NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LEMAIRE

Solution de la question proposée pour l'admission à l'École polytechnique en 1888

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 391-400

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__391_1>

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1888;

Par M. LEMAIRE,
Professeur au lycée de Lorient.

On donne un quadrilatère plan OACB *et deux séries de paraboles : les unes tangentes en* A *à* AC *et ayant pour diamètre* OA ; *les autres tangentes en* B *à* BC *et ayant pour diamètre* OB.

On demande :

1° *De trouver le lieu du point de contact* M *d'une* *parabole de la première série avec une parabole de la deuxième série ;*

2° *D'indiquer, en laissant le triangle* OAB *invariable, dans quelle région du plan il faut placer le point* C *pour que le lieu soit une ellipse ou une hyperbole ;*

3° *De démontrer, dans l'hypothèse où* OACB *est un parallélogramme, que la tangente commune en* M *aux deux paraboles pivote autour du point de concours* K *des médianes du triangle* ABC ;

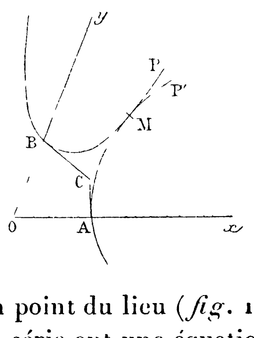
4° *De trouver, dans la même hypothèse, le lieu du point d'intersection* P *de la tangente en* M *aux deux paraboles avec l'autre tangente commune* DE *que l'on peut mener à ces deux courbes.*

N. B. — *On représentera la longueur* OA *par* a, *et la longueur* OB *par* b.

SOLUTION ANALYTIQUE.

I. Prenons pour axes de coordonnées OA et OB ; soient (a, o), (o, b), (p, q) les coordonnées de A, B, C ;

Fig. 1.



x_0, y_0 celles d'un point du lieu (*fig.* 1). Les paraboles P de la première série ont une équation de la forme

$$y^2 - 2P[y(p-a) - q(x-a)] = o.$$

De même, l'équation générale des paraboles P' de la seconde série est

$$x^2 - 2P'[x(q-b) - p(y-b)] = 0.$$

Le point M du lieu appartenant à la fois aux deux paraboles, on a

$$\begin{aligned} y_0^2 - 2P\,[y_0(p-a) - q(x_0-a)] &= 0, \\ x_0^2 - 2P'[x_0(q-b) - p(y_0-b)] &= 0. \end{aligned}$$

Écrivons que les tangentes en M aux deux courbes sont confondues, nous aurons

$$\frac{Pq}{x_0 - P'(q-b)} = \frac{y_0 - P(p-a)}{P'p}.$$

Pour avoir l'équation du lieu, il suffira d'éliminer les paramètres P et P' entre les trois relations précédentes, ce qui n'offre aucune difficulté puisque les deux premières sont du premier degré par rapport à ces paramètres. On trouve ainsi, en supprimant les indices,

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &2q(q-b)x^2 + 2p(p-a)y^2 \\ &\quad - [3pq + (p-a)(q-b)]xy \\ &\quad + 2q[a(b-q) + 2pb]x \\ &\quad + 2p[b(a-p) + 2qa]y - 4pqab = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation représente une conique passant par les points A' et B', par le symétrique C' de O par rapport à C, et enfin par les points de rencontre de C'A' avec Oy et de C'B' avec Ox, C'A' et C'B' étant les parallèles à CA et à CB, menées par le point C'.

II. Cette conique sera une ellipse, une parabole ou une hyperbole, selon que nous aurons

$$[3pq + (p-a)(q-b)]^2 - 16pq(p-a)(q-b) \lesseqgtr 0,$$

inégalité qu'on peut facilement mettre sous la forme

$$(2)\qquad [(p-a)(q-b)-9pq][-aq-bq+ab] \gtrless 0.$$

Cela posé, construisons la droite ayant pour équation

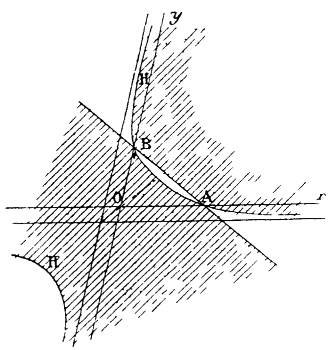
$$(\mathrm{AB})\qquad -ay-bx-ab=0.$$

et l'hyperbole représentée par

$$(\mathrm{H})\qquad (x-a)(y-b)-9xy=0.$$

La droite n'est autre que AB. L'hyperbole passe en A et B, a pour centre le point $\left(-\frac{a}{8}, -\frac{b}{8}\right)$ et ses asymptotes parallèles aux axes de coordonnées (*fig.* 2).

Fig. 2.



On reconnaît aisément que pour tous les points situés dans les parties du plan couvertes de hachures, le premier membre de (2) est positif, et, par suite, (1) représente une hyperbole. Si C est dans les autres parties du plan, l'équation représente une ellipse.

Dans le cas particulier où C est un point de H ou de AB, la conique (1) est une parabole.

III. Si OABC est un parallélogramme, on a

$$p = a \qquad \text{et} \qquad q = b.$$

Les équations générales des paraboles deviennent, dans cette hypothèse,

$$y^2 + 2P\, b(x - a) = 0,$$
$$x^2 + 2P'a(y - b) = 0.$$

La tangente en M a pour équation

$$y - y_0 = -\frac{Pb}{y_0}(x - x_0),$$

avec les conditions

$$(3) \qquad y_0^2 + 2P\, b(x_0 - a) = 0,$$
$$(4) \qquad x_0^2 + 2P'a(y_0 - b) = 0,$$
$$(5) \qquad \frac{Pb}{y_0} = \frac{x_0}{P'a},$$

de sorte que l'équation de la tangente s'écrit

$$(y - y_0) = \frac{y_0}{2(x_0 - a)}(x - x_0).$$

La relation qui exprime que cette droite passe par le centre de gravité K de ABC, dont les coordonnées sont $\frac{2a}{3}, \frac{2b}{3}$, est

$$2(x_0 - a)\left(\frac{2b}{3} - y_0\right) - y_0\left(\frac{2a}{3} - x_0\right) = 0$$

ou

$$-3x_0y_0 + 4(bx_0 + ay_0 - ab) = 0.$$

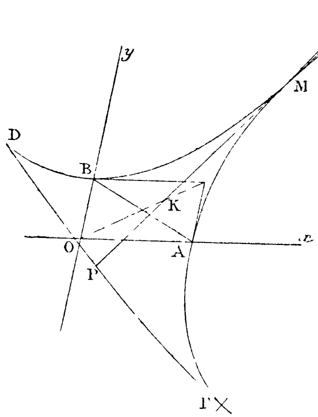
Or, en tenant compte de (3) et (4), on peut mettre (5) sous la forme

$$\frac{y_0}{2(x_0 - a)} = \frac{2(y_0 - b)}{x_0};$$

C'est précisément la relation demandée.

IV. Pour résoudre la quatrième partie, prenons pour paramètre le coefficient angulaire de la tangente commune en M (*fig.* 3).

Fig. 3.



Comme cette droite pivote autour du point K, son équation est de la forme

$$(\mathrm{MT}) \qquad 3y - 2b = m(3x - 2a).$$

Cherchons les conditions pour que l'équation

$$(6) \qquad y = \mu x + \nu$$

représente la seconde tangente commune aux deux paraboles correspondant à une direction donnée m de MT.

L'équation aux abscisses des points communs à la droite (6) et à la parabole P est

$$(\mu x + \nu)^2 + 2\mathrm{P}b(x - a) = 0,$$

d'où la condition de tangence

$$(7) \qquad 2\mu\nu + \mathrm{P}b + 2a\mu^2 = 0.$$

Nous trouverons de même la condition suivante de contact de la droite (6) et de la parabole (P')

$$(8) \qquad P'a\mu^2 - 2(\nu - b) = 0.$$

Éliminant ν entre les relations (7) et (8), on trouve

$$P'a\mu^3 + 2a\mu^2 + 2b\mu + Pb = 0,$$

qui est l'équation aux coefficients angulaires des tangentes communes aux deux paraboles. Cette équation doit admettre la valeur m pour racine double, d'où les relations

$$\mu + 2m = -\frac{2}{P'},$$

$$2\mu m + m^2 = \frac{2b}{P'a},$$

$$\mu m^2 = -\frac{Pb}{P'a}.$$

Éliminant P et P', nous obtenons facilement

$$\mu = -\frac{m(2b + am)}{b + 2am}.$$

La valeur correspondante de ν est donnée par l'équation (8), par exemple. On trouve

$$\nu = -\frac{(am - b)^2}{3(2am + b)},$$

de sorte qu'enfin, m étant le coefficient angulaire de la tangente commune en M, l'autre tangente commune a pour équation

$$y = -\frac{m(2b + am)}{b + 2am}x - \frac{(am - b)^2}{3(2am + b)}$$

ou

$$(\text{DE}) \qquad 3(2am + b)y + 3m(2b + am)x + (am - b)^2 = 0.$$

Nous aurons le lieu du point P d'intersection de (MT) et de (DE) en éliminant m entre les équations de ces deux droites.

Tirant m de la première, et transportant la valeur trouvée dans la seconde, nous obtenons

$$\begin{aligned} & y(3x-2a)(2ay+bx-2ab) \\ & \quad + x(3y-2b)(ay-2bx-2ab)-(ay-bx)^2=0 \end{aligned}$$

ou

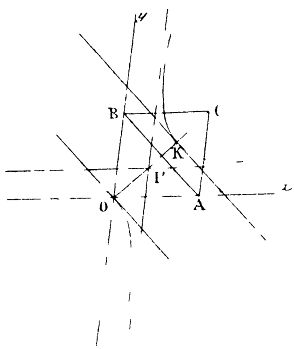
$$\begin{aligned} & 9xy(ay-bx)-(3a^2y^2+3b^2x^2+18abxy) \\ & \qquad\qquad\qquad -4ab(ay+bx)=0, \end{aligned}$$

ou

$$[3(ay+bx)-4ab][3xy-(ay+bx)]=0.$$

Le lieu se compose donc d'une droite et d'une hyperbole. La droite est la parallèle menée par K à AB.

Fig. 4.

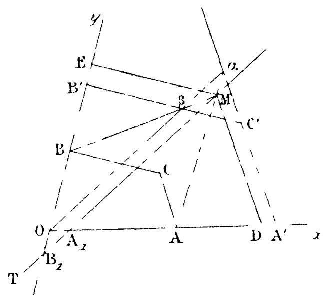


L'hyperbole a ses asymptotes parallèles aux axes de coordonnées; son centre est le centre de gravité de OAB; elle est tangente en K à la droite précédente et en O à la parallèle à AB menée par ce point (*fig.* 4).

CONSIDÉRATIONS GÉOMÉTRIQUES.

I. Il est facile de reconnaître géométriquement que le lieu de M est une conique (*fig.* 5). Soit, en effet, MT la tangente commune à un groupe de deux paraboles de l'énoncé ; A_1 et B_1 les points de rencontre de

Fig. 5.



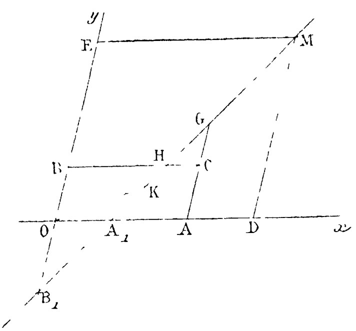
cette droite avec Ox et Oy ; MD et ME les parallèles menées par M à CA et CB. Il résulte d'une propriété connue de la parabole que A est le milieu de A_1D, et B le milieu de B_1E.

Par O, menons une parallèle à MT, rencontrant AM en α, et BM en β, et menons par α et β des parallèles à MD et ME ; soient A' et B' les points de rencontre de ces droites avec Ox et Oy. A est le milieu de OA'; B le milieu de OB', de sorte que le lieu du point M peut être engendré comme il suit :

Faisons pivoter autour de O une droite rencontrant C'A' en α et C'B' en β ; le point M d'intersection de $A\alpha$ et $B\beta$ est un point du lieu. On voit que le côté $\alpha\beta$ du triangle variable $M\alpha\beta$ passe par un point fixe O ; et les côtés $M\alpha$ et $M\beta$ passent en A et B, points également fixes. Le point M décrit donc une conique (théorème de Maclaurin). D'ailleurs cela résulte de ce que les points α et β forment sur $C'A'$ et $C'B'$ deux divisions homographiques et, par suite, $A\alpha$ et $B\beta$ deux faisceaux homographiques. La conique lieu de M passe par les sommets A et B des faisceaux. Elle passe aussi par C' et par les points de rencontre de Oy et $C'A'$ d'une part, de Ox et $C'B'$ d'autre part.

II. On reconnaît aussi simplement que la tangente commune en M pivote quand OACB est un parallélogramme (*fig.* 6). Soit, en effet, MA_1B_1 une tangente commune en M à deux paraboles. A étant le milieu de

Fig. 6.



A_1D, G est le milieu de A_1M. De même, H est le milieu de B_1M. Il en résulte que A_1B_1 est double de HG, et, par suite, à cause des triangles semblables CGH et OA_1B_1, que OB_1 est double de CG. Le rapport de similitude des triangles semblables KOB_1 et KCC est donc 2 ; donc enfin $OK = 2KC$, ce qui démontre la proposition.