ANDRADEZ

Sur deux théorèmes curieux signalés par M. Poincaré

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 435-440

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__435_1>

SUR DEUX THÉORÈMES CURIEUX SIGNALÉS PAR M. POINCARÉ;

PAR M. ANDRADEZ.

Dans deux Notes des *Comptes rendus* (années 1887 et 1888), M. Poincaré a entrepris de démontrer l'existence des fonctions fondamentales sur lesquelles repose la solution du problème du refroidissement d'un corps isotrope plongé dans un milieu indéfini ayant une température donnée, 0° si l'on veut.

A chacune de ces fonctions U se rattache un coefficient positif K, qu'on peut définir de la manière suivante :

F désignant une fonction de point définie à l'intérieur du corps, si l'on se donne l'intégrale de volume $\int F^2 d\tau$; par exemple, si l'on fait $\int F^2 d\tau = 1$, puis si l'on cherche le minimum de l'intégrale composée

$$(1) \qquad h\int F^2 d\omega + \int \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right] d\tau,$$

dont la première est étendue à la surface du corps et la seconde à son volume et dans laquelle h est la constante positive qui dépend du pouvoir émissif du corps et qui détermine le flux de chaleur à la surface de ce corps, on trouve immédiatement, par la règle d'Euler, que la fonction U_1 qui réalise ce minimum satisfait aux équations suivantes (notations ordinaires du potentiel)

$$\begin{cases} \Delta U_1 + K_1 U_1 = 0, & \text{en chaque point du volume,} \\ \dfrac{\partial U_1}{\partial n} + h U_1 = 0, & \text{en chaque point de la surface,} \end{cases}$$

et la constante K_1 est le minimum de l'intégrale composée étudiée.

Voici maintenant la loi de récurrence qui donne les fonctions des divers ordres $U_1, U_2, \ldots, U_i$.

Les fonctions précédentes étant supposées formées, on envisage une fonction F assujettie aux conditions suivantes

$$\int F^2 d\tau = 1, \qquad \int F U_1 d\tau = 0,$$
$$\int F U_2 d\tau = 0, \qquad \ldots; \qquad \int F U_{i-1} d\tau = 0;$$

la fonction F, pour laquelle l'intégrale composée (1) sera minima, est la nouvelle fonction U_i qui vérifie encore les équations

$$\begin{cases} \Delta U_i + K_i U_i = 0, \\ \dfrac{\partial U_i}{\partial n} + h U_i = 0, \end{cases}$$

dans lesquelles K_i désigne encore le minimum cherché.

Il résulte de là que les K_i vont en diminuant, quand leur ordre i croît. M. Poincaré a de plus démontré qu'ils décroissent indéfiniment.

Sa démonstration, fondée d'abord dans le cas d'un solide convexe et de $h = 0$, sur une transformation d'intégrale multiple et sur une nouvelle définition de K_2, s'étend au cas d'un corps quelconque par une décomposition de ce corps en solides convexes, et le théorème, étant démontré pour $h = 0$, a lieu *a fortiori* dans le cas général.

Enfin, après avoir établi ce beau résultat, l'auteur *énonce* deux théorèmes *extrêmement curieux :* l'un pour servir au calcul d'une limite supérieure de K_n dans le cas général de h quelconque, l'autre pour servir au calcul d'une limite supérieure de K_2, dans le cas de $h = 0$.

Voici des démonstrations fort simples de ces théorèmes :

Théorème (sur une limite de K_n). — *Soient n indéterminées $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, et n fonctions* arbitraires F_1, $F_2, \ldots, F_n$, *on pose*

$$F = \alpha_1 F_1 + \ldots + \alpha_n F_n,$$

puis

$$\begin{cases} B = \int F^2 d\tau, \\ A = h\displaystyle\int F^2 d\omega + \int \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right] d\tau, \end{cases}$$

puis on considère la forme quadratique des α

$$A - \lambda B,$$

dont on égale le discriminant à zéro; si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les racines de ce discriminant rangées par ordre de grandeurs croissantes, on aura généralement

$$\lambda_i > k_i.$$

Démonstration. — Considérons la forme $A - \lambda B$ qui est définie positive pour $\lambda < \lambda_1$, qui a un carré soustractif pour $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, qui a deux carrés soustractifs pour $\lambda_2 < \lambda < \lambda_3, \ldots$; donnons à λ la valeur $\lambda_i + \varepsilon$, la forme $A - \lambda B$ sera décomposée ainsi en carrés *indépendants*

$$-P_1^2 - P_2^2 - \ldots - P_i^2 + P_{i+1}^2 + P_{i+2}^2 + \ldots + P_n^2.$$

Or, d'après une remarque bien connue sur les formes quadratiques, nous pourrons donner à la forme une valeur négative, tout en satisfaisant aux relations linéaires suivantes, au nombre de $i - 1$,

$$(2)\qquad \begin{cases} \int FU_1\,d\tau = 0, \\ \int FU_2\,d\tau = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \int FU_i\,d\tau = 0. \end{cases}$$

On a donc, pour $\lambda = \lambda_i + \varepsilon$ et pour des valeurs convenables des α,

$$A - (\lambda_i + \varepsilon) B < 0;$$

d'autre part, à cause des relations (2), on a, par la définition même de K_i,

$$A - K_i B > 0.$$

On déduit de ces deux inégalités

$$\lambda_i + \varepsilon > K_i$$

et, par suite,

$$\lambda_i > K_i. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème (sur une limite de K_2, quand $h = 0$). — *Si l'on considère trois fonctions u, v, w, assujetties seu-*

lement à la surface du corps à vérifier la relation

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0 \tag{3}$$

(α, β, γ, cosinus directeurs de la normale à la surface), *on aura*

$$\frac{\int\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 d\tau}{\int(u^2 + v^2 + w^2)\,d\tau} > K_2. \tag{4}$$

Démonstration. — Si nous nous donnons

$$\int(u^2 + v^2 + w^2)\,d\tau = 1$$

et si nous égalons à zéro la variation de

$$\int\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 d\tau,$$

en tenant compte de la relation (3), nous trouvons sans difficulté pour les fonctions u', v', w', qui donnent le minimum de l'intégrale précédente, la condition

$$\int\left[\left(\frac{dS}{dx} + \lambda u'\right)\delta u' + \left(\frac{dS}{dy} + \lambda v'\right)\delta v' + \left(\frac{\partial S}{dz} + \lambda w'\right)\delta w'\right] d\tau = 0,$$

après avoir posé $S = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z}$, c'est-à-dire

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dS}{dx} + \lambda u' = 0, \\ &\frac{\partial S}{\partial y} + \lambda v' = 0, \\ &\frac{\partial S}{\partial z} + \lambda w' = 0, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

λ étant une constante, ce qui montre que S satisfait aux équations

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta S + \lambda S = 0, && \text{à l'intérieur du corps,} \\ &\frac{dS}{dn} = 0, && \text{à la surface du corps.} \end{aligned}\right. \tag{6}$$

et alors, dans ce cas du minimum, le numérateur du premier membre de (4) est précisément λ.

En tenant compte des relations (5) et (6), on peut encore dire qu'on aura

$$(7) \qquad \int \left[\left(\frac{dS}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dz}\right)^2 \right] d\tau = \lambda^2,$$

pendant que

$$(8) \qquad \int S^2 \, d\tau = \lambda,$$

et pendant qu'en même temps $\int S \, d\tau = 0$. Cette dernière se déduit du théorème de Green et de

$$\int \Delta S \, d\tau = 0, \qquad \frac{dS}{dn} = 0.$$

On déduit alors de (7) et (8) et de la définition de K_2

$$\lambda > K_2,$$

λ étant le minimum du premier membre de (4). L'inégalité (4) en résulte donc *a fortiori*. C. Q. F. D.