p}{\varpi}\sqrt{\frac{b^2+c^2}{p^2+\varpi^2}}\,\text{tang}\,\psi.$$

En particulier, la condition nécessaire et suffisante pour que la surface donnée soit la surface des normales principales d'une courbe est

$$\frac{a}{\varpi} - \frac{b}{b^2+c^2}\,\frac{1}{\rho} = \frac{d}{ds}\,\text{arc tang}\,\frac{p}{\varpi}.$$

On voit, en ayant égard à (8) et au théorème de Chasles sur la distribution des plans tangents, que, si la surface est à plan directeur, les plans qui la touchent suivant

(N) sont également inclinés sur les plans correspondants, qui la touchent suivant la ligne de striction.

On a, par le théorème de Lancret,

$$\theta'^2 = k^2\left(\frac{1}{\rho_0^2} + \frac{1}{r_0^2}\right),$$

d'où l'on déduit, en employant (3) et (10), la torsion de (N). On trouve ainsi

$$\rho_0 = p + \frac{\varpi^2}{p}, \qquad r_0 = \varpi + \frac{p^2}{\varpi}.$$

Ces formules ont été remarquées depuis longtemps par M. Dini dans une étude sur *Alcune proprietà delle superficie gobbe delle normali principali* (¹).

Les calculs qui précèdent sont, il est vrai, assez prolixes; mais ils conduisent méthodiquement au but, et l'on peut du reste les rendre fort simples par un choix convenable de la courbe fondamentale. Soit (N) cette courbe, et continuons à désigner par p la longueur NM, par a, b, c les cosinus directeurs de NM et par $dp + dq$ la projection de MM' sur N'M'. On a

$$(11)\qquad \begin{cases} ds + p\,\delta a - a\,dq = l\varpi\,d\theta,\\ \quad p\,\delta b - b\,dq = m\varpi\,d\theta,\\ \quad p\,\delta c - c\,dq = n\varpi\,d\theta, \end{cases}$$

où l, m, n sont les cosinus directeurs de la commune perpendiculaire à NM et N'M' :

$$\frac{l}{b\,\delta c - c\,\delta b} = \frac{m}{c\,\delta a - a\,\delta c} = \frac{n}{a\,\delta b - b\,\delta a} = \frac{1}{d\theta}.$$

Nous supposerons, dorénavant, que la droite NM soit invariablement liée au trièdre fondamental, de sorte que

$$\frac{\delta a}{ds} = -\frac{c}{\rho}, \qquad \frac{\delta b}{ds} = -\frac{c}{r}, \qquad \frac{\delta c}{ds} = \frac{a}{\rho} + \frac{b}{r},$$

(¹) *Journal de Battaglini*, 1866.

et, par suite,

$$(12) \qquad \theta'^2 = \left(\frac{a}{\rho} + \frac{b}{r}\right)^2 + \frac{c^2}{\rho^2} + \frac{c^2}{r^2} = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{h\rho},$$

où

$$h = \frac{\rho r^2}{\rho^2 + r^2}$$

est le rayon du cylindre osculateur à (N), et l'on a posé

$$\alpha = \frac{a\rho - br}{\sqrt{\rho^2 + r^2}}, \qquad \beta = \frac{ar + b\rho}{\sqrt{\rho^2 + r^2}}, \qquad \gamma = c.$$

Les égalités (11), respectivement multipliées par δa, δb, δc, puis par l, m, n, donnent par addition

$$p\, d\theta^2 = -\delta a\, ds, \qquad \varpi\, d\theta = l\, ds,$$

d'où

$$(13) \qquad p\theta'^2 = \frac{\gamma}{\rho}, \qquad \varpi\theta'^2 = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{r} - \frac{\alpha\beta}{\rho}.$$

Donc, en utilisant (12), on voit que le paramètre de distribution des plans tangents à la surface engendrée par une droite, invariablement liée au trièdre fondamental, est donné par la formule

$$\varpi = \left(\frac{\rho}{r} - \frac{\alpha\beta}{\beta^2 + \gamma^2}\right) h.$$

A chaque direction correspond une valeur de ϖ, et l'on démontre facilement qu'il y a une seule couple de directions, symétriques par rapport à la normale principale, qui correspondent à un même paramètre, *pourvu que la courbe ne soit pas une hélice*. C'est pourquoi il n'y a que la tangente, en général, qui engendre une surface développable, comme l'a remarqué depuis longtemps M. Appell [1]. Il n'y a, de même, que la binor-

---

[1] *Nouvelle Correspondance mathématique*, 1880; p. 96.

male et la normale principale qui engendrent des surfaces gauches dont les paramètres de distribution soient respectivement

$$\frac{1}{r}, \quad \frac{1}{r} + \frac{r}{\rho^2}.$$

Si la courbe est une hélice, tracée sur un cylindre quelconque, il y a une infinité de droites correspondant à un même paramètre : elles forment un cône du second ordre. Pour $\varpi = 0$, on a le cône signalé par M. Appell, touchant le plan osculateur suivant la tangente à la courbe. Il y a, de même, un cône touchant le plan normal suivant la binormale, et dont toutes les génératrices engendrent des surfaces gauches, qui ont pour paramètre commun la torsion de l'hélice. Le cône correspondant à la normale principale se résout en deux plans perpendiculaires. Tous ces cônes, perpendiculaires au plan tangent, se raccordent suivant la génératrice du cylindre.

Les cônes que nous venons de trouver ne cessent d'exister lorsque (N) n'est pas une hélice ; mais ils sont alors variables d'un point à l'autre de la courbe. Par exemple, le cône de M. Appell est le lieu *instantané* des droites, invariablement liées au trièdre fondamental, génératrices de surfaces gauches pour lesquelles on a, à l'instant considéré, $\varpi = 0$. En général, une seule de ces droites continue à correspondre à cette valeur de ϖ, et engendre, par conséquent, une développable : les autres passent sur d'autres cônes, définis par d'autres valeurs de ϖ, toutes différentes entre elles.

Quant aux points centraux, leur position est déterminée par la première formule (13), qui donne

$$p = \frac{h\gamma}{q^2 + \gamma^2}.$$

Ces points se trouvent donc sur un cylindre de diamètre h, touchant la surface rectifiante suivant sa génératrice, et rencontrant orthogonalement, sur des paraboloïdes hyperboliques, tous les cônes dont il vient d'être question.

Arrêtons-nous aux surfaces des normales principales d'une courbe (N), et demandons-nous s'il est possible que ces normales soient les binormales d'une autre courbe (M). Si $x = 0, y = 0, z = p$ sont les coordonnées de (M), on a

$$\frac{\partial x}{ds} = 1 - \frac{p}{\rho}, \qquad \frac{\partial y}{ds} = -\frac{p}{r}, \qquad \frac{\partial z}{ds} = p'.$$

Pour que NM soit normale à (M), il faut que p' soit nul, et, par suite, que p soit *constant*. Si l'on veut, en outre, que NM soit binormale de (M), il faut que l'on ait

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial x}{ds} + \frac{1}{r}\frac{\partial y}{ds} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(14) \qquad \frac{1}{p\rho} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}.$$

Les cosinus directeurs de la tangente à (M) sont donc

$$l = \frac{\sqrt{p\rho}}{r}, \qquad m = -\sqrt{\frac{p}{\rho}}, \qquad n = 0,$$

et le rapport k des vitesses des points M et N est

$$(15) \qquad \frac{ds_0}{ds} = \frac{\sqrt{p\rho}}{r}.$$

Cela étant, on a

$$k\frac{\partial l}{ds} = \frac{p\rho'}{2\rho^2}, \qquad k\frac{\partial m}{ds} = \frac{p\rho'}{2\rho r}, \qquad k\frac{\partial n}{ds} = 0,$$

d'où l'on déduit l'expression du rayon de courbure de (M)

$$(16) \qquad \rho_0 = 2\frac{\sqrt{p\rho}}{\rho'}\left(\frac{\rho}{r}\right)^2.$$

Enfin, si l'on observe que les cosinus de la binormale à (M) sont o, o, 1, on a immédiatement, pour exprimer la torsion de (M),

$$\frac{k}{r_0} = \sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}},$$

d'où

$$(17) \qquad r_0 = p\frac{\rho}{r}.$$

Ainsi nous pouvons nous donner la courbe (N) par une de ses équations intrinsèques, l'autre équation étant nécessairement (14). Ensuite les équations (15), (16), (17) nous feront connaitre les coordonnées intrinsèques de (M). Enfin l'élimination de ρ, r, s entre les trois équations dont il s'agit, et les équations intrinsèques de (N), nous fournira les équations intrinsèques de (M).

Inversement, si la courbe (M) est connue, les relations (14) et (17) donnent immédiatement

$$(18) \qquad \rho = p + \frac{r_0^2}{p}, \qquad r = r_0 + \frac{p^2}{r_0};$$

puis l'égalité (15) devient

$$(19) \qquad \frac{ds}{ds_0} = \sqrt{1 + \frac{p^2}{r_0^2}}.$$

Enfin, en portant dans (16) tous ces résultats, on obtient

$$(20) \qquad \frac{1}{\rho_0} + \frac{d}{ds_0}\operatorname{arc\,tang}\frac{p}{\rho_0} = 0,$$

ce qui est la condition nécessaire et suffisante pour que les binormales de (M) soient les normales principales d'une autre courbe ([1]). Celle-ci est parfaitement déterminée par les équations (18) et (19).

([1]) PIRONDINI, *loc. cit.*, p. 319.

Nous allons appliquer ce qui précède au cas où la courbe (M) est une hélice. Nous exprimerons cela en introduisant une nouvelle longueur constante a et en écrivant $p\rho_0 = ar_0$. L'équation (20) devient

$$\frac{1}{\rho_0} + \frac{d}{ds}\operatorname{arc\,tang}\frac{a}{\rho_0} = 0,$$

et l'on en déduit que les équations intrinsèques de (M) sont

$$\rho_0 = a\sqrt{e^{\frac{2s_0}{a}} - 1}, \qquad r_0 = p\sqrt{e^{\frac{2s_0}{a}} - 1}.$$

La courbe (M) est donc une *tractrice* tordue. Ses coordonnées intrinsèques peuvent être exprimées en fonction d'une variable τ comme il suit :

$$s_0 = -a\log\sin\tau, \qquad \rho_0 = a\cot\tau, \qquad r_0 = p\cot\tau.$$

On en déduit, au moyen de (18) et (19),

$$s = -a\log\operatorname{tang}\frac{\tau}{2}, \qquad \rho = \frac{p}{\sin^2\tau}, \qquad r = \frac{p}{\sin\tau\cos\tau}.$$

Les équations intrinsèques de (N) sont donc

$$\rho = \frac{p}{4}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right)^2, \qquad \frac{\rho}{r} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{s}{a}} - e^{-\frac{s}{a}}\right).$$

D'une manière analogue on résoudrait toute autre question de Géométrie différentielle, concernant les surfaces réglées ; mais nous montrerons, sous peu, comment on doit s'y prendre pour appliquer la méthode qui précède à l'étude d'une surface quelconque.